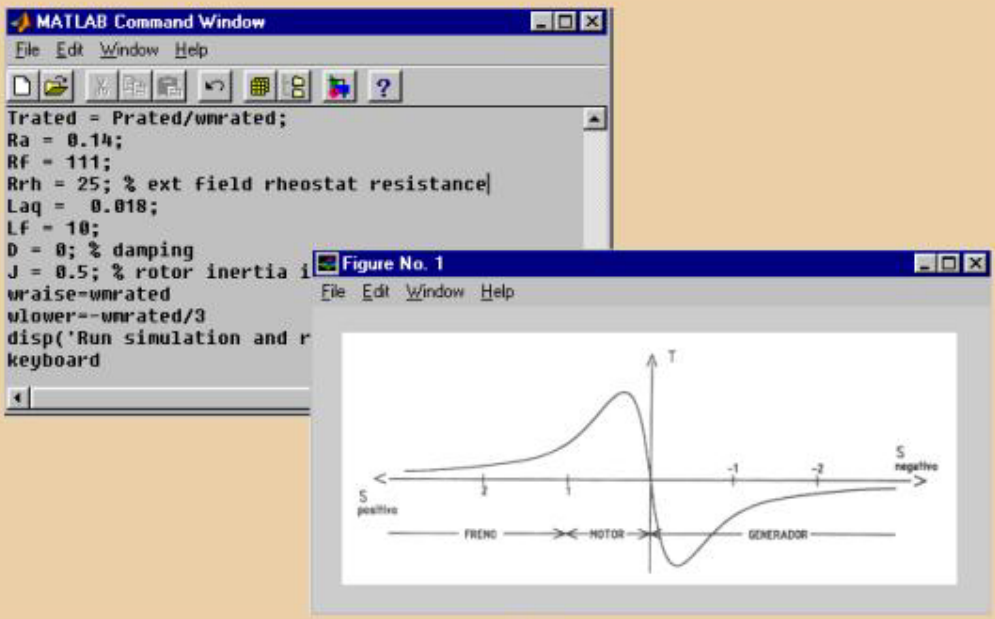
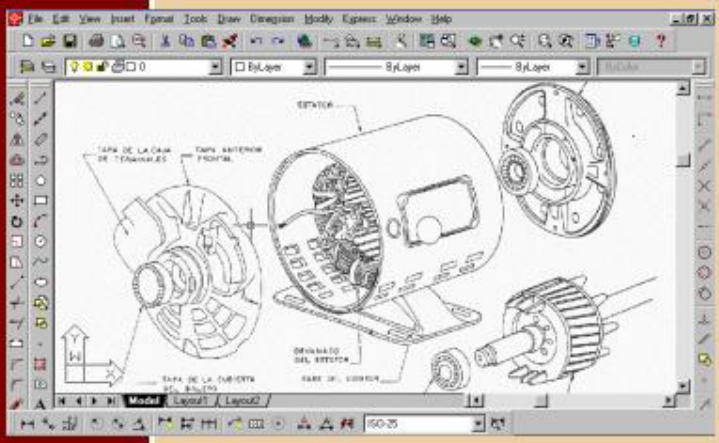
http://fiee.uni.edu.pe

UNI - FIEE

# Teoría y Análisis de Máquinas Eléctricas




**Ing. Agustín Gutierrez Páucar**



Lima - Perú
2000

***DEDICADO A:***

***MI ALMA MATER***

***LA UNIVERSIDAD***

***NACIONAL DE INGENIERÍA***

# *PRÓLOGO*

*El presente texto desarrolla el syllabus completo de la asignatura de Máquinas Eléctricas que se ofrece en la UNI para la especialidad de Ingeniería Eléctronica, pero su contenido es tal que puede ser perfectamente asimilado también por los alumnos de las especialidades de Ingeniería Eléctrica y Mecánica – Eléctrica que deseen obtener un buen conocimiento de las máquinas eléctricas .*

*Los primeros tres capítulos son introductorios al estudio de las máquinas eléctricas y en ellos se representan las características generales de las máquinas eléctricas estáticas y rotativas y los materiales empleados para su construcción. En capítulos siguientes se ve en forma amplia la teoría y aplicaciones de los transformadores monofásicos, trifásicos y autotransformadores.*

*El texto desarrolla la teoría de las máquinas eléctricas rotativas en régimen permanente, utilizando los métodos convencionales que han demostrado ser más didácticos para los estudiantes que se inician en el estudio de las máquinas eléctricas. Estos métodos permiten dar un conocimiento real de la máquina a partir del cual se obtienen fácilmente los circuitos equivalentes y las expresiones matemáticas que permiten el análisis riguroso en estado estable. En los últimos capítulos se hace un resumen de los métodos de control de velocidad de las máquinas rotativas de corriente contínua y corriente alterna que se están usando actualmente.*

*Se complementa la elaboración de éste libro con la presentación de un software interactivo de simulación digital de obtención de curvas características internas y externas de los tipos de máquinas de corriente contínua y alterna tratadas en el contenido del libro.*

*Expreso mi más sincero agradecimiento a la Universidad Nacional de Ingeniería que a través del Instituto de Investigación de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones, ha permitido el desarrollo del contenido de esta publicación; así como también a mis alumnos Sr. Walter Aguilar, Sr. Christian Aguilar por su apoyo, y a mis colegas profesores de la especialidad por su incentivo y recomendación. Finalmente mi agradecimiento a las Srtas. Jully Saldaña y Blanca F. Cortez De La Cruz por el tipeo, diagramación y su expertez en el diseño y presentación de ésta obra , que esperamos pueda contribuir a dar sólida formación a nuestros estudiantes.*

# *EL AUTOR*

*Ingeniero Electricista, se desempeña como Profesor Titular del curso de Máquinas Eléctricas y laboratorio de Máquinas Eléctricas, en las Facultades de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Industrial y de Sistemas de diversas Universidades Nacionales del Perú, como la Universidad Nacional de Ingeniería y Universidades Privadas como la Universidad Tecnológica del Perú.*

*Durante los últimos quince años ha alternado la actividad docente en diversas Universidades e Institutos de Instrucción Superior, con la práctica profesional como Ingeniero Electricista desarrollando sus actividades en Entidades Supervisoras de Proyectos y Ejecutores de Obras de gran importancia en su país, el Perú.*

*Sus actividades se han desarrollado en el área de Máquinas Eléctricas Estáticas y Rotativas, sistemas de Distribución Eléctrica y utilización. Actualmente está designado como Perito Judicial en la Especialidad de Ingeniería Eléctrica por el Registro de Peritos Judiciales del Poder Judicial (REPEJ) Corte Superior de Justicia de Lima. Posee diversos trabajos de Investigación y es miembro de Instituciones Científicas del País.*

# *ÍNDICE*


***I.- CIRCUITO MAGNÉTICO***

*1.1 Introducción.....4*
*1.2 Algunas leyes básicas de Electrostática.....5*
*1.3 Algunas leyes básicas de Magnetostática.....9*
*1.4 Otras conclusiones útiles en Magnetostática.....12*
*1.5 Campo Magnético de un toroide.....14*
*1.6 Analogía entre circuitos eléctricos y magnéticos.....16*
*1.7 Unidades y factores de conversión.....17*
*1.8 Ley de circuitos de Ampere aplicada a un núcleo ferromagnético.....18*
*1.9 Materiales ferromagnéticos.....20*

***II.- EXCITACIÓN DE ESTRUCTURAS FERROMAGNÉTICAS CON CORRIENTE DIRECTA***

*2.1 Introducción.....22*
*2.2 Propiedades de los materiales ferromagnéticos.....22*
*2.3 Circuitos aproximados de aparatos electromagnéticos.....25*
*2.4 Métodos de análisis de circuitos ferromagnéticos.....27*
*2.5 Entrehierros en circuitos ferromagnéticos.....28*

***III.- EXCITACIÓN DE ESTRUCTURAS FERROMAGNÉTICAS CON CORRIENTE ALTERNA***

*3.1 Introducción.....55*
*3.2 Ley de Faraday de Inducción Electromagnética.....55*
*3.3 Relación entre voltaje aplicada periódico, voltaje inducido y flujo en un núcleo magnético excitado por una sola fuente.....57*
*3.4 Forma de onda de la corriente de excitación en un sistema ferromagnético con flujo senoidal.....59*
*3.5 Energía almacenada en un núcleo magnético excitado por una sola fuente.....61*
*3.6 Representación matemática de la corriente de excitación no senoidal ($i_{Ø}(t)$).....64*
*3.7 Circuito equivalente aproximado de un reactor con núcleo de hierro.....67*
*3.8 Determinación de los parámetros del circuito equivalente de un reactor con núcleo de hierro.....68*
*3.9 Pérdidas en los materiales ferromagnéticos.....70*

*3.10 Pérdidas totales en el hierro.....73*
*3.11 Separación de pérdidas.....73*
*3.12 Determinación experimental de las pérdidas totales.....75*
*3.13 Reactores con núcleo de hierro.....76*
*3.14 Importancia de la Curva de Magnetización.....76*
*3.15 Modelos de representación de Curvas de Magnetización.....77*

***IV.- ANÁLISIS DEL CIRCUITO DE TRANSFORMADOR CON NÚCLEO DE AIRE***

*4.1 El Transformador Ideal.....109*
*4.2 Relaciones básicas en un Transformador – Ideal.....110*
*4.3 Análisis del transformador de Potencia con núcleo de hierro.....112*
*4.4 Circuito equivalente exacto.....114*
*4.5 Ecuaciones y diagrama vectorial.....116*
*4.6 Los circuitos equivalentes aproximados.....118*
*4.7 Determinación de los parámetros por medición de un transformador de núcleo de hierro.....119*
*4.8 Rendimiento.....123*
*4.9 Eficiencia o rendimiento de un transformador.....123*
*4.10 Variación de la eficiencia con la carga y eficiencia máxima.....124*
*4.11 La Regulación de un transformador.....125*
*4.12 Determinación analítica de la regulación.....126*
*4.13 Empleo de valores unitarios y porcentuales.....128*
*4.14 Autotransformadores.....131*
*4.15 Transformadores Trifásicos.....138*
*4.16 Transformadores de Audio ó a Frecuencia variable.....143*
*4.17 Preguntas y respuestas sobre transformadores.....146*

***V.- CONVERSIÓN DE ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA***

*5.1 Proceso de conversión de energía.....200*
*5.2 Energía de campo.....201*
*5.3 Fuerza mecánica en los Sistemas Electromagnéticos.....207*
*5.4 Máquinas Rotativas.....214*

***VI.- ASPECTO CONSTRUCTIVOS DE LA MÁQUINA DE CORRIENTE CONTÍNUA***

*6.1 Aspectos constructivos de la máquina de corriente contínua.....236*
*6.2 Principios de funcionamiento de la maquina de corriente continua.....237*
*6.3 Campo magnético producido por el rotor y reacción de armadura.....239*

*6.4 Conmutación.....243*
*6.5 El Motor de corriente contínua en régimen permanente.....244*
*6.6 El Generador de corriente contínua en régimen estable.....254*
*6.7 Control de velocidad de máquinas de corriente continua.....261*

***VII.- MOTORES POLIFÁSICOS DE INVERSIÓN***

*7.1 Motores Trifásicos.....306*
*7.2 Máquina Asíncrona Trifásica.....321*
*7.3 Control de velocidad en Maquinas Asíncronas.....347*
*7.4 Arranque de Motores de Inducción.....364*
*7.5 Principios de funcionamiento de la Máquina Síncrona.....365*
*7.6 Control de velocidad de Motores Síncronos.....389*

# *CAPÍTULO I*
# *CIRCUITO MAGNÉTICO*

## *1.1 INTRODUCCIÓN*

*El objetivo del curso es exponer los principios de la conversión de energía electromecánica y del desarrollo de métodos para obtener modelos paramétricos de transductores.*

*Los Transductores son aparatos que convierten energía de una forma a otra. Muchos de ellos son electromecánicos. Ejemplo:*
*Los motores eléctricos usados en los aparatos domésticos, tales como: ventiladores, refrigeradores, etc. convierten energía eléctrica en energía mecánica.*

*Todos los transductores electromecánicos pueden considerarse como formados de partes que son eléctricas y de partes que pueden ser clasificadas como mecánicas. La energía es recibida o suministrada por éstas partes dependiendo de la naturaleza y aplicación de cada transductor particular. Los Campos magnéticos y/o eléctricos sirven como medio de acoplamiento. Veamos la representación de una transductor en un diagrama de bloques: transductor en un diagrama de bloques:*

***ENERGÍA ELÉCTRICA O ENERGÍA MECÁNICA***

***Figura** 1.1.1*

*Los campos magnéticos y eléctricos juegan un papel importante en los procesos de almacenamiento y transferencia de energía eléctrica. Se requiere el conocimiento de las relaciones de entrada y salida que existen en los tres bloques componentes.*

*Es necesario desarrollar métodos para la obtención de modelos para cada bloque componente. Es necesario calcular la fuerza de éstos medios de acoplamiento en estructuras lineales y no lineales y establecer la relación entre éstos campos y los parámetros de la parte eléctrica de los transductores, llamados voltaje y corriente. Tales relaciones serán derivadas para los campos magnéticos en este libro.*

*La determinación de la relación entre la intensidad de campo magnético y los voltajes y corrientes en este medio, utiliza en general cálculos en tres dimensiones; generalmente se realizan suposiciones y aproximaciones apropiadas y el problema de cálculo tridimensional puede ser reducida a un problema de redes o circuitos de una dimensión por muy difíciles que puedan ser considerados los transductores electromecánicos, y resuelto por el uso de técnicas similares a las usadas en la teoría de redes eléctricas, para tal efecto se introduce el concepto de circuito magnético, serán repasadas algunas leyes básicas referidas a campos estáticos (invariantes en el tiempo), eléctricos y magnéticos. Luego serán introducidas algunas leyes básicas y conceptos adicionales, referidos a campos magnéticos variables en el tiempo.*

## *1.2 ALGUNAS LEYES BÁSICAS DE ELECTROSTÁTICA*

*a)* ***Ley de Coulomb:*** *La electricidad es una característica de la materia, y carga es una medida de esta característica. Dos clases de carga son conocidas, positiva y negativa.*

*Ley de la conservación de la carga:*
*Σ Algebraica de todas las cargas en un sistema aislado es constante.*

*Sean:*

| | |
|---|---|
| $q_1$ y $q_2$ | *las magnitudes de las cargas* |
| *d* | *es la distancia entre ellas* |
| *K* | *es la constante de proporcionalidad que depende del medio donde el experimento es realizado y del sistema de unidades usado.* |

*La fuerza eléctrica entre ambas es:*

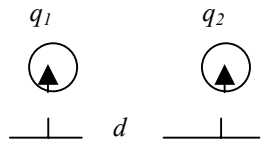



***Figura** 1.2.1*

$$F = K\frac{q_1 q_2}{d^2} \quad .....(1-1)$$

*Cargas del mismo signo se repelen y cargas de signo contrario se atraen.*

*En el sistema de unidades MKS racionalizado, las unidades son:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $\rightarrow$ | *metro* | *(longitud)* |
| *m* | $\rightarrow$ | *Kilogramo* | *(masa)* |
| *t* | $\rightarrow$ | *segundo* | *(tiempo)* |
| *c* | $\rightarrow$ | *coulomb* | *(carga)* |

*La constante K tiene un valor de* $1/4\pi\varepsilon$
*Donde* $\varepsilon$ *= constante dieléctrica llamada capacidad o permitividad del medio.*

*En el vacío* $\varepsilon = \varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi \times 10^9}$

*Es conveniente escribir la ecuación (1-1) en forma vectorial suponiendo que el medio es el vacío y usando el sistema MKS racionalizado.*

$$\overline{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o d^2}\hat{e}_{ro} \quad .....(1-2)$$

*Se supone que los cuerpos cargados son estacionarios en el espacio y pueden ser considerados como cargas puntuales.*

$\hat{e}_{ro}$ *es el vector unitario en la dirección de la línea de fuerza* $r_o$.

*En forma general la fuerza total ejercida por ellas sobre una carga de prueba colocada en su vecindad puede ser obtenida por una superposición lineal.*

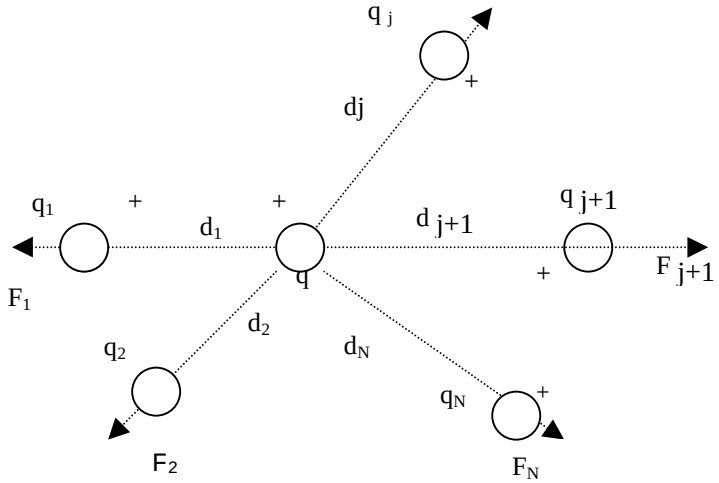



***Figura*** *1.2.2*

$$\overline{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{d_j^2}\hat{e}_{rj} \quad .....(1-3)$$

*La fuerza total es el vector suma de las fuerzas ejercidas por cada carga del grupo, sobre la carga de prueba.*

**b)** ***<u>Campo Eléctrico</u>:*** *Cada carga* $q_j$ *produce un campo eléctrico que actúa como medio para ejercer su fuerza sobre otras cargas colocadas bajo su influencia. El centro del campo está en el lugar donde se encuentra la carga. Si es asumido ésto y la carga de prueba q es suficientemente pequeña para no distorsionar el campo producido por las otras cargas, la intensidad de éste puede ser representada por el vector* $\bar{E}$ *definido por:*

$$\overline{E} = \frac{\overline{F}}{q} \quad .....(1-4)$$

*En forma general diremos que:*

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{d_j^2}\hat{e}_{rj} \quad .....(1-5)$$

*Unidades:*
*[F] = Newtons*
*[q] = Coulombs*
*[d] = metros*
*[E] = Volts/mt.*

*En el caso de un cuerpo cargado en el vacío, la intensidad de campo eléctrico es:*

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_V \frac{\rho}{d^2}\hat{e}_{rj}dV \quad .....(1-6)$$

*Donde:*
$\rho$ , *Es la densidad volumétrica de la carga*
*V* , *Volumen del cuerpo sobre el cual se realiza la integración.*

**c) <u>Potencial Eléctrico</u>:**

***Figura** 1.2.3*

*Consideremos el campo eléctrico debido a un carga $q_j$. Supongamos que deseamos mover una carga positiva unitaria del punto A al punto B, a lo largo de la trayectoria A-B. Como el campo eléctrico debido a $q_j$ ejerce una fuerza en la carga de prueba unitaria, se debe efectuar un trabajo y consumir energía para mover la unidad de carga de A a B.*
*En el punto P de la trayectoria AB, la intensidad de campo eléctrico E debida a $q_j$ es :*

$$\overline{E} = \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o d_\rho^2}\hat{e}_{r\rho} \quad .....(1-7)$$

*Donde:*

$\hat{e}_{rp}$ *es el vector unitario*
$d_p$ *es la distancia al punto p desde* $q_j$

*El trabajo hecho sobre la unidad de carga para moverla una distancia $d\lambda$ a lo largo de la trayectoria AB es :*

$$dW_j = -\overline{E} \cdot d\overline{\lambda} = -\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o d_\rho^2}\hat{e}_{r\rho} \cdot d\overline{\lambda} = -\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 d_\rho^2} dr \quad ..... (1-8)$$

*Donde:*

$$\hat{e}_{r\rho} \cdot d\overline{\lambda} = \left|\hat{e}_{r\rho}\right| \left|d\overline{\lambda}\right| \cos\theta = d\lambda \cos\theta = dr$$

*El signo negativo significa que el trabajo es hecho sobre la carga en contra del campo eléctrico debido a $q_j$.*

*El trabajo hecho para mover la unidad de carga de A a B es :*

$$W_j = -\int_A^B \overline{E} \cdot \overline{d\lambda} = -\int_{dA}^{dB} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o d_\rho^2} dr = \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{d_B} - \frac{1}{d_A}\right) \quad .....(1-9)$$

*Si hay N cargas en un conjunto, el trabajo total realizado en la unidad de carga es:*

$$W = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{d_B} - \frac{1}{d_A}\right) \quad .....(1-10)$$

*En la ecuación (1-10), W es definido como la diferencia de potencial entre A y B, esto es:*

$$V_B - V_A = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{d_B} - \frac{1}{d_A}\right) \quad .....(1-11)$$

*El potencial absoluto en el punto B dentro un campo eléctrico es obtenido al colocar el punto A en el $\infty$.*

*Como $d_A \rightarrow \infty$. En la ecuación (1-11) se tendría:*

$$V = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o d_B} \quad .....(1-12)$$

*El potencial V es una magnitud escalar, a diferencia del campo eléctrico $\overline{E}$.*

*La relación diferencial $dV = -\overline{E} \cdot d\overline{\lambda}$ puede ser descrita por:*

$$dV = -Ed\lambda \cos\theta \quad .....(1-13)$$

*La componente del vector $\overline{E}$ en la dirección de la tangente de la trayectoria AB en el punto P es dado por:*

$$\left|\overline{Et}\right| = -\frac{dV}{d\lambda} \quad .....(1-14)$$

## 1.3 ALGUNAS LEYES BÁSICAS DE MAGNETOSTÁTICA

### a) ***Fuerzas en cargas en movimiento*: Campo Magnetostático**

*Al tener cargas eléctricas en movimiento estas experimentan fuerzas debido a la velocidad de las cargas llamadas fuerzas magnéticas y la región en la cual existen es llamado como CAMPO MAGNÉTICO. Se define un campo magnético en términos de campos eléctricos en movimiento. Se define la corriente eléctrica como la rapidez de la transferencia o de transporte de cargas eléctricas en un medio (por ejemplo, una bobina o un alambre). Se dice entonces que un campo magnético esta asociado a la bobina.*
*Un campo magnético es usualmente considerado compuesto de líneas de fuerza llamadas líneas de flujo o líneas de inducción. (representadas por $\phi$).*

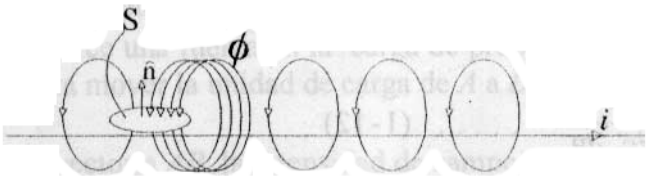



***Figura** 1.3.1*

*El Número de líneas de fuerza por unidad de área, es una medida de la fuerza del campo magnético. (y es llamada densidad de flujo) ($|\mathbf{B}|$) **B=$\phi$/S***
*Unidades: (sistema MKS racionalizado)*

*[$\phi$] = Weber o Volt-seg*
$[B] = Weber/(mt)^2$
$[E] = Volt/mt$

***Ecuación de la Fuerza de Lorentz*:**

*Una carga $q_1$ eléctrica en movimiento a una velocidad uniforme $v_1$ en una región de campo magnético B experimenta una fuerza adicional llamada fuerza de Lorentz.*

$$\overline{F} = q_1 \overline{v}_1 \times \overline{B} \quad .....(1-15)$$

*Si $\overline{B}$ es generado por otra carga $q_2$ en movimiento a una velocidad uniforme $v_2$ entonces:*

$$\overline{B} = \frac{1}{\upsilon_o^2}\overline{v}_2 \times \overline{E}_2 \quad .....(1-16)$$

*Donde:*

$\overline{E}_2$ *es la Intensidad de campo eléctrico debido a* $q_2$

$\upsilon_o$ *es la velocidad de la luz (en el vacío* $\upsilon_o = 3\times10^8$ *m/seg).*

**b) <u>Campo Magnético de un elemento de corriente en el vacío: Ley de Biot-Savart</u>.**

*Sabemos que I=dq/dt, la carga en la longitud elemental dl es dq=ldt. Luego la intensidad de campo eléctrico debido a esta carga en el punto P es:*

$$\overline{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o d^2}\hat{e}_r = \frac{Idt}{4\pi\varepsilon_o d^2}\hat{e}_r \quad .....(1-17)$$

$\hat{e}_r$ *es el vector unitario en la dirección r*

*La velocidad de carga es* $\frac{d\lambda}{dt}\overline{u}_2$

*Donde:*

$\overline{u}_2$ *es el vector unitario en la dirección del flujo de la carga en el conductor, esto es:*

$$\overline{\nu} = \frac{d\lambda}{dt}\overline{u}_2 = \frac{d\overline{\lambda}}{dt} \quad .....(1-18)$$

*Este movimiento de carga origina un campo magnético, luego el vector elemental de la densidad de flujo esta dado aplicando la ecuación (1 – 16).*

$$d\overline{B} = \frac{I}{\upsilon_o^2}\left[\frac{d\lambda}{dt}\overline{u}_2 \times \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o d^2}\hat{e}_r\right] = \frac{I}{4\pi\upsilon_o^2}\cdot\frac{d\overline{\lambda}\times\hat{e}_r}{d^2} \quad .....(1-19)$$

*En la práctica, la corriente fluye en trayectorias cerradas. Si la trayectoria del flujo de la corriente es representada por C, entonces el campo magnético total en cualquier punto del vacío debido a la totalidad de la corriente se obtiene al integrar la ecuación (1 - 19) a lo largo de C.*

$$\overline{B} = \frac{I}{4\pi\varepsilon_o\upsilon_o^2}\int_C \frac{d\overline{\lambda}\times\hat{e}_r}{d^2} \quad .....(1-20)$$

*También expresado como:*

$$\overline{B} = \frac{I\mu_o}{4\pi}\int_C \frac{d\overline{\lambda}\times\hat{e}_r}{d^2} \quad .....(1-21)$$

*Conocida como Ley de BIOT-SAVART, donde*
*$\mu_0$ =Permeabilidad del vacío;*

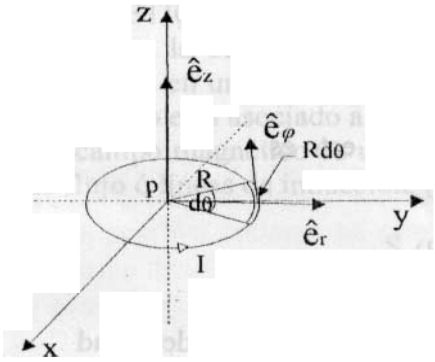
$$\mu_o = \frac{1}{\varepsilon_o \upsilon_o^2} \quad \rightarrow \quad \upsilon_o = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$$

*En el sistema MKS racionalizado* $\mu_o = 4\pi x 10^{-7} \dfrac{weber}{Amp - vuelta metro}$

**c) <u>Campo Magnético en el centro de un anillo circular de corriente en el vacío</u>.**

*Consideremos un anillo circular de radio R por el que circula una corriente I. Es conveniente el uso del siguiente sistema de coordenadas $\varphi$, r, z donde:*

$\hat{e}_\varphi$ *Es el vector unitario en la dirección tangente al anillo circular en el plano del papel.*
$\hat{e}_r$ *Es el vector unitario en la dirección radial en el plano del anillo.*
$\hat{e}_z$ *Es el vector unitario perpendicular al plano del anillo.*




$$\hat{e}_r x \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z$$
$$\hat{e}_z x \hat{e}_r = \hat{e}_\varphi$$
$$\hat{e}_\varphi x \hat{e}_z = \hat{e}_r$$

***Figura** 1.3.2*

*De la figura:*

$d\bar{\lambda} = Rd\theta\, \hat{e}_\varphi$

*La densidad de flujo* **B** *en el punto P puede ser obtenida de la ecuación (1-21):*

$$\overline{B}_P = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Rd\theta(\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_r}{R^2} = \frac{\mu_o I}{2R} \hat{e}_z \quad .....(1-22)$$

*Si en lugar de una sola vuelta de alambre, la bobina tiene N vueltas muy juntas y todas esencialmente del mismo radio, c/u contribuye de manera igual al campo magnético.*
*El campo magnético en P es igual a:*

$$\overline{B}_P = \frac{\mu_o NI}{2R} \hat{e}_z \quad .....(1-23)$$

**d) <u>Campo Magnético de un solenoide largo</u>:**

*Consideremos un solenoide de longitud L, donde L >>R*
*I es la corriente que circula en la bobina.*
*La densidad de flujo en un punto que esté en el eje del solenoide o cerca de él, pero no muy cerca de los extremos, estará dado por:*

$$\overline{B} = \frac{\mu_o NI}{L}\hat{e}_z \quad .....(1-24)$$

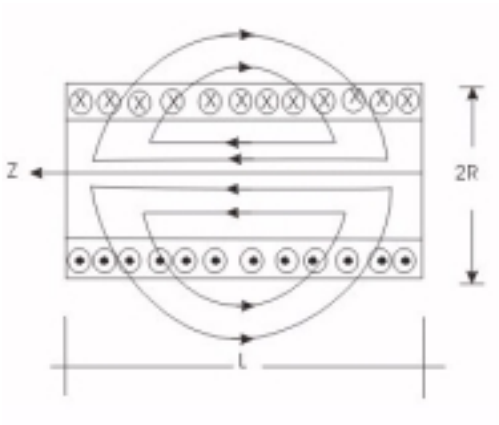



***Figura** 1.3.3*

## *1.4 OTRAS CONCLUSIONES ÚTILES EN MAGNETOSTÁTICA*

**a) Continuidad de líneas de Inducción:**
*El flujo o línea de inducción producidas por las corrientes siempre forman un circuito cerrado.*

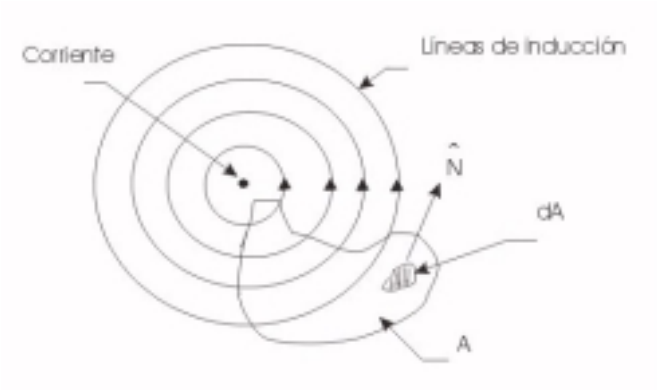



***Figura** 1.4.1*

*El número de líneas que entra es igual al número de líneas que sale, matemáticamente se expresa:*

$$\int_A \overline{B}\cdot d\overline{A} = \int_A \overline{B}\cdot \hat{n}dA = 0 \quad .....(1-25)$$

*Otra forma de expresar es:*
*Divergencia de* $\overline{B}$ *= 0, esto es:*

$$\nabla \cdot \overline{B} = 0 \quad .....(1-26)$$

*[Ley de Gauss para Campos Magnéticos]*

**b) Ley de circuitos de Ampere:**

*Consideremos un anillo por el que circula una corriente.*
*Tenemos líneas de inducción originadas por ésta*

*"La integral de línea del vector densidad de flujo, alrededor de una trayectoria cerrada en la misma dirección de las líneas de inducción, está relacionada con la ecuación (suponiendo que se encuentra en el vacío)".*

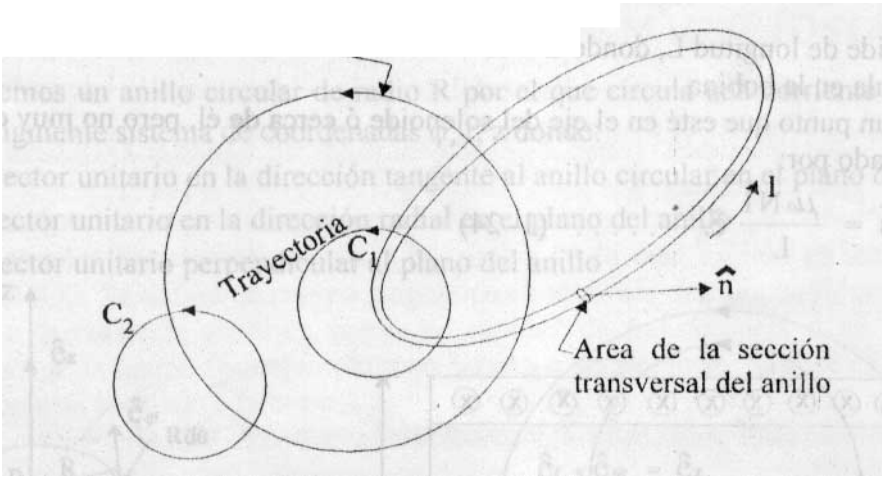



***Figura** 1.4.2*

$$\left.\begin{array}{l} \int_{C_1} \overline{B} \cdot d\overline{\lambda} = \mu_0 I \quad (si\, la\, trayectoria\, C_1\, enlaza\, a\, la\, corriente) \\ \int_{C_2} \overline{B} \cdot d\overline{\lambda} = 0 \quad (Si\, la\, trayectoria\, C_2\, no\ enlaza\ a\ la\ corriente) \end{array}\right\} .... (1\text{-}27)$$

*Siempre se busca que* $\overline{B} \cdot d\overline{\lambda} \neq 0$*, es decir que la trayectoria escogida que enlaza a la corriente no es normal a la dirección de B.*

*Si* $\overline{J}$ *es el vector densidad de corriente en el anillo por el que circula ésta entonces:*

$$I = \int_A \overline{J} \cdot d\overline{A} = \int_A \overline{J} \cdot \hat{n} dA \quad ..... (1 - 28)$$

*Luego:*

$$\int_C \overline{B} \cdot d\overline{\lambda} = \mu_o \int_A \overline{J} \cdot \hat{n} dA \quad ..... (1 - 29)$$

*Esta integral también se puede escribir en forma diferencial:*

$$\nabla \times \overline{B} = \mu_o \overline{J} \quad .....(1-30)$$

*Se define un vector Intensidad Magnética* $\overline{H}, \overline{B} = \mu_0 \overline{H}$ *.....(1 – 31)*
*La ley de circuitos de Ampere en términos de* $\overline{H}$ *puede ser escrita:*

$$\int_C \overline{H} \cdot d\overline{\lambda} = \int_A \overline{J} \cdot d\overline{A} = \int_A \overline{J} \cdot \hat{n} dA \quad .....(1-32)$$

*En forma diferencial tenemos:*
*Rotacional* $\overline{H} = \overline{J}$ *esto es:*

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} \quad .....(1-33)$$

***c) Característica de Magnetización para el vacío:***

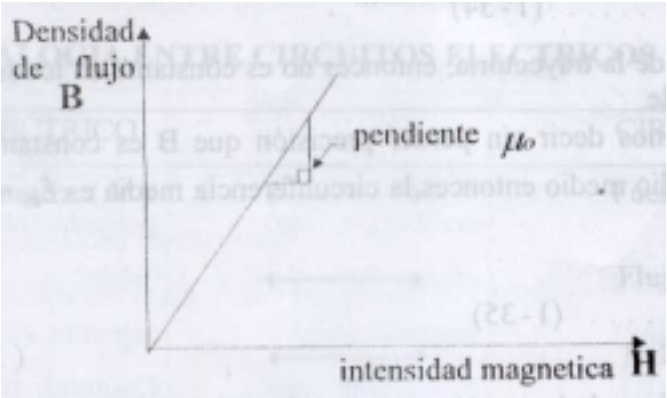



***Figura*** *1.4.3*

## *1.5 CAMPO MAGNÉTICO DE UN TOROIDE*

*Se muestra el esquema de un Toroide.*

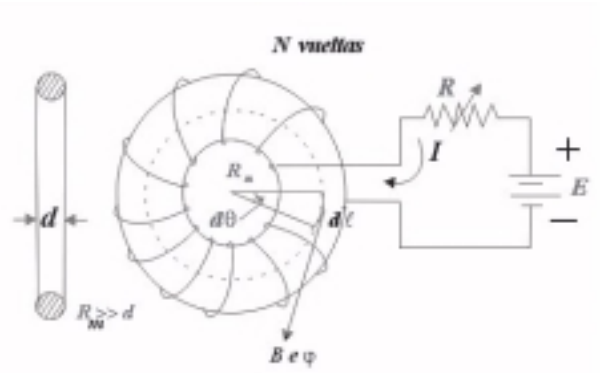



***Figura*** *1.5.1*

*Se deduce que las líneas de inducción dentro de un Toroide son circulares. Consideremos una trayectoria circular dentro de un Toroide.*

*Por simetría* $\overline{B}$ *es constante en todos los puntos de esta trayectoria y su dirección es a lo largo de la tangente de la trayectoria en cada punto.*

*Luego haciendo uso de la Ley de circuito de Ampere:*

$$\int_C \overline{B}.d\overline{l} = \mu_0 NI \quad .....(1-34)$$

*C es la trayectoria circular de radio $R_m$*

*Esta trayectoria enlaza la corriente I, N veces, además tenemos:*

$$\overline{B} = B\hat{e}_\varphi \;\; y \;\; d\overline{\lambda} = R_m d\theta\, \hat{e}_\varphi$$

$$\int_C B\,\hat{e}_\varphi \cdot R_m d\theta\,\hat{e}_\varphi = \int_o^{2\pi} BR_m d\theta = BR_m(2\pi) = \mu_o NI \quad .....(1-35)$$

$$\overline{B} = \frac{\mu_o NI}{2\pi R_m}\hat{e}_\varphi \quad .....(1-36)$$

$\overline{B}$ *varía inversamente con el radio de la trayectoria, entonces no es constante en todos los puntos de la sección transversal del Toroide.*

*Si suponemos que $R_m$>>d podemos decir sin perder precisión que $\overline{B}$ es constante en dicha sección transversal. Si $R_m$ es el radio medio entonces la circunferencia media es $\lambda_m = 2\pi R_m$ y la densidad de flujo es :*

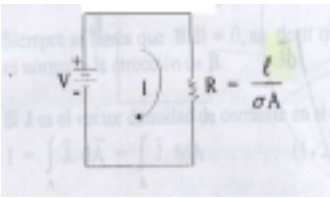
$$B = \frac{\mu_o NI}{\lambda_m} \quad .....(1-37)$$

*Como B es el flujo por unidad de área de la sección transversal, el flujo total dentro del Toroide esta dado por:*

$$\phi = BA = \frac{\mu_o NIA}{\lambda_m} = \frac{NI}{\lambda_m / \mu_o A} \quad .....(1-38)$$

*Esta ecuación se conoce como la LEY DE OHM para circuitos magnéticos.*

*La cantidad NI es llamada fuerza magnetomotriz ó (f.m.m.) $\lambda_m/\mu_0 A$ es denominado la reluctancia de la estructura magnética ($\Re$).*
*Existe una analogía con el circuito eléctrico mostrado.*




$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{\lambda / \sigma A} \quad .....(1-39)$$

***Figura** 1.5.2*

*Donde:*

$\sigma$ *es la conductividad del material usado para fabricar el resistor.*

$\lambda$ *es la longitud.*

$A$ *es el área de la sección transversal del resistor.*

*Como* $B=\mu_o H$ *de la ecuación (1-35) tenemos que:*

$$H = \frac{NI}{\lambda_m} \quad .....(1-40)$$

*Se ha pretendido hacer una aproximación de una estructura magnética tridimensional en un circuito magnético de una dimensión. Esto debido a la configuración geométrica y simétrica del Toroide.*
*El concepto de circuito magnético se ha desarrollado para una estructura particular, conteniendo aire ó vacío.*

## 1.6 ANALOGÍA ENTRE CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

**TABLA 1-1**

| CIRCUITO ELECTRICO | | CIRCUITO MAGNETICO |
|---|---|---|
| voltaje (V) | ⟷ | Fuerza Magnetomotriz ($\mathcal{F}$) |
| Corriente (I) | ⟷ | Flujo ($\phi$) |
| Resistencia (R) | ⟷ | Reluctancia ($\mathcal{R}$) |
| Conductancia (g) | ⟷ | Permanencia (P) |
| Conductividad ($\sigma$) | ⟷ | Permeabilidad ($\mu_0$) * |

* Se supone que el medio dentro de la estructura magnética es el vacío.

**RESUMEN**

*Ecuaciones de Maxwell en forma integral:*

$$\int_A \overline{D} \cdot d\overline{A} = Q = \int_V \rho\, dV \quad (Ley\ de\ Gauss) \quad .....(1-41)$$

$$\int_A \overline{B} \cdot d\overline{A} = 0 \quad .....(1-42)$$

*A es una superficie cerrada.*

$$\int_C \overline{\boldsymbol{H}} \cdot \boldsymbol{d}\overline{\lambda} = \int_A \overline{\boldsymbol{J}} \cdot \boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{A}} \quad \text{(Ley de Ampere, caso estático)} \quad (1\text{-}43)$$

$$\int_C \overline{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{d}\overline{\lambda} = \boldsymbol{0} \quad \text{(Caso estático)} \quad .....(1-44)$$

*C es la trayectoria en la cual es verificada la integral de línea.*

$$\int_C \overline{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{d}\overline{\lambda} = -\int_A \frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{A}} \quad \text{Ley de Faraday} \quad .....(1-45)$$

*Ecuaciones de Maxwell en forma Diferencial o Puntual:*

*Divergencia de un vector* $\overline{A} = \nabla \cdot \overline{A}$ *Luego:*

$\nabla \cdot \overline{D} = \rho$ *Ley de Gauss* .....$(1-46)$

$\nabla \cdot \overline{B} = 0$ .....$(1-47)$

*Rotacional de un vector cualquiera* $\overline{A} = \nabla \times \overline{A}$, *luego:*

$\nabla \times \overline{H} = \overline{J}$ *Ley de Ampere (caso estático)* .....$(1-48)$

$\nabla \times \overline{E} = -\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t}$ *Ley de Faraday* .....$(1-49)$

## 1.7 UNIDADES Y FACTORES DE CONVERSIÓN

TABLA 1-2

| CANTIDAD | SISTEMA MKS RACIONALIZADO | SISTEMA CGS (ELECTROMAGNÉTICO) | SISTEMA INGLES MIXTO |
|---|---|---|---|
| Longitud (L) | Metro (m) | Centímetro (cm) | Pulgada (pulg) |
| Masa (M) | Kilogramo (kg) | Gramo (gr) | "slug" |
| Tiempo (t) | Segundo (seg) | Segundo (seg) | segundo (seg) |
| Carga (q) | Coulomb (C) | Abcoulomb (abC) | Coulomb (C) |
| Fuerza (F) | Newton | Dina | Libra (lb) |
| Energía (W) | Newton-mt ó Joule | Dina-cm ó ergio | Pie-lb |
| Flujo Magnético (Ø) | Weber | Maxwell ó línea | Maxwell ó línea |
| Densidad de flujo B | Weber/$m^2$ | Línea/$cm^2$=gauss | Línea/$pulg^2$ |
| Fuerza magnetomotriz fmm | Ampere-vuelta | gilbert | Amp-vuelta |
| Intensidad magnética, H | Amp-vuelta/mt | gilbert/cm=oersted | Amp-vuelta/pulg |
| Permeabilidad del vacío $\mu_0$ | $\dfrac{4\pi \times 10^{-7}\,weber}{amp-vuelta-m}$ | $1.0\ \dfrac{max\ well}{gilbert-cm}$ | $\dfrac{3.192 maxwells}{amp-vuelta-pulg}$ |
| Aceleración debido a la gravedad "g" | 9.8m/$seg^2$ | $9.8x10^2$cm/$seg^2$ | 32.2 pie/$seg^2$ |

### ALGUNOS FACTORES DE CONVERSIÓN ÚTILES

**TABLA 1-3**

| Multiplicando | Por | Para obtener |
|---|---|---|
| $\lambda$ en pulgadas | $2.54x10^{-2}$ | $\lambda$ en metros |
| F en libras | 4.448 | F en nwetons |
| fmm en gilberts | 0.796 | fmm en amp-vuelta |
| H en oersterds | 79.6 | H en amp-vuelt/m |
| $\phi$ en líneas ó maxwells | $10^{-8}$ | $\phi$ en webers |
| B en líneas/$pulg^2$ | $15.50x10^{-6}$ | B en weber/$m^2$ |
| B en lìneas/$pulg^2$ | 0.155 | B en gauss |
| B en gauss | $10^{-4}$ | B en weber/$m^2$ |

## 1.8 LEY DE CIRCUITOS DE AMPERE APLICADO A UN NÚCLEO FERROMAGNÉTICO

$$\oint_C \overline{H} \cdot d\overline{\lambda} = \int_A \overline{J} \cdot d\overline{A} \quad .....(1-50)$$

*Relaciona corrientes eléctricas y campos magnéticos*

- $\overline{J}$ $\rightarrow$ *es la densidad de corriente*
- $\overline{H}$ $\rightarrow$ *es la excitación específica o intensidad de campo*

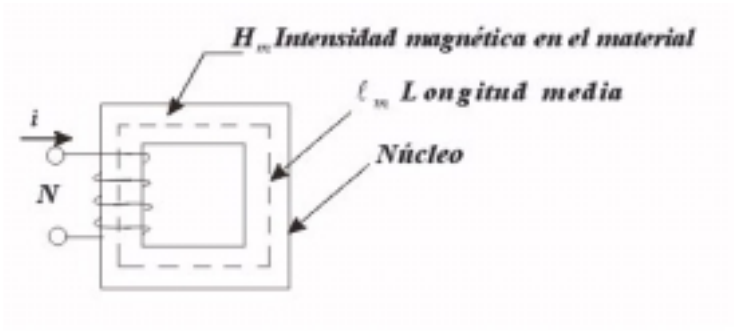



***Figura** 1.8.1*

- *La integral de línea de H a lo largo del contorno de una superficie a través de la cual pasa la densidad de corriente J es igual a la corriente total a través de ella.*

$$N\,i = H_m \lambda_m \quad .....(1-51)$$

- *Los Amper-vuelta N i pueden proceder de uno o varios bobinados, siendo Ni el total de todos ellos.*

$$B = \mu_o H \quad .....(1-52)$$

*[B]=Wb/m*$^2$ *1 weber=10*$^8$ *líneas*

- *En el sistema MKS:* $\mu_0 = 4\pi x 10^{-7}$ *web/amp-vuelt-mt; permeabilidad del vacío*

$\mu$ $\rightarrow$ *permeabilidad del material ferromagnético*

$\mu_r = \dfrac{\mu}{\mu_o}$ *es la permeabilidad relativa* $\mu_r$ *=[2,000 ; 6,000]*

- *La densidad de flujo B producida por H será sumamente pequeña en todas partes excepto en el hierro del núcleo.*

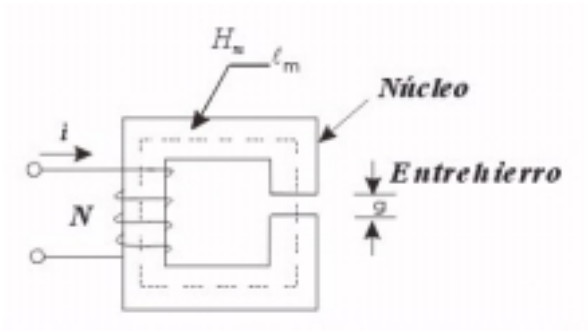



***Figura*** *1.8.2*

- *Las máquinas ó dispositivos de conversión de energía provistos de una parte móvil tienen necesariamente entrehierros en sus núcleos.*
- *Aplicando la fórmula: $Ni = H_m \lambda_m + H_g g$*
  *El flujo es continuo a lo largo del circuito magnético:*

$$B_m = \mu_m H_m \quad .....(1-53)$$
$$B_g = \mu_o H_g \quad .....(1-54)$$
$$\phi_m = B_m A_m \quad .....(1-55)$$
$$\phi_g = B_g A_g \quad .....(1-56)$$
$$N\,i = \frac{B_m}{\mu_m}\lambda_m + \frac{B_g}{\mu_o} g\,,\ (\phi_m \cong \phi_g \cong \phi) \quad .....(1-57)$$
$$N\,i = \frac{\phi\lambda_m}{A_m \mu_m} + \frac{\phi}{A_g \mu_o} g \quad .....(1-58)$$

*El término Ni se representa por $\mathcal{F}$ y se denomina fuerza magnetomotriz ó f.m.m.*
*Los coeficientes del segundo miembro se denominan reluctancia $\mathfrak{R}$.*

$$\mathfrak{R}_m = \frac{\lambda_m}{A_m \mu_m} \quad .....(1-59)$$

$$\mathfrak{R}_g = \frac{g}{A_g \mu_0} \quad .....(1-60)$$

$$Ni = F = \phi(\mathfrak{R}_m + \mathfrak{R}_g) \quad .....(1-61)$$

$$\phi = \frac{F}{\mathfrak{R}_m + \mathfrak{R}_g} = \frac{\frac{F}{\mathfrak{R}_g}}{1 + \frac{\mathfrak{R}_m}{\mathfrak{R}_g}} = \frac{\frac{F}{\mathfrak{R}_g}}{1 + \left(\frac{\mu_o}{\mu_m}\right)\left(\frac{\lambda_m}{g}\right)\left(\frac{A_g}{A_m}\right)} \quad .....(1-62)$$

## *1.9 MATERIALES FERROMAGNÉTICOS*

*Los elementos ferromagnéticos que se encuentran en la naturaleza son solamente tres: el hierro, el niquel y el cobalto.*

*Entre éstos naturalmente el de mayor uso es el hierro y sus aleaciones con los ótros dos y con ótros metales (Al, Cu, etc.).*

***Algunas Aleaciones:***

*I)* ***El Acero-Silicio****: Es la aleación más importante el hierro-silicio, también llamado acero-silicio, contiene un porcentaje variable de ¼-5% de silicio. Esta aleación recibe además un tratamiento térmico y con ello se obtiene un material que tiene mejor permeabilidad y al mismo tiempo mayor resistencia eléctrica y ésto implica una disminución de las pérdidas por corrientes parásitas. El acero silicio se fabrica en láminas de 8.5mm a 9.35mm de espesor y de acuerdo con el porcentaje de silicio se obtienen diferentes tipos de aleaciones:*

*i) Field Grade: ¼% de silicio con una resistencia específica de 10μΩ-cm. Se emplea en la construcción de pequeños motores.*

*ii) Armadura Grade : ½% de silicio con una resistencia específica de 19μΩ-cm. Se emplea en pequeños motores generadores y en general en los dispositivos donde se desea tener altas densidades de flujo sin que interesen mayormente las pérdidas en el núcleo.*

*iii) Electrical Grade: 1% de silicio con una resistencia específica de 26μΩ-cm. Se emplea en motores y generadores de potencias medias, en transformadores, relays y otros aparatos diseñados para operación intermitente.*

*iv) Motor Grade: 2.5% de silicio con una resistencia específica de 42μΩ-cm. Se emplea en motores y generadores medianos de buena eficiencia en aparatos de control y en transformadores para radios.*

*v) Dínamo Grade: 3.5% de silicio con una resistencia específica de 50μΩ-cm. Se emplea en motores y generadores de alta eficiencia, pequeños transformadores de potencia y transformadores de radio.*

*vi) Transformador Grade: 5% de silicio con una resistencia específica de 56μΩ-cm. Se emplea en los grandes transformadores de potencia, en grandes alternadores de alta eficiencia y en generadores síncronos.*

*Como se observa la resistencia específica de las láminas aumenta con el porcentaje de silicio y sigue aproximadamente la siguiente ecuación empírica:*

$$\rho = 12.5 + 11S_i$$

*$\rho \rightarrow$ resistencia específica de la aleación en μΩ-cm.*
*$S_i \rightarrow$ porcentaje de silicio.*
*Un aumento de la resistencia se traduce en una notable disminución de dichas pérdidas.*

***OTROS MATERIALES FERROMAGNÉTICOS:***

*Surgieron otros tipos de aleaciones que se dividen en materiales blandos que pierden fácilmente su magnetismo y materiales duros que pierden difícilmente su magnetismo y que se emplean especialmente en imanes permanentes. Entre éstos materiales destaca el Alnico, una aleación de aluminio, níquel y cobalto. El permalloy y el numetal tienen una permeabilidad muy elevada.*

*En diferentes equipos de comunicaciones en cambio se requieren materiales de permeabilidad sumamente constante: se obtuvieron entonces las aleaciones perminvar y conpernik.*

*Finalmente los materiales magnéticos se emplean para imanes permanentes en instrumentos y están sujetos frecuentemente a campos alternos, cambios de temperatura y esfuerzos mecánicos que no deben desde luego modificar sus características magnéticas.*

*La propiedad principal que deben tener es un alto magnetismo remanente y una alta fuerza coercitiva. También el producto* $(BH)_{máx}$ *conviene que sea alto.*

***LAS FERRITAS***

*Las ferritas son materiales no metálicos que responden a la fórmula general* $MeFe_2O_4$*, donde Me representa un metal bivalente.*
*Con las ferritas puede hacerse polvo, que luego mediante procesos metalúrgicos se forman los núcleos de la forma requerida.*
*Estos materiales se emplean para altas frecuencias porque tienen muy alta resistividad y por consiguiente sus pérdidas por corrientes parásitas son practicamente nulas; también sus pérdidas por histéresis son sumamente bajas. Tienen por lo tanto gran aplicación en electrónica.*
*Se fabrican bajo diferentes nombres, como por ejemplo: Ferroxcube, Ferramic, Ceramag, Crolite, etc.*

***LOS MATERIALES ANTIMAGNÉTICOS:***

*Estos materiales en realidad poseen un ferromagnetismo muy pequeño* ($\mu_r$*=1.1-1.4) por esa razón se les puede emplear como "Aislantes Magnéticos", cuando se desea aislar un circuito magnético de otras piezas metálicas. Este es el caso por ejemplo de los pernos de amarre de los núcleos de los transformadores. Las aleaciones antimagnéticas empleadas en la práctica son dos:*
*El acero al manganeso (12% de manganeso) y el acero níquel. En ciertos casos se le añade un poco de cadmio (3.8%) para mejorar las características mecánicas del acero.*

# *CAPÍTULO II*
# *EXCITACIÓN DE ESTRUCTURAS FERROMAGNÉTICAS CON CORRIENTE DIRECTA*

## *2.1 INTRODUCCIÓN*

*Experimentalmente se ha comprobado que ciertos materiales al ser colocados en un campo magnético, éstos reaccionan con el campo y lo modifican. Este fenómeno es llamado magnetización y los materiales que exhiben ésta característica son llamados materiales magnéticos. Estos materiales se clasifican en tres grupos: diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos. La mayoría de los aparatos electromagnéticos se construyen de materiales ferromagnéticos. Estos materiales son aleaciones de hierro y de algunos otros metales.*

*Se supondrá que la corriente en la bobina de excitación es invariante con el tiempo, excepto durante el período de conexión ó desconexión de la excitación.*

*Si como núcleo tenemos al vacío u otro material no magnético es posible un cálculo directo de la reluctancia ($\mu_o$=cte).*

*En estructuras hechas de material ferromagnético no puede hacerse un cálculo directo, ya que la permeabilidad es una función de la densidad de flujo (empleo de métodos gráficos).*

## *2.2 PROPIEDADES DE LOS MATERIALES FERROMAGNETICOS*

1) *Llegan a magnetizarse fuertemente en la misma dirección del campo magnético donde están colocados.*
2) *La densidad de flujo en los materiales ferromagnéticos varía en forma no lineal con la intensidad magnética, con excepción de pequeños rangos donde la variación es lineal.*
3) *Los materiales ferromagnéticos presentan saturación, histéresis y retentividad.*

*Considerando un Toroide:*

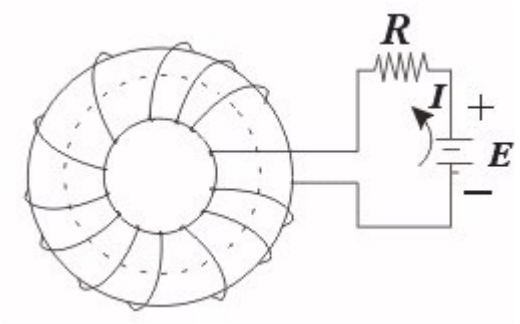



***Figura** 2.2.1*

*El espacio encerrado está lleno de algún material ferromagnético y la misma corriente pasa a través del embobinado.*

*Suponiendo que el espacio encerrado es el vacío ($\mu_o$), la densidad del flujo dentro del Toroide, está dado por la expresión:*

$$B = \frac{\mu_o NI}{\lambda_m} + XH \quad .....(2-1)$$

$$B = \frac{\mu_o NI}{\lambda_m} + \beta \quad .....(2-2)$$

*$\beta$ es la densidad de flujo intrínseco.*
*También:*

$$\beta = XH \quad .....(2-3)$$

$$H = \frac{NI}{\lambda_m} \quad .....(2-4)$$

*Para materiales ferromagnéticos X es una cantidad variable y X>>1. Entonces en forma general:*

$$B = \mu_o H + XH = \mu H \quad .....(2-5)$$

*Donde:* $\mu = \mu_0 + X$, *llamada permeabilidad*

$[\mu] = \dfrac{Webers}{amp-vuelta-m}$, *es mucho + grande que* $\mu_0$

*Definimos una cantidad sin dimensión $\mu_r$ llamado permeabilidad relativa*

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} \quad .....(2-6)$$

*La variación de $\mu$ con respecto a H para un material ferromagnético típico es como se muestra en la figura.*

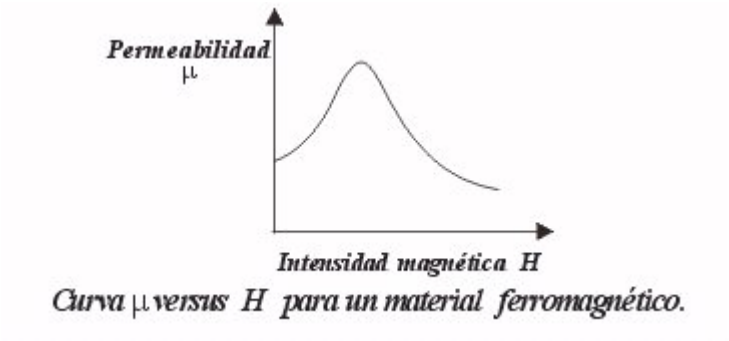



***Figura** 2.2.2*

***a) <u>Saturación</u>:***

*B varía linealmente con H para valores pequeños de H, si H tiende a incrementarse la variación de B gradualmente decrecerá. Para valores grandes de H la curva caerá es decir aunque H crezca rápidamente B prácticamente se mantendrá sin incrementarse. Esta característica es conocida como saturación.*

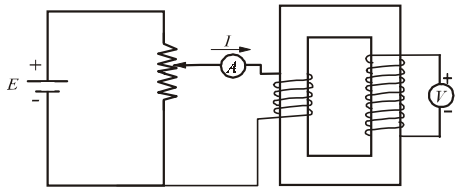



**Figura** *2.2.3*

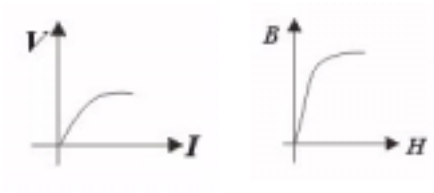



**Figura** *2.2.4*

**b) <u>Histéresis</u>:**

*Supongamos un medio lleno de material ferromagnético sujeto a una magnetización cíclica. Supondremos que el material está en un estado neutro ésto es que no está magnetizado. La corriente en el embobinado es cero y ésta condición es representada por el punto* ***o****. Aumentamos la intensidad magnética H al incrementar la corriente en el embobinado de excitación, la densidad de flujo B se encuentra a lo largo de la curva* ***ob****, entonces para:*

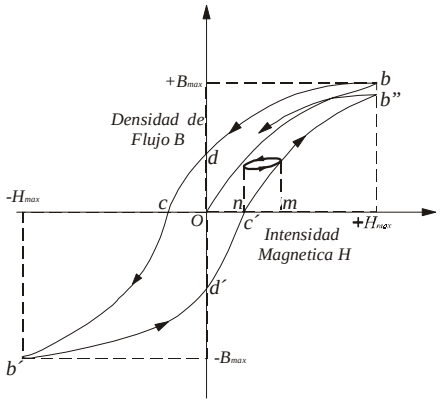



**Figura** *2.2.5*

$$H_{\text{máx}} \rightarrow B_{\text{máx}}$$

*Luego disminuimos gradualmente la corriente magnetizante (H), la densidad de flujo a lo largo de la curva bd es diferente, vemos que para un valor específico de H el valor de B es grande, cuando H se disminuye que cuando se incrementa. Se dice entonces que el flujo se retrasa con respecto a la intensidad magnética. Esta característica de los materiales ferromagnéticos es conocida como HISTÉRESIS.*

*Si se hace circular la corriente en dirección opuesta y es incrementada gradualmente, el material magnético se magnetizará en dirección opuesta.*

*La "df" B varía a lo largo de la curva de* ***dcb'****. La intensidad magnética* ***oc*** *es llamada fuerza coercitiva o coercitividad para este valor de H la densidad de flujo es cero. En el punto b' para -Hmax→ -Bmax.*

*Si gradualmente se disminuye la "H" la densidad de flujo varia a lo largo de la curva* ***b'd'b''*** *debido a la histéresis. El punto b'' difiere de b por una pequeña diferencia.*

*Si el material es sujeto a ciclos repetidos de magnetización la curva B vs H formará finalmente un anillo cerrado, éste anillo es conocido como el anillo ó ciclo de histéresis. La amplitud de B depende de la amplitud de H y la forma del anillo depende del material ferromagnético usado. El área del anillo de histéresis es una medida del calor disipado en el material debido al ciclo de magnetización e histéresis.*

***c) Retentividad:***

*Es la tendencia del material magnético de retener algo de magnetismo aún después de quitar la excitación. La ordenada* ***od*** *es la densidad de flujo residual.*

- ***Remanencia****: es la densidad de flujo que permanece en un material magnético después de haber suprimido a la fuerza de magnetización externa.*
- ***Retentividad****: puede ser considerada como el valor máximo de la remanencia.*
- ***Anillos secundarios o auxiliares****: se origina cuando se decrece la corriente ligeramente y regresa posteriormente a su valor original.*

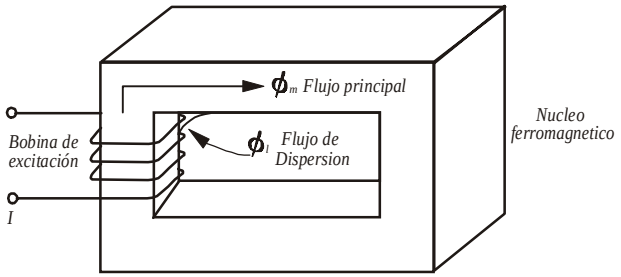
## *2.3 CIRCUITOS APROXIMADOS DE APARATOS ELECTROMAGNÉTICOS*

*La técnica de reemplazar los aparatos por circuitos está basada en las siguientes suposiciones:*

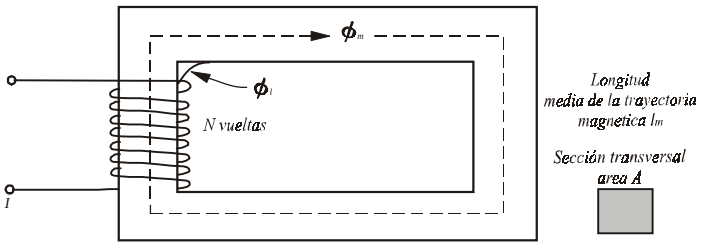
*a) La configuración geométrica del aparato es simétrico a ciertos ejes o planos de tal forma que puede ser representado por un diagrama esquemático.*

*b) Debido a la alta permeabilidad del material ferromagnético el flujo magnético se limita casi totalmente a las trayectorias de alta permeabilidad. Los circuitos ferromagnéticos no son lineales porque la permeabilidad del medio es una variable y es función de la densidad de flujo magnético en la estructura. Generalmente el $\mu$ de materiales ferromagnéticos es de $10^3$ a $10^4$ veces $\mu_0$.*

*Ejemplo de circuitos aproximados de aparatos electromagnéticos.*




*(A)*




*(B)*

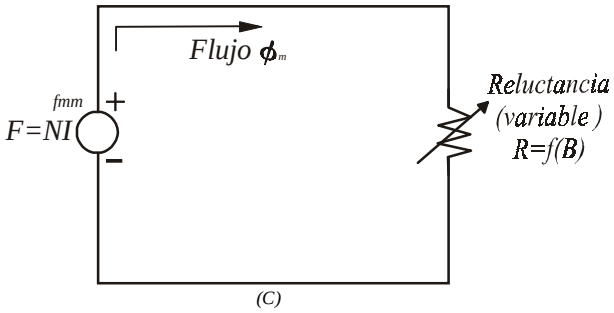



***Figura** 2.3.1*

*(A) Estructura magnética de un reactor o transformador de núcleo de hierro. (B)Diagrama esquemático de la estructura representada en (A). (C)Representación del dispositivo de un circuito magnético.*

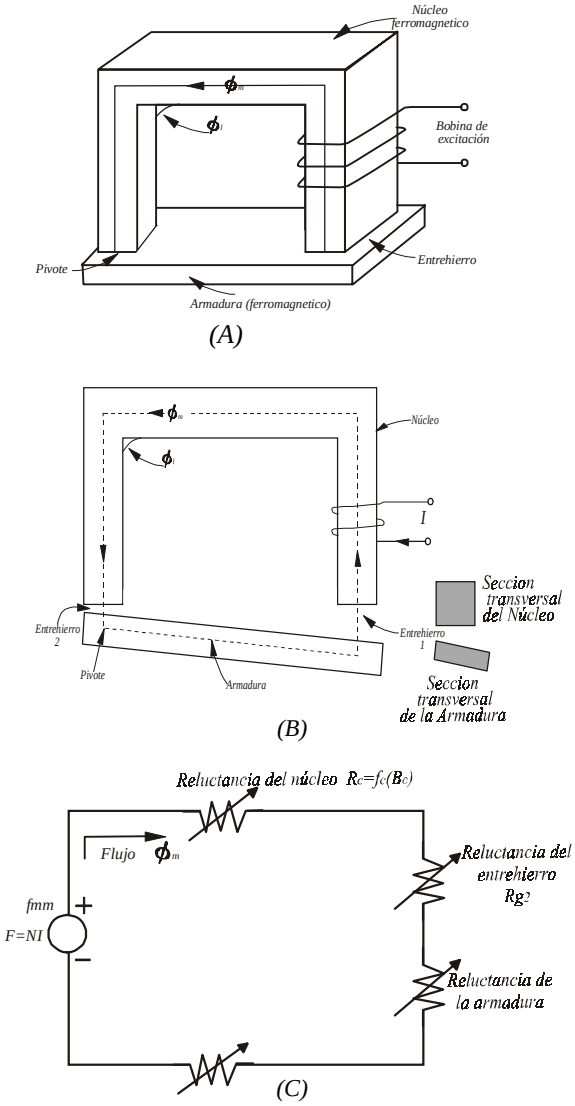



***Figura** 2.3.2*

*(A) Estructura magnética de un relevador electromagnético. (B) Diagrama esquemático de la estructura representada en (A). (C) Representación del dispositivo de un circuito magnético*

## 2.4 MÉTODOS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS FERROMAGNÉTICOS

*Los siguientes principios forman las bases de los diferentes métodos de análisis de circuitos ferromagnéticos:*

*a) Las dimensiones de la estructura son tales que la "B" en cualquier sección transversal de la estructura puede ser considerada uniforme.*

$$\Rightarrow \phi = BA \quad .....(2-7)$$

*b) La longitud media de la trayectoria magnética puede ser usada en todos los cálculos.*

*c) En un circuito magnético alrededor de una trayectoria cerrada la $\sum$ algebraica de las elevaciones de potencial magnético es igual a la sumatoria de las caídas de potencial.*

*En general tenemos:*

$$Fmm = NI = \sum_j H_j \lambda_{jm} \quad .....(2-8)$$

*Donde:*

$\lambda_{jm}$ *= es la longitud media de la trayectoria magnética de la sección j en el circuito serie.*

$H_j$ *= es la intensidad magnética en la misma sección.*

*d) En una superficie cerrada que envuelve al punto P, la $\sum$ de los flujos dirigidos hacia P es igual a la $\sum$ de los flujos saliendo de P.*

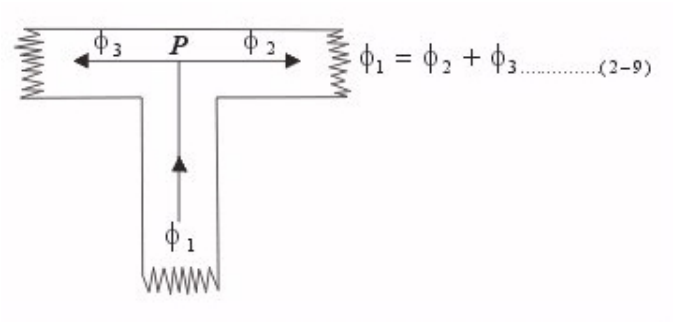



***Figura** 2.4.1*

***Factor de Apilamiento**: los flujos variables en el tiempo inducen corrientes en el núcleo ferromagnético y ocasionan pérdidas de energía debido al calentamiento. Esta pérdida de energía se reduce al mínimo al construir el núcleo en forma laminar, y aislando cada lámina por tratamiento de sus superficies ó revistiéndolas de papel impregnado en aceite.*

*La relación del área efectiva al área total de la sección transversal es llamada factor de apilamiento.(f.a.)*

$$\boxed{0.75 \leq f.a. \leq 0.95}$$ *generalmente*

## *2.5 ENTREHIERROS EN CIRCUITOS FERROMAGNÉTICOS*

*Los entrehierros pueden ser inherentes o introducidos intencionalmente.*
*Ejm:*

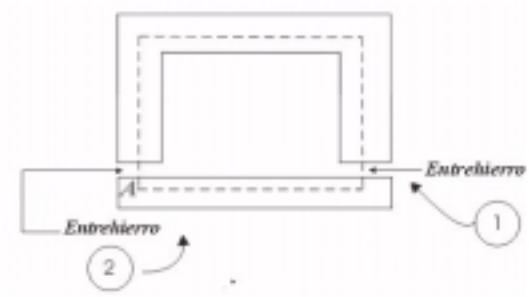



***Figura** 2.5.1*

*$g_1$ Es necesario y es introducido intencionalmente*
*$g_2$ Es inherente en la construcción del relevador y es ocasionado por la presencia de un pivote.*

*Es necesario un núcleo ferromagnético para obtener una gran inductancia, pero para que ésta sea menos sensitiva a los cambios de corriente en la bobina de excitación, se introduce intencionalmente un entrehierro.*
*En todos los casos la labor de los entrehierros es introducir trayectorias de otra reluctancia.*

### *a) Efectos Marginales y de Dispersión de los Entrehierros*

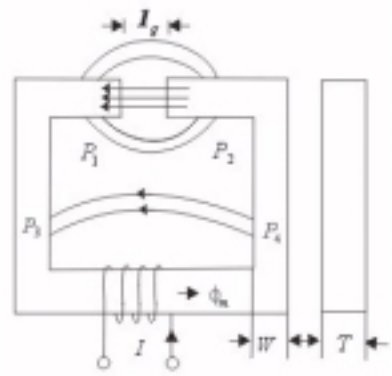



***Figura** 2.5.2*

*Al tener la gran reluctancia del entrehierro, la diferencia de potencial magnético entre los puntos $P_2$ y $P_1$ puede ser lo suficientemente grande (aún si $\phi$ es pequeño) para que se esparzan las líneas de flujo que están cruzándolo, esto es llamado efecto marginal.*
*El salto de flujo de $P_4$ a $P_3$ recibe el nombre de flujo de dispersión. El efecto marginal hace que la "B" en el entrehierro sea menor que la "B" en la porción ferromagnética del núcleo, porque el área efectiva de la sección transversal del entrehierro es más grande que el área de la sección transversal de la porción ferromagnética del núcleo.*

*En la práctica se usan fórmulas empíricas para el cálculo del entrehierro efectivo:*

*a.1)* ***Caso I:*** *Los lados opuestos del entrehierro son paralelos y tienen las mismas dimensiones en su sección transversal además lg<0.20T y lg<0.20W (entrehierro corto)*

*Entonces el área efectiva Ag será:*

$$A_g = (W + \lambda_g)(T + \lambda_g) \quad .....(2-10)$$

$$A_g = \pi\left(\frac{d + \lambda_g}{2}\right)^2 \quad .....(2-11)$$

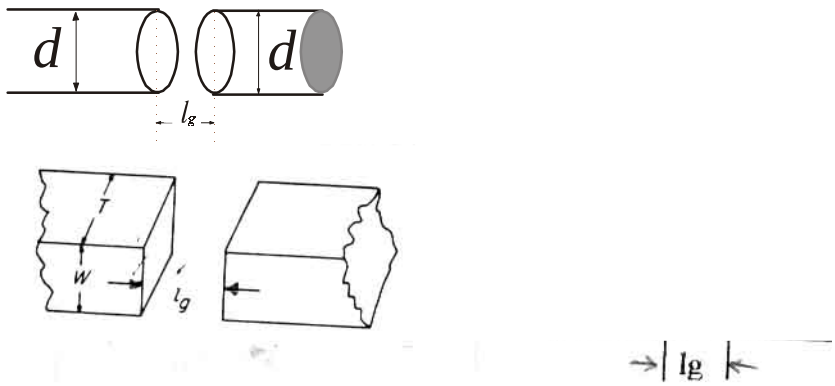
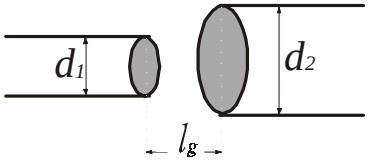



***Figura*** *2.5.3*

*a.2)* ***Caso II:*** *Los lados opuestos del entrehierro son paralelos, pero en su sección transversal tienen diferentes dimensiones.*

$$A_g = (W + 2\lambda_g)(T + 2\lambda_g) \quad .....(2-12)$$

** Si*




$$* \quad A_g = \pi\left(\frac{d_1 + 2\lambda_g}{2}\right)^2$$

***Figura*** *2.5.4*

# *PROBLEMAS RESUELTOS*
# *CAPITULO II*

# *EXCITACIÓN DE CIRCUITOS MAGNÉTICOS CON DC*

***PROBLEMA N° 2.1:*** *Se debe diseñar un inductor que usa el núcleo magnético de la figura. El núcleo tiene un área uniforme de la sección transversal Ac = 0,75pulg$^2$ y su longitud promedio lc = 8 pulg. Tiene un entrehierro ajustable de longitud g y tendrá un devanado de N vueltas.*

*a) Calcular g y N tales que la inductancia sea 15 mH y de modo que el inductor pueda trabajar con corrientes máximas de 5A sin saturarse. Suponga que se presenta la saturación cuando la densidad máxima del flujo en el núcleo es mayor que 1,7 T y que dicho núcleo tiene permeabidad $\mu = 3000\mu_o$ .*

*b) Para una corriente en la inductancia de 5A, calcule: i) La energía magnética almacenada en el entrehierro y ii) La energía magnética almacenada en el núcleo.*

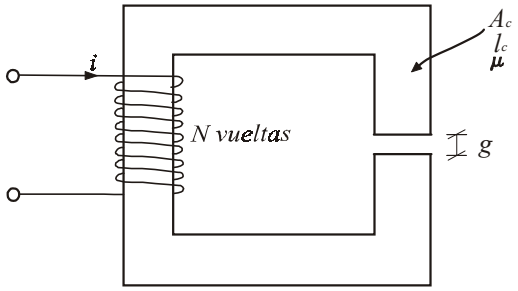



***Figura*** *P2.1.1*

*SOLUCIÓN:*

*a) Calculando*:

$$\Re_g = \frac{g}{\mu_o \times A_c} = \frac{g}{4\pi \times 10^{-7} \times 0{,}75 \times \left(2{,}54 \times 10^{-2}\right)^2} = 1{,}645 \times 10^9\, g$$

$$\Re_c = \frac{l_c}{\mu \times A_c} = \frac{8 \times 2{,}54 \times 10^{-2}}{3000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0{,}75 \times \left(2{,}54 \times 10^{-2}\right)^2}$$

$$\Re_c = 111{,}395 \times 10^3\, amp - vuelta / Wb$$

$$L = \frac{N^2}{\Re_{eq}} = \frac{N^2}{\Re_g + \Re_c} \qquad ; \qquad B = \frac{\lambda}{N \times A_c} = \frac{L \times I}{N \times A_c}$$

$$N = \frac{L \times I}{B \times A_c} = \frac{15 \times 10^{-3} \times 5}{1{,}7 \times 0{,}75 \times \left(2{,}54 \times 10^{-2}\right)^2} = 91{,}17665 vueltas$$

$$\Re_g = \frac{N^2}{L} - \Re_c = \frac{91{,}2^2}{15 \times 10^{-3}} - 111{,}395 \times 10^3 = 443{,}101 \times 10^3 \, amp - vuelta / Wb$$

$$g = \frac{443{,}101 \times 10^3}{1{,}645 \times 10^9} = 2{,}694 \times 10^{-4} \, m.$$

b) i) $W_{gap} = \frac{B^2}{2 \times \mu_o} \times A_c \times g = \frac{1{,}7^2}{2 \times \mu_o} \times 0{,}75 \times \left(2{,}54 \times 10^{-2}\right)^2 \times 2{,}694 \times 10^{-4}$

$W_{gap} = 0{,}15 \, joules$

ii) $W_{nucleo} = \frac{B^2}{2 \times \mu} \times A_c \times l_c = \frac{1{,}7^2}{6000 \times \mu_o} \times 0{,}75 \times \left(2{,}54 \times 10^{-2}\right)^2 \times 8 \times 2{,}54 \times 10^{-2}$

$W_{nucleo} = 0{,}038 \, joules$

*Comprobando :*

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{15 \times 10^{-3} \times 5^2}{2} = 0{,}1875 \, joules$$

$$W_{total} = W_{gap} + W_{nucleo} = 0{,}188 \, joules$$

***PROBLEMA N° 2.2:*** *El circuito magnético de la figura , consiste de anillos de material magnético en un pila cuya altura es D . Si el hierro tiene una permeabilidad* $\mu = 750\mu_o$ *y omitiendo los efectos de dispersión magnética y abombamiento.*

*Calcule:*

*a) La longitud media lc del núcleo y el área de la sección transversal.*
*b) La reluctancia del núcleo y del entrehierro.*
*Para N = 75 vueltas, calcule:*
*c) La inductancia.*
*d) La corriente necesaria para obtener un B en el entrehierro igual a 1,2 T.*
*e) La encadenamiento del flujo en la bobina.*

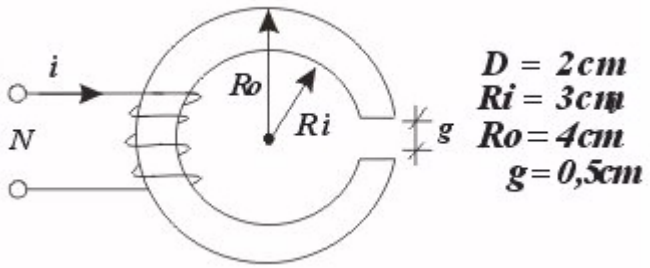



***Figura*** *P2.2.1*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$l_c = 2\pi \times radio_{medio} - g = 2\pi \times \left(\frac{Ri + Ro}{2}\right) - g = \pi \times 7 \times 10^{-2} - 0{,}5 \times 10^{-2} = 0{,}2149m$$

$$A_c = D \times (Ro - Ri) = 2 \times 10^{-2} \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-4}\, m^2$$

*b)*

$$\Re_c = \frac{l_c}{\mu \times A_c} = \frac{0{,}2149}{750 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 2 \times 10^{-4}} = 1{,}14 \times 10^6\, amp - vuelta / Wb$$

$$\Re_g = \frac{g}{\mu_o \times A_c} = \frac{0{,}5 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 2 \times 10^{-4}} = 19{,}8944 \times 10^6\, amp - vuelta / Wb$$

*c) N=75* $\quad LI = N\phi_m \quad$ *entonces* $\quad NI = \phi_m \Re_{eq}$

*Por lo tanto:* $L = \dfrac{N^2}{\Re_{eq}}$

*Donde* $\Re_{eq} = \Re_c + \Re_g = 21{,}0344 \times 10^6\, amp - vuelta / Wb$

$$L = \frac{75^2}{\Re_{eq}} = 2{,}6742 \times 10^{-4}\, H$$

*d)*

$$B = \frac{\phi_m}{A_c} = \frac{N \times I}{(\Re_c + \Re_g) \times A_c}$$

*Por lo tanto:*

$$I = \frac{B \times A_c \times (\Re_c + \Re_g)}{N} = \frac{1{,}2 \times 2 \times 10^{-4} \times 21{,}0344 \times 10^6}{75}$$

$$I = 67{,}31A$$

*e)* $\lambda = N \times \phi_m = N \times B \times A_c = 75 \times 1{,}2 \times 2 \times 10^{-4} = 0{,}018Wb$

***PROBLEMA N° 2.3:*** *Se propone un mecanismo de almacenamiento de energía que consiste de una bobina arrollada a un cuerpo toroidal grande no magnético ($\mu = \mu_o$). Tiene N vueltas, cada uno de sección circular de radio* **a**. *El radio del toroide es* **r,** *medido al centro de cada espira circular. La geometría de este dispositivo es tal que se puede considerar que el campo magnético es cero en cualquier lugar fuera del toroide. Suponiendo que a<<r, se puede considerar que el campo H dentro del toroide está dirigido alrededor de éste, y tiene magnitud uniforme:*

$$\boldsymbol{H = \frac{N.i}{2\pi.r}}$$

*a) Calcule la inductancia L de la bobina.*
*b) Se va a cargar la bobina a una B = 2T. Calcule la Energía magnética total almacenada en el toroide cuando se alcance ésta densidad de flujo.*
*c) Si se va a cargar la bobina a una razón uniforme, esto es* $\dfrac{di}{dt} = constante$

*calcule el voltaje terminal necesario para lograr la densidad de flujo necesaria en 25 seg. Suponga que la resistencia de la bobina es despreciable.*

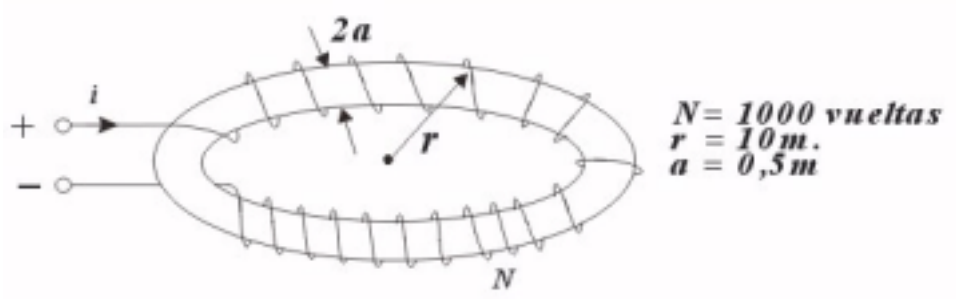



**Figura** *P2.3.1*

*SOLUCIÓN:*

a) $\phi = B \times A_c = \dfrac{\mu_o \times N \times i}{2\pi . r} \times \pi \times a^2$

*pero* $L = \dfrac{N \times \phi}{i} = \dfrac{\mu_o \times N^2 \times a^2}{2r}$

*Entonces:*

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1000^2 \times 0{,}5^2}{2 \times 10} = 15{,}707 mH$$

b) *Para B=2T :* $i = \dfrac{2\pi \times r \times B}{\mu_o \times N} = \dfrac{2\pi \times 10 \times 2}{4\pi \times 10^{-7} \times 1000} = 10^5\ A$

*De esto tenemos:*

$$W_\phi = \frac{1}{2} L \times I^2 = \frac{1}{2} \times 15{,}707 \times 10^{-3} \times 10^{10} = 78{,}535 \times 10^6 \text{ joules}$$

c) $v = L.\dfrac{di}{dt} = 15{,}7 \times 10^{-3} \times \dfrac{10^5}{25} = 62{,}8V$

**PROBLEMA N° 2.4:** *El circuito magnético simétrico de la figura tiene 3 devanados. Los devanados A y B tienen cada uno N vueltas y están devanados en las 2 piernas inferiores del núcleo.*

a) *Calcule la inductancia propia de cada uno de los devanados.*

b) *Calcule las inductancias mutuas entre los 3 pares de devanados.*

c) *Calcule el voltaje inducido en el devanado 1 por corrientes variables en el tiempo $i_A$ (t) e $i_B$ (t) en los devanados A y B. Muestre que se puede usar este voltaje para medir el desequilibrio entre dos corrientes senoidales de la misma frecuencia.*

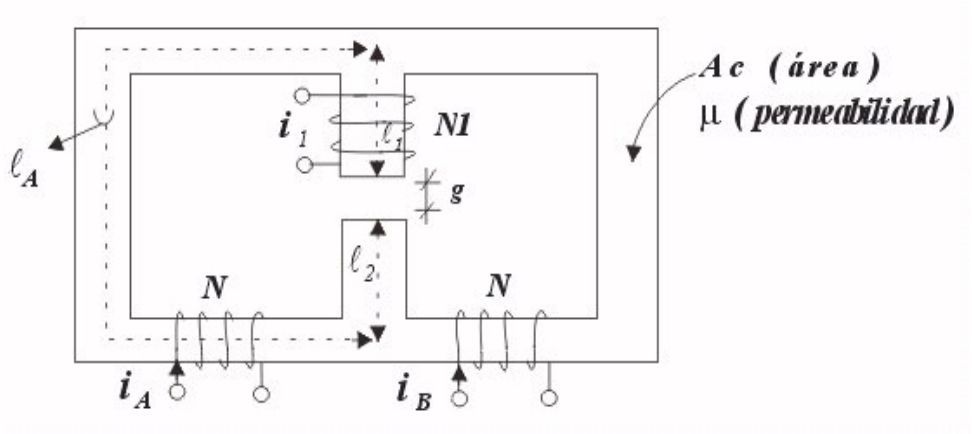



***Figura*** *P2.4.1*

*SOLUCIÓN:*

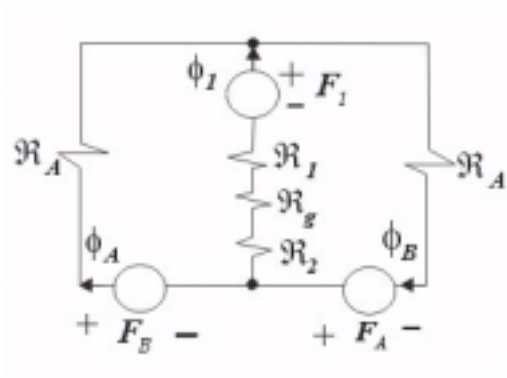



***Figura*** *P2.4.2*

*a)* $L_{AA} = L_{BB} = \dfrac{N^2}{\Re_{eq}}$ *donde* $\Re_{eq} = \Re_A + \Re_A // (\Re_1 + \Re_2 + \Re_g)$

*Entonces:*

$$L_{AA} = L_{BB} = \frac{N^2}{\Re_A + \Re_A // (\Re_1 + \Re_2 + \Re_g)} = \frac{N^2 \times \mu \times A_c}{\lambda_A} \times \left( \frac{\lambda_A + \lambda_1 + \lambda_2 + \dfrac{\mu \times g}{\mu_o}}{\lambda_A + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\dfrac{\mu \times g}{\mu_o}} \right)$$

$$L_{11} = \frac{N_1^{\,2}}{\Re_1 + \Re_2 + \Re_g + \dfrac{\Re_A}{2}} = \frac{N_1^{\,2} \times \mu \times A_c}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dfrac{\lambda_A}{2} + \dfrac{\mu \times g}{\mu_o}}$$

*b)*

$$L_{AB} = L_{BA} = \frac{N^2 \times (\Re_1 + \Re_2 + \Re_g)}{\Re_A \times [\Re_A + 2\times(\Re_1 + \Re_2 + \Re_g)]} = \frac{N^2 \times \mu \times A_c}{\lambda_A} \times \left[ \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu \times g}{\mu_o}}{\lambda_A + 2\times\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu \times g}{\mu_o}\right)} \right]$$

$$L_{1A} = L_{A1} = L_{B1} = -L_{1B} = \frac{-N_1 \times N}{\Re_A + 2\times(\Re_1 + \Re_2 + \Re_g)} = \frac{-N_1 \times N \times \mu \times A_c}{\lambda_A + 2\times\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu \times g}{\mu_o}\right)}$$

*c)* $v_1 = \dfrac{d(L_{A1}.i_A + L_{B1}.i_B)}{dt} = L_{A1} \times \dfrac{d(i_A + i_B)}{dt}$

***PROBLEMA N° 2.5 :*** *El circuito magnético de la figura , tiene dos devanadas y dos entrehierros. Se puede suponer que el núcleo tiene permeabilidad infinita:*

*a) Suponiendo que por la bobina 1 pasa una corriente $I_1$ y por la bobina 2 la corriente es cero, calcule i) la densidad de flujo magnético en cada uno de los entrehierros, ii) los encadenamientos de flujo del devanado 1, y iii) los encadenamientos de flujo del devanado 2.*
*b) Repita a) suponiendo que en el devanado 1 la corriente es cero y en el devanado 2 es $I_2$.*
*c) Repita a) suponiendo que la corriente en el devanado 1 es $I_1$ y la del devanado 2 es $I_2$.*
*d) Calcule las inductancias propias de los devanados 1 y 2, y la inductancia mutua entre devanados.*

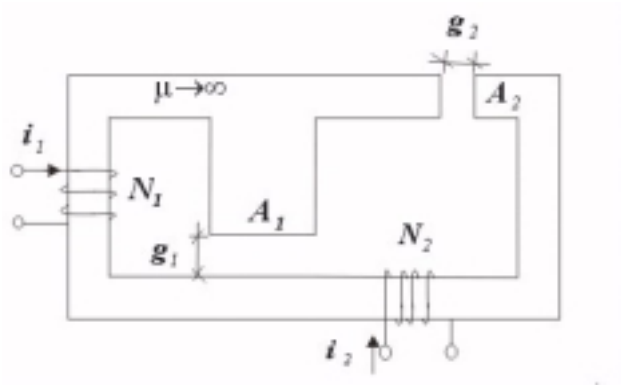
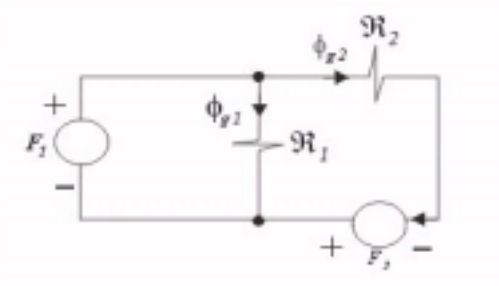



***Figura*** *P2.5.1*

*SOLUCION:*

*Por ser considerado $\mu \to \infty$, entonces solo consideraremos las reluctancias del entrehierro:*




$$Ag_1 = A_1 \quad Ag_2 = A_2$$

$$\Re_1 = \frac{g_1}{\mu_o \times Ag_1} \qquad \Re_2 = \frac{g_2}{\mu_o \times Ag_2}$$

$$F_1 = N_1 \times I_1 \qquad F_2 = N_2 \times I_2$$

***Figura*** *P2.5.2*

*a)*

$$F_2 = 0 \qquad Entonces: \quad \phi g_1 = \frac{F_1}{\Re_1} \qquad \phi g_2 = \frac{F_1}{\Re_2}$$

*i)* $$Bg_1 = \frac{\phi g_1}{A_1} = \frac{\mu_o \times N_1 \times I_1}{g_1} \quad ; \quad Bg_2 = \frac{\phi g_2}{A_2} = \frac{\mu_o \times N_1 \times I_1}{g_2}$$

*ii)* $$\lambda_1 = N_1 \times (\phi g_1 + \phi g_2) = N_1^2 \times I_1 \times \mu_o \times \left( \frac{A_1}{g_1} + \frac{A_2}{g_2} \right)$$

*iii)* $$\lambda_2 = N_2 \times \phi g_2 = \frac{N_2 \times \mu_o \times N_1 \times I_1 \times A_2}{g_2}$$

*b)* $$F_1 = 0 \qquad Entonces: \quad \phi g_1 = 0 \qquad \phi g_2 = \frac{F_2}{\Re_2}$$

*i)* $$Bg_1 = 0 \quad ; \quad Bg_2 = \frac{\phi g_2}{A_2} = \frac{N_2 \times I_2 \times \mu_o}{g_2}$$

*ii)* $$\lambda_1 = N_1 \times \phi g_2 = \frac{N_1 \times N_2 \times I_2 \times \mu_o \times A_2}{g_2}$$

*iii)* $$\lambda_2 = N_2 \times \phi g_2 = \frac{N_2^{\,2} \times I_2 \mu_o \times A_2}{g_2}$$

c*)* *Usando superposición:*

*i)* $$Bg_1 = \frac{\mu_o \times N_1 \times I_1}{g_1} \quad ; \quad Bg_2 = \frac{\mu_o}{g_2} \times \left( N_1 \times I_1 + N_2 \times I_2 \right)$$

*ii)* $$\lambda_1 = \mu_o \times N_1^{\,2} \times \left( \frac{A_1}{g_1} + \frac{A_2}{g_2} \right) \times I_1 + \frac{\mu_o \times N_1 \times N_2 \times A_2}{g_2} \times I_2$$

*iii)* $\lambda_2 = \dfrac{\mu_o \times N_1 \times N_2 \times A_2}{g_2} \times I_1 + \dfrac{\mu_o \times N_2^{\,2} \times A_2}{g_2} \times I_2$

*d)*

$$L_{11} = \mu_o \times N_1^{\,2} \times \left( \frac{A_1}{g_1} + \frac{A_2}{g_2} \right) \qquad L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 \times N_1 \times N_2 \times A_2}{g_2}$$

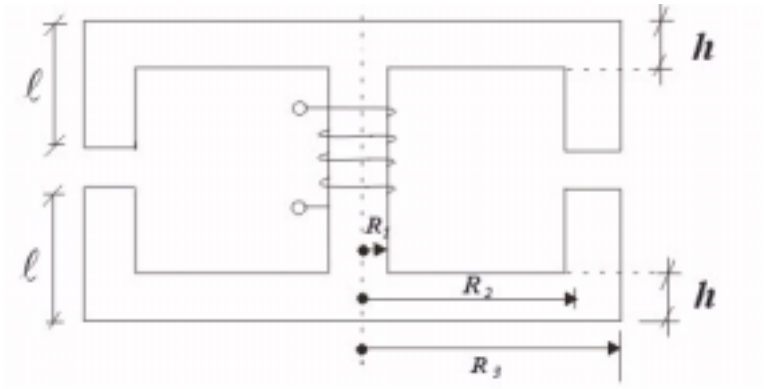
$$L_{22} = \frac{\mu_o \times N_2^{\,2} \times A_2}{g_2}$$

***PROBLEMA N° 2.6 :*** *Para el circuito suponga que la permeabilidad del núcleo es* $\mu = 2000\mu_0$ *y que N = 100 vueltas . Se especifican las dimensiones siguientes.:*

$R_1$*= 1 cm* $R_2$ *= 3 cm.* $\ell$ *=2,5 cm*

*H = 1 cm* *g =0,2 cm*

*a) Calcule los valores de h y R3 de modo que la densidad de flujo dentro del núcleo sea uniforme.*
*b) Calcule la inductancia del devanado*
*c) El núcleo va a trabajar a una densidad máxima de flujo igual a 1,5 T y a una frecuencia de 60 Hz. Calcule los valores correspondientes máximo y en rms del voltaje inducido en el devanado.*
*d) Repetir c) para una frecuencia de 50 Hz.*

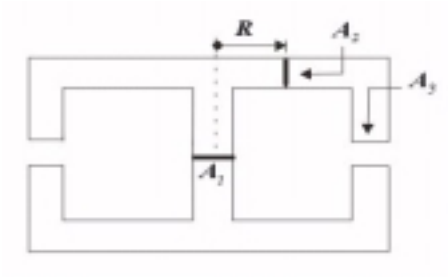



*SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN CIRCUITO MAGNÉTICO DE SISTEMA CIRCULAR*

***Figura*** *P2.6.1*

*SOLUCIÓN:*

*a) Para que la densidad de flujo dentro del núcleo sea uniforme, se debe tener la máxima área de sección transversal.*




$$A_1 = A_3$$
$$\pi R_1^2 = \pi ( R_3^2 - R_2^2 )$$
$$R_3 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = 3{,}1623\ cm$$

**Figura** *P2.6.2*

*Se toma* $R = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$ *para mantener el* B *uniforme en la pierna superior y en la pierna inferior:*

$$A_2 = A_1$$
$$2\pi Rh = \pi R_1^2$$
$$h = \frac{R_1^2}{2 \times R} = \frac{R_1^2}{R_1 + R_2} = 0{,}25\ cm$$

*b)*

$$\Re g = \frac{g}{\mu_o \times Ag} = \frac{g}{\mu_o \pi ( R_3^2 - R_2^2 )}$$
$$\Re g = \frac{0{,}2x10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times \pi \times ( 0{,}031623^2 - 0{,}03^2 )} = 5{,}0653 \times 10^6\ amp - vuelta\ /\ Wb$$

*En la pierna central:*

$$\Re_c = \frac{\lambda_c}{\mu \times A_c} = \frac{2\lambda + g - h}{2000\mu_o \times \pi \times R_1^2} = \frac{4{,}95x10^{-2}}{2000\mu_0 \times \pi \times 0{,}01^2} = 6{,}26925x10^4\ amp - vuelta / Wb$$

*En la pierna superior e inferior:*

$$\Re_T = \Re_B = \frac{R_2 + \dfrac{R_3 - R_2}{2}}{\mu \times A_2} = \frac{R_2 + R_3}{2 \times \mu \times A_2} = \frac{R_2 + R_3}{2\mu \times 2\pi \times R \times h} = \frac{R_2 + R_3}{2\mu \times \pi \times h( R_1 + R_2 )}$$
$$\Re_T = \Re_B = 3{,}9x10^4\ amp - vuelta / Wb$$

*En la pierna extrema:*

$$\Re_o = \frac{2\lambda - h}{\mu \times \pi \times (R_3^2 - R_2^2)} = \frac{4{,}75x10^{-2}}{\mu \times \pi \times (R_3^2 - R_2^2)} = 6{,}015 \times 10^4 \; amp-vuelta/Wb$$

$$\Re eq = \Re_C + \frac{\Re_B + \Re_T + \Re_g + \Re_o}{2} = \Re_C + \Re_B + \frac{\Re_g + \Re_o}{2} = 266{,}44175 \times 10^4 \; amp-vuelta/Wb$$

$$L = \frac{N^2}{\Re eq} = \frac{100^2}{\Re eq} = 3{,}753 mH$$

*c)*

$$\phi_{pico} = B \times A_1 = B \times \pi R_1^2 = 1{,}5 \times \pi \times 0{,}01^2 = 4{,}7124 \times 10^{-4} Wb$$

$$Vpico = \omega \times N \times \phi_{pico} \quad ya\ que\ por\ Faraday : Vind = N \times \frac{d\phi}{dt}$$

$$Donde\ \phi = \phi_{pico} \times sen\omega t$$

$$\therefore Vpico = 2\pi \times 60 \times 100 \times 4{,}7124 \times 10^{-4}$$

$$Vpico = 17{,}765V$$

$$Vrms = \frac{Vpico}{\sqrt{2}} = 12{,}562V$$

*d)*

$$Vpico = 2\pi \times 50 \times 100 \times 4{,}7124 \times 10^{-4} = 14{,}8V$$

$$Vrms = 10{,}468V$$

***PROBLEMA N° 2.7 :*** *En la estructura magnética mostrada el flujo en la rama C es 101,25 × 10 $^{-6}$ Wb. El núcleo está hecho de hojas H-23 (0,5 mm) con f.a. = 0,90.*
*¿Encuentre la corriente en la bobina de excitación y la inductancia?*
*(hacer corrección por entrehierro y desprecie el flujo de dispersión)*

$\delta_B$= 1mm $\delta_C$ = 2mm N = 500 espiras

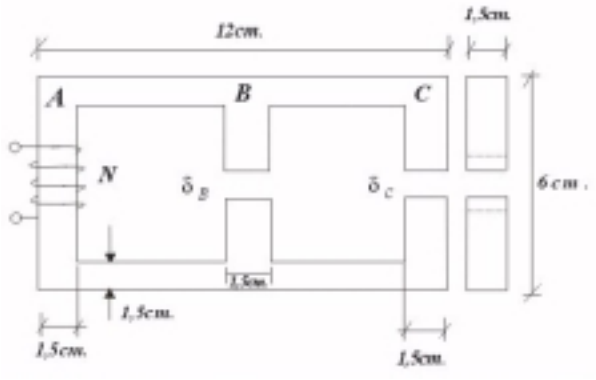
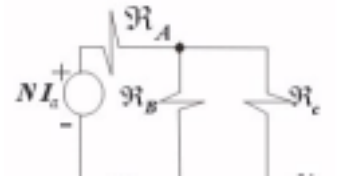



***Figura*** *P2.7.1*

*SOLUCIÓN:*



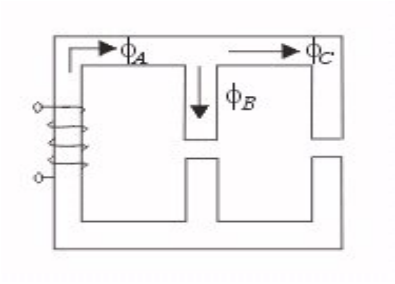
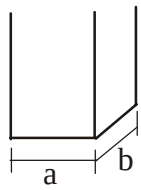



***Figura*** *P2.7.2*

***Figura*** *P2.7.3*

$$\phi_c = 101{,}25 \times 10^{-6}\, Wb$$
$$\phi_A = \phi_B + \phi_C$$
$$N_A \times I_A = H_A \times \lambda_A + H_B \times \lambda_B + H_{\delta_B} \times \delta_B \quad .....(1)$$
$$H_C \times \lambda_C + H_{\delta_C} \times \delta_C = H_B \times \lambda_B + H_{\delta_B} \times \delta_B \quad .....(2)$$
$$N_A \times I_A = H_A \times \lambda_A + H_C \times \lambda_C + H_{\delta_C} \times \delta_C \quad .....(3)$$
$$\lambda_A = (3{,}75 + 1{,}5) \times 2 + (6 - 1{,}5) = \lambda_C$$

$$Entonces: \quad \lambda_A = \lambda_C = 15cm = 0{,}15m$$
$$\lambda_B = (6 - 1{,}5) = 4{,}5cm = 0{,}045m$$
$$A_A = A_B = A_C = a \times n \times t = a \times b \times f.a = \frac{1{,}5}{100} \times \frac{1{,}5}{100} \times 0{,}9 = 2{,}025 \times 10^{-4}\, m^2$$




$$b_{geom} = \frac{n \times t}{f.a}$$

$$A_{\delta_B} = (a+\lambda_g)\times(b+\lambda_g) = \left(\frac{1,5+0,1}{100}\right)\times\left(\frac{1,5+0,1}{100}\right) = 2,56\times10^{-4}\,m^2$$

$$A_{\delta_C} = \left(\frac{1,5+0,2}{100}\right)\times\left(\frac{1,5+0,2}{100}\right) = 2,89\times10^{-4}\,m^2$$

$$B_C = \frac{\phi_C}{A_C} = \frac{101,25\times10^{-6}}{2,025\times10^{-4}} = 0,5Wb/m^2$$

*Luego de la curva* $B-H\ (H-23):\quad H_C \approx 90\ amp-vuelta/m$

*Con lo cual :*

$$\frac{B_{\delta_C}}{B_C} = \frac{A_C}{A_{\delta_C}}\ ;\ (\phi_C = \phi_{\delta_C})\ entonces:\ B_{\delta_C} = \frac{0,5\times2,025\times10^{-4}}{2,89\times10^{-4}} = 0,35Wb/m^2$$

$$\Rightarrow H_{\delta_C} = \frac{B_{\delta_C}}{\mu_o} = \frac{0,35}{4\pi\times10^{-7}} = 2,7852\times10^5\ amp-vuelta/m$$

*Reemplazando en (2) :*

$$H_C\times\lambda_C + H_{\delta_C}\times\delta_C = H_B\times\lambda_B + H_{\delta_B}\times\delta_B$$

$$90\times0,15 + 2,7852\times10^5\times\frac{2}{1000} = 0,045\times H_B + \frac{1}{1000}\times H_{\delta_B}$$

$$0,001\times H_{\delta_B} + 0,045\times H_B = 570,54$$

$$\Rightarrow \phi_B = \phi_{\delta_B}\quad de\ donde:\ B_B\times A_B = B_{\delta_B}\times A_{\delta_B}$$

$$B_B = \frac{2,56}{2,025}\times B_{\delta_B} = 1,2642B_{\delta_B}$$

| $10^{-3}H_{\delta_B}$ | $H_{\delta_B}$ | $B_{\delta_B}$ | $B_B = 1,264B_{\delta_B}$ | $H_B$ | $\lambda_B\times H_B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 570,5 | $570,5\times10^3$ | 0,7169 | 0,9062 | 135 | 6,075 |
| 564,5 | $564,5\times10^3$ | 0,7094 | 0,8967 | 132,5 | 5,9625 |

*Donde* $B_{\delta_B} = 4\pi\times10^{-7}H_{\delta_B}$. *$H_B$ se obtiene de la curva B-H del material una vez obtenido $B_B$*

$$\Rightarrow B_B = 0{,}89 Wb/m^2 \quad y \quad \phi_B = B_B \times A_B = 1{,}80225 \times 10^{-4} Wb$$

$$\phi_A = \phi_B + \phi_C = 2{,}81475 \times 10^{-4} Wb$$

$$B_A = \frac{\phi_A}{A_A} = 1{,}39 Wb/m^2 \text{ y de la curva } B-H \text{ obtenemos: } H_A = 500 amp-vuelta/m$$

*En (1) :*

$$N_A \times I_A = 500 \times 0{,}15 + 132{,}5 \times 0{,}045 + 564{,}5 \times 10^3 \times 10^{-3} = 645{,}4625 amp-vuelta$$

$$I_A = \frac{645{,}4625}{500} = 1{,}29 A$$

$$\text{Entonces: } \quad L = \frac{N_A \times \phi_A}{I_A} = \frac{500 \times 2{,}81475 \times 10^{-4}}{1{,}29} = 109{,}10 mH.$$

***PROBLEMA N° 2.8 :*** *La estructura ferromagnética de la figura, está compuesta de 30 láminas (H-23 ) de 0,35 mm de espesor con un factor de apilamiento de 0,92 posee 2 bobinas de igual número de vueltas y alimentadas con corriente continua .*

*a) Calcular el entrehierro necesario para tener un flujo de 1,21 x $10^{-4}$ Wb en el núcleo, sabiendo que la pendiente de la recta del entrehierro es 0,5. (despreciar el efecto de borde ).*

*b) La corriente necesaria para que su inductancia sea 0,5H*

*c) Calcular el entrehierro necesario para aumentar "L" en un 12,5 % (despreciar efecto de borde)*

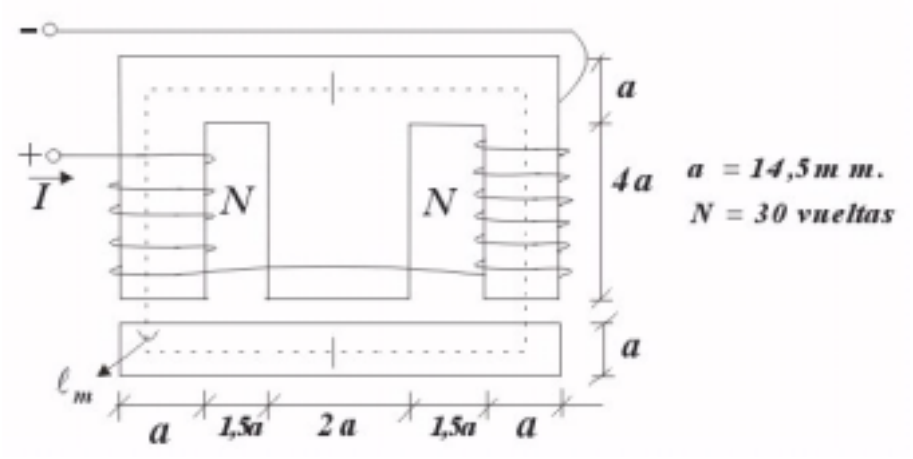



**Figura** *P2.8.1*

*SOLUCIÓN:*

*Podemos considerar el siguiente circuito:*

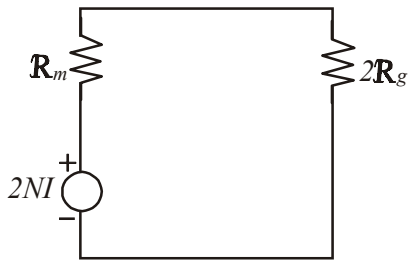



**Figura** *P2.8.2*

*De donde obtenemos las siguientes relaciones:*

$$2N \times I = H_m \times \lambda_m + 2B_m \times A_m \times \Re_g$$

$$\Rightarrow B_m = \frac{N \times I}{A_m \times \Re_g} - \frac{\lambda_m}{2A_m \times \Re_g} \times H_m$$

$$Considerando: B_m \times A_m = B_g \times A_g$$

$$donde\ el\ área\ A_m = A_g \Rightarrow B_m = B_g$$

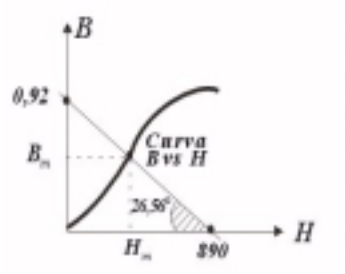
$$\phi = B_m \times A_m \qquad \lambda_m = 2 \times (5a + 6a) = 22a = 22 \times 14{,}5 \times 10^{-3}\, m = 0{,}319m$$

$$A_m = a \times n \times t = 14{,}5 \times 10^{-3} \times 30 \times 0{,}35 \times 10^{-3} = 1{,}5225 \times 10^{-4}\, m^2$$

$$\Rightarrow B_m = \frac{1{,}21 \times 10^{-4}}{1{,}5225 \times 10^{-4}} = 0{,}795 Wb/m^2$$

*Si $H_m$=0 entonces: $B_m$=$B_{mo}$*

$$B_{mo} = \frac{N \times I}{A_m \times \Re_g} \quad \Rightarrow \quad \Re_g = \frac{N \times I}{B_{mo} \times A_m} = \frac{30 \times I}{1{,}5225 \times 10^{-4} \times 0{,}92} = 214178{,}6 \times I$$




$$Si: B_m = 0 \Rightarrow H_m = H_{mo}$$

$$H_{mo} = \frac{2N \times I}{\lambda_m} \Rightarrow N \times I = \frac{890 \times 0{,}319}{2}$$

**Figura** *P2.8.3*

*a)*

$$N \times I = 141{,}955 amp-vuelta$$

$$I = \frac{141{,}955}{30} = 4{,}7318A \quad \Rightarrow \quad En(1): \Re_g = 1013450{,}42 amp-vuelta/Wb$$

$$Pero: \quad \Re_g = \frac{\lambda_g}{\mu_o \times A_g} \Rightarrow \lambda_g = \Re_g \times \mu_o \times A_g = 1013450{,}42 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1{,}5225 \times 10^{-4}$$

$$\therefore \lambda_g = 1{,}939 \times 10^{-4}\, m = 0{,}1939 nm$$

*b)*

$$L = \frac{2N \times \phi}{I} \quad \Rightarrow \quad \frac{2N}{I} = \frac{L}{\phi} \quad \textit{Tomando los resultados anteriores :}$$

$$\phi = 1{,}21 \times 10^{-4} \textit{ con lo cual : } \quad \frac{2N}{I} = \frac{0{,}5}{1{,}21 \times 10^{-4}} = 4132{,}2314$$

*y también:*

$$N \times I = 141{,}955 \quad \textit{entonces} \quad \frac{2N \times I}{I^2} = 4132{,}2314 = \frac{2 \times 141{,}955}{I^2}$$

$$\textit{De aquí :} \quad I = \sqrt{\frac{2 \times 141{,}955}{4132{,}2314}} = 0{,}26212A$$

*Vemos que para las mismas condiciones de a), tenemos que variar N.*

*Entonces :*

$$N = \frac{141{,}955}{0{,}26212} \approx 542 \textit{ vueltas}$$

*c)*

$$L_c = 1{,}125 L_b = 0{,}5625H \quad ; \quad A_m = A_g$$

$$\textit{luego : } 2N \times I = \phi \times (\Re_m + 2\Re_g) = H_m \times \lambda_m + 2B_m \times A_m \times \Re_g$$

$$L_c = \frac{2N \times \phi'}{I} = \frac{2N \times B_m' \times A_m}{I} \quad \Rightarrow \quad B_m' = \frac{L_c \times I}{2N \times A_m}$$

*Del resultado anterior:*

$$B_m' = \frac{0{,}5625 \times 0{,}26212}{2 \times 542 \times 1{,}5225 \times 10^{-4}} = 0{,}8934 Wb/m^2$$

*De la curva: $H_m'$=135 amp-vuelta/m*

$$2N \times I = H_m' \times \lambda_m + 2B_m' \times A_m \times \Re_g' \quad \Rightarrow \quad \Re_g' = \frac{2N \times I - H_m' \times \lambda_m}{2 \times B_m' \times A_m}$$

$$\Re_g' = \frac{2 \times 141{,}955 - 135 \times 0{,}319}{2 \times 0{,}8934 \times 1{,}5225 \times 10^{-4}} = 885328{,}387 amp-vuelta/Wb$$

$$\Re_g' = \frac{\lambda_g'}{\mu_o \times A_g} \quad \Rightarrow \quad \lambda_g' = \Re_g' \times \mu_o \times A_g = 885328{,}387 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1{,}5225 \times 10^{-4}$$

$$\therefore \lambda_g' = 1{,}694 \times 10^{-4} m = 0{,}1694 mm.$$

***PROBLEMA N° 2.9 :*** *Se pide diseñar una bobina de inductancia variable con núcleo de hierro normalizado, empleando láminas de acero silicoso H-23 de 0,5mm de espesor y que tenga las siguientes especificaciones técnicas:*

*d=2´´ $f_w$=0,30 f.a.=0,95*

*Bmax=1Wb/m²=constante* *L=variable entre 1 y 5H*
*Calibre del conductor=#17AWG* *Entrehierro inicial=$g_1$=5mm*

*Se desea saber:*
*a)El rango de variación de la corriente de Excitación.*
*b) El número de espiras a utilizarse*
*c) El número de láminas requerida*
*d)El entrehierro final ($g_2$)*

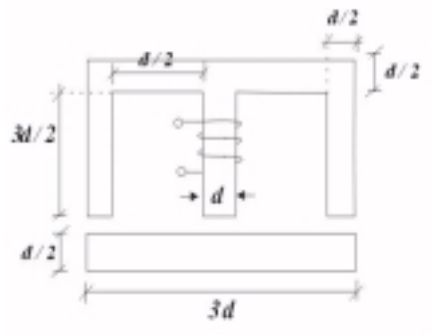



***Figura** P2.9.1*

*SOLUCIÓN:*

*Tenemos:* $N = \dfrac{L \times I}{B_m \times S_m} = \dfrac{L \times I}{B_m \times d \times h_{ef}}$ .....(1) ; $A_w = \dfrac{3d}{2} \times \dfrac{d}{2} = \dfrac{3d^2}{4}$

*Mientras que para el factor:*

$$f_w = \frac{N \times S_{cu}}{A_w} = \frac{N \times S_{cu}}{\dfrac{3 \times d^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{3}{4} \times \frac{d^2 \times f_w}{S_{cu}} \text{.....}(2)$$

*De (1) y (2):*

$$\frac{L \times I}{B_m \times d \times h_{ef}} = \frac{3}{4} \times \frac{d^2 \times f_w}{S_{cu}} \quad \Rightarrow \quad L \times I = \frac{3}{4} \times \frac{d^3 \times f_w \times B_m \times h_{ef}}{S_{cu}}$$

*Donde hacemos :*

$$h_{ef} = d = 2'' = 5{,}08cm \quad \Rightarrow L \times I = \frac{3 \times \left(5{,}08 \times 10^{-2}\right)^3 \times 0{,}3 \times 1 \times 5{,}08 \times 10^{-2}}{4 \times S_{cu}}$$

*Como el conductor es de calibre # 17 AWG, entonces :* $S_{cu} = 1{,}038mm^2$

$\therefore L \times I = 1{,}4436$

*a) Para L variable:*

*Cuando L=1H entonces $I_1$=1,4436 A*

*Cuando L=5H entonces $I_2$=0,28872 A*

*c)*

$$h_{ef} = n_\lambda \times t \quad \Rightarrow \quad n_\lambda = \frac{50{,}8}{0{,}5} \approx 100$$

*$n_\lambda$=número de láminas*

*b)*

$$L=\frac{N\times\phi}{I}=\frac{N\times B_m\times h_{ef}\times d}{I} \quad\Rightarrow\quad n=\frac{L\times I}{B_m\times h_{ef}\times d}=\frac{L\times I}{B_m\times d^2}=\frac{1{,}4436}{1\times(5{,}08\times10^{-2})^2}$$

$n\approx 560 espiras$

d)

$$\phi=\frac{N\times I}{\Re m_{eq}+\Re g_{eq}}=cte.$$

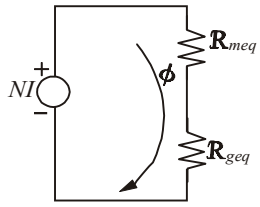



**Figura** *P2.9.2*

*Entonces:*

$N\times I\ \alpha\ \Re g_{eq}\ \alpha\ g$ (*entrehierro*); *ya que consideramos* $\mu\to\infty$ ($\Re m_{eq}=0$)

*Entonces :* $\frac{I_1}{I_2}=\frac{g_1}{g_2}$ *por lo cual :* $g_2=\frac{g_1\times i_2}{I_1}=\frac{0{,}28872}{1{,}4436}\times 5$

$\therefore\quad g_2=1mm.$

***PROBLEMA N° 2.10:*** *Utilizando la estructura, se ha creado un entrehierro adicional en la columna A de valor 5 veces el entrehierro en C . Sabiendo que la nueva FMM es de 50 amp-vuelta en la columna central B, determinar el flujo total del sistema. (Despreciar efecto de Borde)*

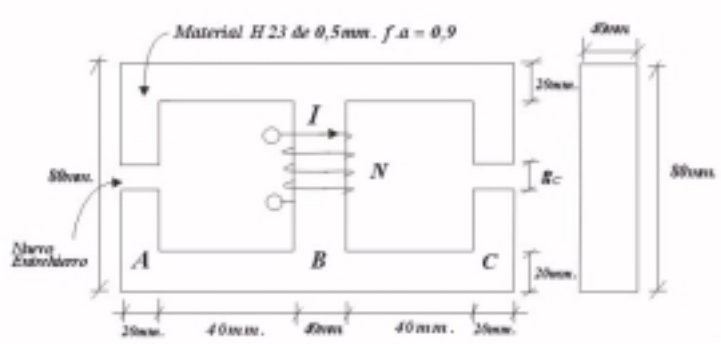
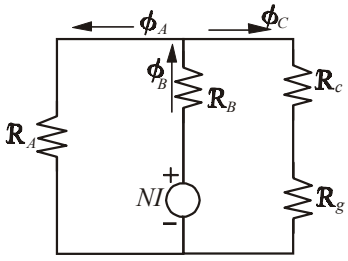



**Figura** *P2.10.1*

*SOLUCIÓN:*

*Calculando el $g_C$ con NxI inicial:*




$\phi_B=\phi_A+\phi_C$ .....($\alpha$)

$N\times I=\Re_B\times\phi_B+\Re_A\times\phi_A=88=H_B\times\lambda_B+H_A\times\lambda_A$ .....($\beta$)

$H_A\times\lambda_A=H_C\times\lambda_C+H_g\times\lambda_{g_C}$ .....($\theta$)

**Figura** *P2.10.2*

$$\lambda_A = 2\times 70 + 60 = 200mm = 0{,}2m = \lambda_C$$
$$\lambda_B = 60mm = 0{,}06m$$
$$S_A = 20\times 10^{-3}\times 40\times 10^{-3}\times 0{,}9 = S_C = 7{,}2\times 10^{-4}\,m^2$$
$$S_B = 2S_A = 14{,}4\times 10^{-4}\,m^2$$
$$S_g = (20\times 10^{-3} + g')\times(40\times 10^{-3} + g') = (20+g')\times(40+g')\times 10^{-6}\,m^2$$

$$Como\ \phi_A = 9{,}79\times 10^{-4}\,Wb$$
$$B_A = \frac{\phi_A}{S_A} = 1{,}36Wb/m^2 \quad \Rightarrow \quad Curva\ B-H: \quad H_A = 375amp-vuelta/m$$

$$De\,(\beta): \quad H_B = 216 \quad \Rightarrow \quad curva\ B-H: \quad B_B = 1{,}15Wb/m^2$$
$$De\,(\alpha): \quad B_C = 0{,}94Wb/m^2 \quad \Rightarrow \quad curva\ B-H: \quad H_C = 152amp-vuelta/m$$
$$\phi_C = \phi_g \quad \Rightarrow \quad B_g = \mu_o\times H_g = \frac{\mu_o}{g_C}\times\left(H_A\times\lambda_A - H_C\times\lambda_C\right)$$
$$B_g = \frac{B_C\times S_C}{(20+g_C)\times(40+g_C)\times 10^{-6}}$$
$$g_C = 0{,}06625mm$$

*Por lo tanto, el nuevo entrehierro:* $g_A = \lambda_{g_A} = 5g_C = 0{,}33125mm$

*Con la nueva FMM =50, tenemos:*

$$X_o = \frac{N\times I}{\lambda_m} = \frac{50}{260\times 10^{-3}} = 192{,}3amp-vuelta/m$$
$$Y_o = \frac{N\times I}{S_B\times\Re_{g_{eq}}} = \frac{50}{14{,}4\times 10^{-4}\times\Re_{g_{eq}}}$$
$$\Re_{g_{eq}} = \Re_{g_A}\,//\,\Re_{g_C} = \frac{5}{6}\times\frac{g_C}{\mu_o\times S_C} = 61018{,}6amp-vuelta/Wb$$
$$\therefore Y_o = \frac{50}{14{,}4\times 10^{-4}\times 61018{,}6} = 0{,}57Wb/m^2$$
$$de\ la\ gráfica\ B-H: \quad B_m = 0{,}36Wb/m^2$$
$$Entonces: \quad \phi_m = B_m\times S_B = 5{,}184\times 10^{-4}\,Wb.$$

***PROBLEMA N° 2.11 :*** *En la estructura ferromagnética mostrada, calcular la longitud del entrehierro "g" de tal manera que el flujo en la columna A sea de 9,79x10$^{-4}$Wb. Se sabe que la FMM es de 88 AV y el circuito magnético está hecho de láminas de acero silicio H-23 de 0,5 mm de espesor, con un factor de apilamiento de 0,90 (Considerar efecto de Borde).*

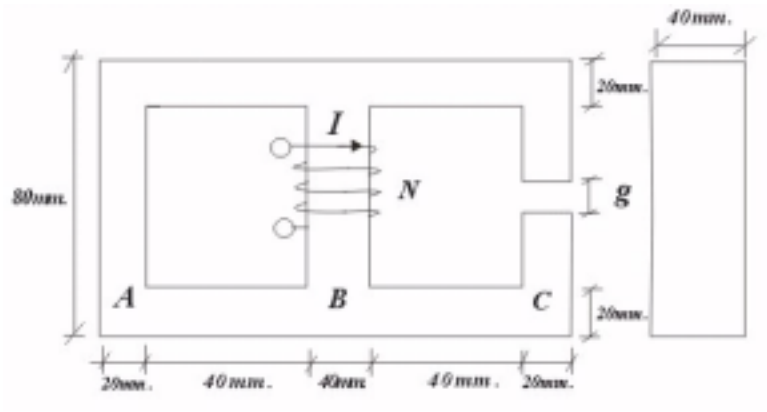



**Figura** *P2.11.1*

*SOLUCION:*
*Tenemos el siguiente circuito equivalente:*

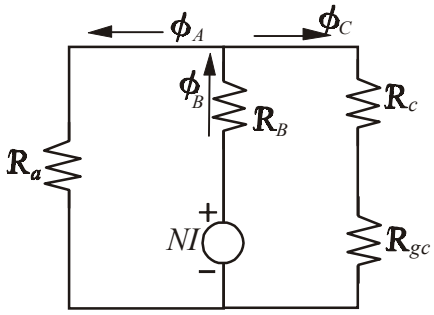



**Figura** *P2.11.2*

$$\phi_B = \phi_A + \phi_C$$
$$N \times I = \Re_B \times \phi_B + \Re_A \times \phi_A = 88 = H_B \times \lambda_B + H_A \times \lambda_A$$
$$H_A \times \lambda_A = H_C \times \lambda_C + H_g \times \lambda_g$$
$$\lambda_A = 2 \times 70 + 60 = 200mm = 0{,}2m = \lambda_C$$
$$\lambda_B = 60mm = 0{,}06m$$
$$S_A = 20 \times 10^{-3} \times 40 \times 10^{-3} \times 0{,}9 = S_C = 7{,}2 \times 10^{-4}\, m^2$$
$$S_B = 2S_A = 14{,}4 \times 10^{-4}\, m^2$$
$$S_g = (20 \times 10^{-3} + g') \times (40 \times 10^{-3} + g') = (20 + g) \times (40 + g) \times 10^{-6}\, m^2$$
$$Como\ \phi_A = 9{,}79 \times 10^{-4}\, Wb$$
$$B_A = \frac{9{,}79 \times 10^{-4}\, Wb}{7{,}2 \times 10^{-4}\, m^2} = 1{,}36 Wb/m^2 \quad \Rightarrow \quad curva: \quad H_A = 375\ amp - vuelta/m$$
$$Entonces: \quad 375 \times 0{,}2 + 0{,}06 \times H_B = 88\ de\ aquí: H_B = 216$$
$$\Rightarrow \quad curva: \quad B_B = 1{,}15 Wb/m^2$$
$$\phi_B = \phi_A + \phi_C \quad \Rightarrow \quad B_B \times S_B = B_A \times S_A + B_C \times S_C$$
$$1{,}15 \times 14{,}4 \times 10^{-4} = 1{,}36 \times 7{,}2 \times 10^{-4} + B_C \times 7{,}2 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow B_C = 0{,}94\,Wb/m^2 \;\; y \;\; de \;\; la \;\; curva \; obtenemos \; H_C = 152 amp-vuelta/m$$

$$\phi_C = \phi_g \quad \Rightarrow \quad B_g = \frac{0{,}94\times 7{,}2\times 10^{-4}}{(2+g)\times(4+g)\times 10^{-4}} = \mu_o \times H_g = \frac{\mu_o}{g}\times(H_A\times\lambda_A - H_C\times\lambda_C)$$

$$\therefore \quad g = 0{,}06625 mm$$

***PROBLEMA N° 2.12 :*** *Se tiene un circuito magnético compuesto de 60 láminas de acero silicoso H-23 de 0,5 mm de espesor tipo E-I normalizado ensamblado con un factor de apilamiento f.a = 0,95 y un bobinado de 400 espiras ubicado en su columna central. Considerar efecto de borde. Se pide:*

*a) Calcular la inductancia del bobinado cuando ésta se excita con una corriente continua de I = 0,3 A.*

*b) Calcular la corriente necesaria para incrementar en 27 % el flujo $\phi_B$ manteniendo constante el entrehierro.*

$$d = 1\frac{3}{4}''$$

$$g = 0{,}1 mm$$

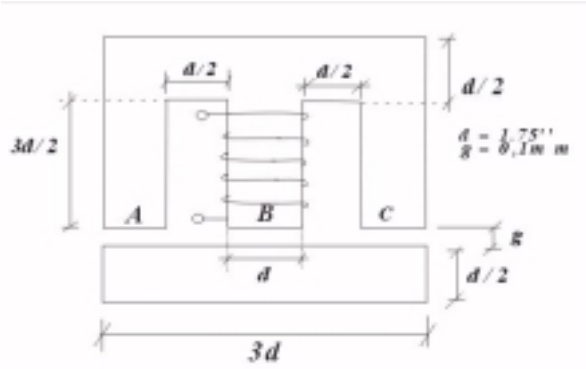
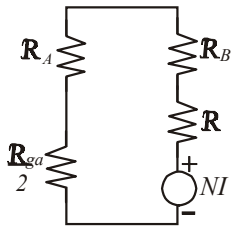



***Figura*** *P2.12.1*

*SOLUCIÓN:*

*a)* $L = \dfrac{N\times\phi_B}{I}$

*Tenemos el siguiente circuito equivalente:*




$$\lambda_m = 6{,}5d$$

***Figura*** *P2.12.2*

*Por el método gráfico:*

$$X = \frac{N\times I}{\lambda_m} = \frac{400\times 0{,}3}{6{,}5\times\frac{7}{4}\times 2{,}54\times 10^{-2}} = 415{,}33 amp-vuelta/m$$

$$Y = \frac{N\times I}{A_m\times\Re_{g_{eq}}} \quad ; \quad A_m = d\times n\times t = \frac{7}{4}\times 2{,}54\times 10^{-2}\times 60\times 0{,}5\times 10^{-3} = 1{,}33\times 10^{-3} m^2$$

$$\frac{\Re_{ga}}{2} = \frac{g}{2\mu_o\times S_A} = \frac{g}{\mu_o\times S_B} = \Re_{gb} \qquad \therefore \Re_{g_{eq}} = 2\Re_{gb}$$

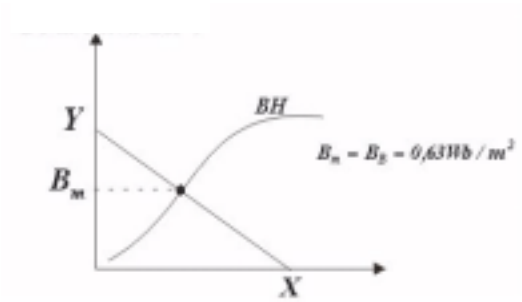
$$\Re_{gb} = \frac{g}{\mu_o\times(d+2g)\times(\frac{n\times t}{f.a}+2g)} = \frac{0{,}1\times 10^{-3}}{4\pi\times 10^{-7}\times(0{,}04445+2\times 10^{-4})\times(0{,}0316+2\times 10^{-4})}$$

$$\Rightarrow \Re_{gb} = 0{,}56 \times 10^5 \; amp - vuelta / Wb$$

$$\therefore \quad \Re_{g_{eq}} = 1{,}12 \times 10^5 \; amp - vuelta / Wb$$

$$Entonces: \quad Y = \frac{400 \times 0{,}3}{1{,}33 \times 10^{-3} \times 1{,}12 \times 10^5} = 0{,}806 Wb / m^2$$

*De la curva B-H:*




$$B_m = B_B = 0{,}63 Wb / m^2$$

**Figura** *P2.12.3*

$$\phi_B = B_m \times A_m = 0{,}63 \times 1{,}33 \times 10^{-3} = 8{,}379 \times 10^{-4} Wb$$

$$\therefore \quad L = \frac{400 \times \phi_B}{0{,}3} = 1{,}1172 H$$

*b)* $\phi_B' = 1{,}27 \phi_B \quad \Rightarrow \quad B_B' = 1{,}27 B_B = 0{,}8T$

*Trazando una recta paralela a la anterior en la curva B-H, que pase por:*

$$B_B' = 0{,}8 Wb/m^2$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{N \times I}{\lambda_m} = 560 amp - vuelta / m$$

$$\therefore \quad I = \frac{560 \times \frac{7}{4} \times 2{,}54 \times 10^{-2} \times 6{,}5}{400} = 0{,}404 A$$

***PROBLEMA N° 2.13 :*** *Diseñar una bobina (Inductancia ) con núcleo de hierro de espesor 0,5mm y que cumpla las siguientes especificaciones técnicas :*
*Inductancia (L) = 15 mH*
*Corriente D.C. (I) = 4 Amp*
*Densidad de Corriente (J) = 4 Amp / mm²*
*Inducción máxima : 0,8 ≤ Bm ≤ 1,0 tesla.*
*Factor de ventana: ($f_w$) = 0,32*
*Factor de Apilamiento(f.a) = 0,92*
*Se pide determinar:*

*a) El calibre del conductor (AWG) y el número de espiras (N) de la bobina.*
*b) El número de láminas ($n_\lambda$) a emplearse.*
*c) La longitud del entrehierro ($\lambda_g$).*
*d) Evaluar la nueva inductancia para un entrehierro $\lambda_g = 0$.*

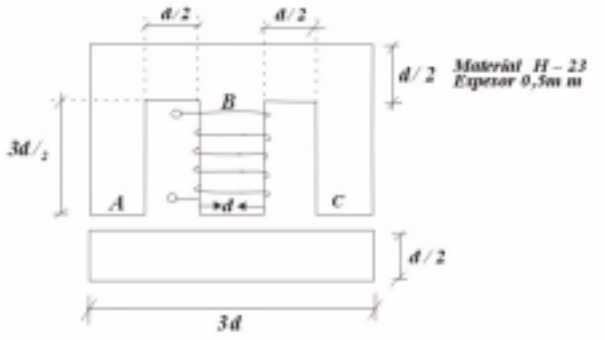



***Figura*** *P2.13.1*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$J = \frac{I}{S_{cu}} \quad \Rightarrow \quad S_{cu} = \frac{I}{J} = \frac{4}{4} = 1mm^2 \ \ por\ lo\ cual\ tomamos:$$

$$S_{cu}' = 1{,}038mm^2 \ \ (\#17AWG)$$

$$Ya\ que: f_w = \frac{N \times S_{cu}}{A_w} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{3}{4} \times \frac{d^2 \times f_w}{S_{cu}} = \frac{L \times I}{B_m \times A_m} \quad donde \quad A_m = d \times h_{ef}$$

$$Por\ diseño: h_{ef} = d. \quad Entonces:$$

$$d^4 = \frac{4}{3} \times \frac{I \times S_{cu}' \times L}{B_m \times f_w} = \frac{4}{3} \times \frac{4 \times 1{,}038 \times 10^{-6} \times 15 \times 10^{-3}}{1 \times 0{,}32} = 2{,}595 \times 10^{-7}$$

$$\therefore d = 22{,}57mm.$$

$$Podemostomar: \quad d' = l'' = 25{,}4mm$$

*b)*

$$h_{ef} = 50 \times 0{,}5 = n_\lambda \times t = 25mm \approx d \quad \Rightarrow \quad n_\lambda = 50\ láminas$$

*Tenemos:*

$$A_m' = h_{ef} \times d' = 25 \times 10^{-3} \times 2{,}54 \times 10^{-2} = 6{,}35 \times 10^{-4}\ m^2$$

$$Entonces: \quad N = \frac{L \times I}{B_m \times A_m'} = \frac{15 \times 10^{-3} \times 4}{1 \times 6{,}35 \times 10^{-4}} = 94{,}488$$

$$\therefore \quad N = 95\ espiras$$

$$Con \quad N = 95 \quad tenemos: B_m' = 0{,}995T$$

*c)*

*Teniendo la siguiente expresión deducida:*

$$\lambda g_{i+1} = \frac{1}{2} \times \left( \frac{Ag_i}{A_m} \right) \times \left[ \frac{\mu_o \times N \times I}{B_m} - \frac{\lambda_m}{\mu_r} \right]$$

$$donde; \quad \lambda_m = 4d + 2{,}5d = 6{,}5d = 6{,}5 \times 2{,}54 \times 10^{-2} = 0{,}1651m$$

$$Para\ un\ B_m = 0{,}995T \Rightarrow de\,la\ curva\,B-H : H_m = 165amp-vuelta/\,m\,;$$

$$\mu = 0{,}00625 \quad \therefore \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_r} = 4973$$

$$\Rightarrow \quad \lambda g_{i+1} = 2{,}234\times 10^{-4} \times \left(\frac{Ag_i}{A_m}\right) \ [m]$$

$$Haciendo: \quad Ag_o = A_m$$

$$\Rightarrow \quad \lambda g_1 = 0{,}2234mm \quad \Rightarrow \quad Ag_1 = (d + 2\lambda g_1)\times(\frac{h_{ef}}{f.a} + 2\lambda g_1)$$

$$Ag_1 = (2{,}54\times 10^{-2} + 2\times 0{,}2234\times 10^{-3})\times(\frac{25\times 10^{-3}}{0{,}92} + 2\times 0{,}2234\times 10^{-3})$$

$$Ag_1 = 7{,}1390\times 10^{-4}\,m^2$$

$$De\,igual\,manera:$$

$$\lambda g_2 = 2{,}234\times\frac{7{,}139}{6{,}35}\times 10^{-4} = 0{,}25mm$$

$$Ag_2 = (2{,}54\times 10^{-2} + 2\times 0{,}25\times 10^{-3})\times(\frac{25\times 10^{-3}}{0{,}92} + 2\times 0{,}25\times 10^{-3})$$

$$Ag_2 = 7{,}1675\times 10^{-4}\,m^2$$

$$\lambda g_3 = 2{,}234\times\frac{7{,}1675}{6{,}35}\times 10^{-4} = 0{,}252mm$$

$$\therefore \quad \lambda_g = 0{,}252mm$$

*d)*
*Por ser el núcleo simétrico:*

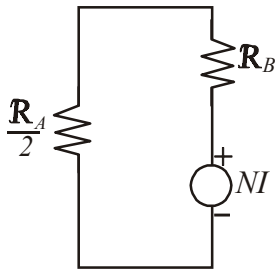



**Figura** *P2.13.2*

$$\Re = \frac{\Re_A}{2} + \Re_B = \frac{\lambda_A}{2\mu\times S_A} + \frac{\lambda_B}{\mu\times S_B} \quad Pero: \quad 2S_A = S_B$$

$$\Re = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{\mu\times S_B} = \frac{\lambda_m}{\mu\times A_m}$$

*Entonces :*

$$L = \frac{N^2\times\mu\times A_m}{\lambda_m}; \quad considerando\ el\,\mu = 0{,}00625$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{95^2\times 0{,}00625\times 6{,}35\times 10^{-4}}{0{,}1651} = 0{,}217H$$

***PROBLEMA N° 2.14 :*** *Se desea diseñar una inductancia con un núcleo de hierro normalizado "E–I" H-23 con láminas de 0,5 mm de espesor y diámetro d=1´´, bajo las siguientes especificaciones:*

*Inductancia (L) : 2mH*
*Corriente D.C (I) : 10 Amp.*
*Densidad de Corriente (J) : 5.0 Amp/mm$^2$.*
*Inducción máxima (Bm) : 1 Tesla.*
*Factor de ventana ($f_w$) : 0,30 f.a : 0,95*

*Calcular :*

*a) El número de láminas a emplearse ($n_\lambda$)*

*b) El número de espiras (N) y el calibre del conductor*

*c) La longitud del entrehierro ($\lambda_g$)*

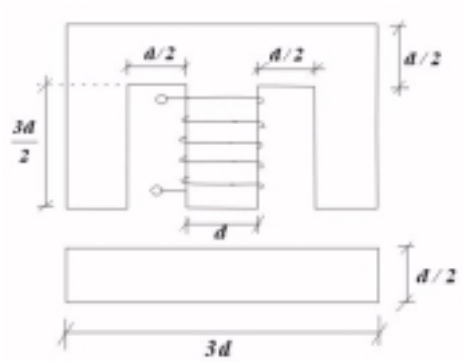



***Figura*** *P2.14.1*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$\text{Asumiendo} \quad n_\lambda = 50 \text{ láminas (adecuado)}$$

$$A_m = n \times t \times d = 50 \times 0{,}5 \times 10^{-3} \times 2{,}54 \times 10^{-2} = 6{,}35 \times 10^{-4}\, m^2$$

*b)*

$$\text{De la curva B-H del material:} \quad \begin{array}{l} B_m = 1T, \quad \Rightarrow \quad H_m = 160 amp - vuelta / m \\ \Rightarrow \mu = 0{,}00625 \end{array}$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} = 4973 \qquad \lambda_m = 4d + \frac{5d}{2} = 6{,}5d = 0{,}1651m$$

$$A_w = \frac{3}{4} d^2 = \frac{3}{4} \times (2{,}54 \times 10^{-2})^2 = 4{,}8387 \times 10^{-4}\, m^2$$

$$S_{cu} = I / J = 10 / 5 = 2mm^2$$

$$S_{cu}' = 2{,}08mm^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Calibre del conductor :} \quad \#14AWG$$

$$N = \frac{L \times I}{B_m \times A_m} = \frac{2 \times 10^{-3} \times 10}{1 \times 6{,}35 \times 10^{-4}} = 31{,}496$$

$$\therefore N = 32 espiras.$$

$$\Rightarrow \quad B_m' \text{ para } N = 32 \text{ será : } 0{,}98425 Wb / m^2$$

*c)*

$$\lambda g_{i+1} = \frac{1}{2} \times \left( \frac{Ag_i}{A_m} \right) \times \left[ \frac{\mu_o \times N \times I}{B_m} - \frac{\lambda_m}{\mu_r} \right]$$

*Reemplazando valores:*

$$\lambda g_{i+1} = 1{,}877 \times 10^{-4} \times \left( \frac{Ag_i}{A_m} \right) [m]$$

*Tomando* $Ag_o = A_m \quad \Rightarrow \quad \lambda g_1 = 0{,}1877 mm$

$$Ag_1 = \left(2{,}54 \times 10^{-2} + 2 \times 0{,}1877 \times 10^{-3}\right) \times \left(\frac{50 \times 0{,}5 \times 10^{-3}}{0{,}95} + 2 \times 0{,}1877 \times 10^{-3}\right) = 6{,}88 \times 10^{-4} m^2$$

*De igual manera:*

$$\lambda g_2 = 1{,}877 \times 10^{-4} \times \frac{6{,}88}{6{,}35} = 2{,}034 \times 10^{-4} m$$

$$Ag_2 = (2{,}54 \times 10^{-2} + 2 \times 0{,}2 \times 10^{-3}) \times \left(\frac{50 \times 0{,}5 \times 10^{-3}}{0{,}95} + 2 \times 0{,}2 \times 10^{-3}\right) = 6{,}893 \times 10^{-4} m^2$$

$$\lambda g_3 = 1{,}877 \times 10^{-4} \times \frac{6{,}893}{6{,}35} = 2{,}0375 \times 10^{-4} \approx 0{,}2 mm$$

$$\therefore \quad \lambda_g = 0{,}2 mm$$

***PROBLEMA N° 2.15 :*** *La estructura ferromagnética mostrada en la figura está compuesta de 50 láminas de hierro silicioso H-23 normalizado de 0,5 mm de espesor y 2 bobinas idénticas de 120 espiras cada una y un f.a= 0,95. Considerar efecto de borde.*

*Se pide calcular:*

*a) Los flujos en las columnas para una corriente continua de excitación de 2 Amp.*

*b) La inductancia del sistema.*

*c) El nuevo entrehierro para disminuir la densidad del campo en el entrehierro en un 12 % manteniendo la I = constante.*

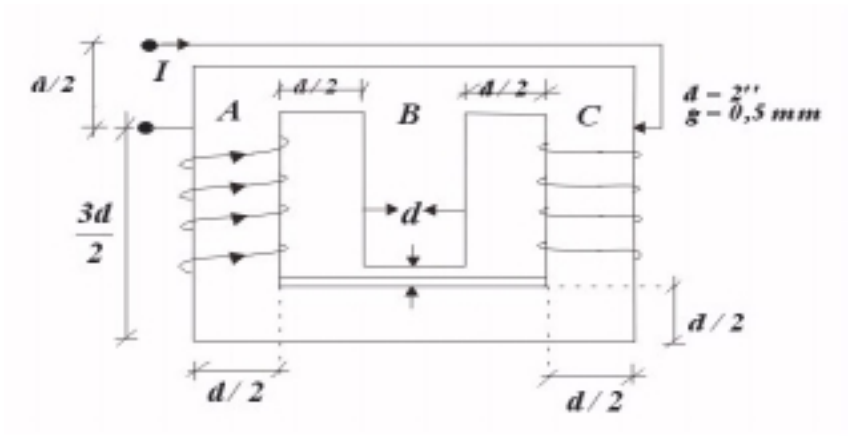



**Figura** *P2.15.1*

*SOLUCIÓN:*

$$S_A = \frac{d}{2} \times n \times t = \frac{d}{2} \times 50 \times 0{,}5 \times 10^{-3} = 2{,}54 \times 50 \times 0{,}5 \times 10^{-5} = 6{,}35 \times 10^{-4} m^2 = S_C$$

$$S_B = 2S_A = 12{,}7 \times 10^{-4} m^2$$

$$S_{g_B} = (d + 2g) \times (\frac{n \times t}{f.a} + 2g) = (5{,}08 \times 10^{-2} + 10^{-3}) \times (\frac{25 \times 10^{-3}}{0{,}95} + 10^{-3}) = 1{,}415 \times 10^{-3} m^2$$

$$\lambda_m = 6{,}5d = 0{,}33m$$

$$\Re_{g_B} = \frac{g}{\mu_o \times S_{g_B}} = \frac{0{,}5 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 1{,}415 \times 10^{-3}} = 2{,}812 \times 10^5 amp-vuelta/Wb$$

$$X = \frac{N \times I}{\lambda_m} = \frac{240 \times 2}{0{,}33} = 1454{,}5 amp-vuelta/m$$

$$Y = \frac{N \times I}{S_B \times \Re_{g_{eq}}} = \frac{N \times I}{S_B \times \Re_{g_B}} = \frac{240 \times 2}{12{,}7 \times 10^{-4} \times 2{,}812 \times 10^5} = 1{,}344 Wb/m^2$$

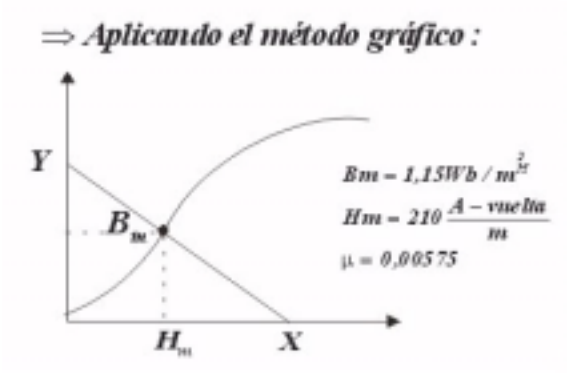



***Figura*** *P2.15.2*

*a)*

$$\phi_B = S_B \times B_m = 12{,}7 \times 10^{-4} \times 1{,}15 = 1{,}46 \times 10^{-3} Wb$$

$$\phi_A = \phi_C = \frac{\phi_B}{2} = 7{,}3 \times 10^{-4} Wb$$

*b)*

$$L = \frac{N \times \phi}{I} = \frac{240 \times (\phi_A + \phi_C)}{I} = \frac{240 \times \phi_B}{I} = \frac{240 \times 1{,}46 \times 10^{-3}}{2} = 0{,}1752 H$$

*c)* $Tomando : \phi_B = \phi_g \quad \Rightarrow \quad B_g = \frac{\phi_g}{S_g} = \frac{1{,}46 \times 10^{-3}}{1{,}415 \times 10^{-3}} = 1{,}032 Wb/m^2$

$Para\ el\ problema : \quad B_g' = 88\% B_g = 0{,}90816 Wb/m^2$

$$\Rightarrow \quad S_{g_B}' = \frac{\phi_B}{B_g'} = \frac{1{,}46 \times 10^{-3}}{0{,}90816} = 1{,}608 \times 10^{-3} m^2$$

$$S_{g_B}' = (d + 2g') \times (\frac{n \times t}{f.a} + 2g') = 1{,}608 \times 10^{-3} m^2$$

$Al\ reemplazar\ valores\ tenemos : \qquad g' = 1{,}684 mm$

# *CAPÍTULO III*
# *EXCITACIÓN DE ESTRUCTURAS FERROMAGNÉTICAS CON CORRIENTE ALTERNA*

## *3.1 INTRODUCCIÓN*

*Los campos magnéticos varían con el tiempo cuando están relacionados con muchos aparatos magnéticos prácticos, tales como: transformadores, motores y generadores. En general dicha variación es periódica.*

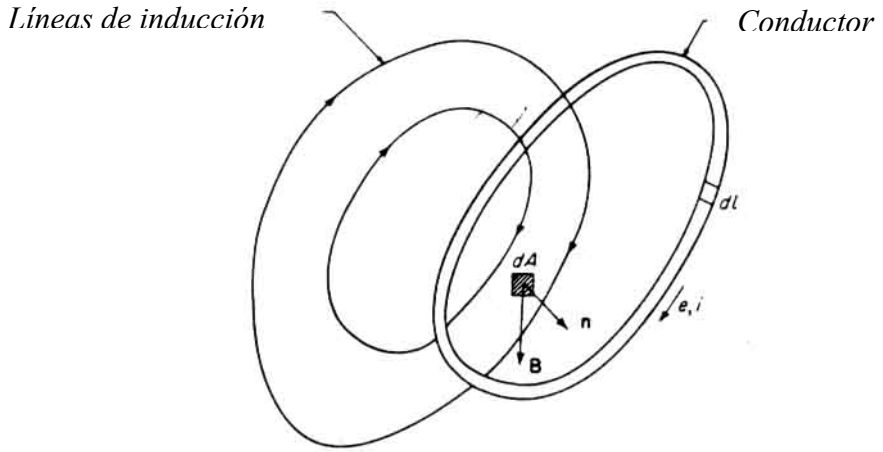
*Si la estructura magnética está hecha de un material ferromagnético, es necesario examinar la pérdida de energía en el núcleo debido al campo magnético y las formas de onda de flujo y de la corriente de excitación.*

*Supondremos que la frecuencia de las señales periódicas usadas es suficientemente baja para no considerar la radiación de energía.*

## *3.2 LEY DE FARADAY DE INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA*

*Tenemos un conductor en forma de anillo, y algunas líneas de flujo debidas a un magneto ó a otra bobina portadora de corriente que no este dibujada.*

*Las líneas de flujo se cierran sobre sí mismas y estas enlazan el conductor.*




*Líneas de flujo enlazando una bobina de una vuelta.*
***Figura** 3.2.1*

*Si se mueve un magneto en la vecindad del conductor se induce una corriente eléctrica en la trayectoria conductora cerrada ó cuando el conductor es movido relativamente al magneto.*

***Ley de Faraday***

*"Una fuerza electromotriz (**f.e.m.**) es inducida en un medio cuando se cambia el enlazamiento de flujo magnético asociado con el medio. Si el medio es un conductor de electricidad y forma una trayectoria cerrada, una corriente fluye en él debido a la f.e.m. inducida. La magnitud de la f.e.m. inducida es proporcional a la rapidez de cambio en el tiempo de los enlazamientos del flujo".*

*La Ley de Lenz nos ayuda a determinar el sentido de la **f.e.m**. inducida y por lo tanto de la corriente.*

*"El sentido de la f.e.m. inducida es tal que ocasiona el flujo y una corriente en una trayectoria cerrada con una dirección tal que la corriente tiende a contrarrestar el cambio de los enlazamientos de flujo".*

***Ejemplo**: Si las líneas de flujo están disminuyendo, entonces la corriente inducida circulará en la dirección de las manecillas del reloj, de tal manera que el flujo establecido por la corriente, tiende a cancelar la disminución del flujo original.*

*Ambas leyes se comprueban y se expresarán por:*

$$e(t) = \pm \frac{d(\phi N)}{d\,t} = \pm \frac{d\lambda}{dt} \quad .....(3-1)$$

*Donde:*

| | |
|---|---|
| $e(t)$ | *es la f.e.m. inducida en volts (MKS)* |
| $\phi$ | *es el flujo inducido en Webers (MKS)* |
| $N$ | *es el número de vueltas del conductor* |
| $\lambda$ | *son los enlazamientos del flujo en Webers vuelta* |
| $t$ | *es el tiempo en segundos (MKS)* |

*Si e(t) es negativo, entonces e(t) es considerado como una elevación de voltaje (fuente) y se opone al voltaje aplicado en cada instante de tiempo.*

*Si e(t) es positivo, entonces e(t) es considerado como una caída de voltaje.*

*La ecuación (3-1) puede ser escrita en otras formas diferentes:*

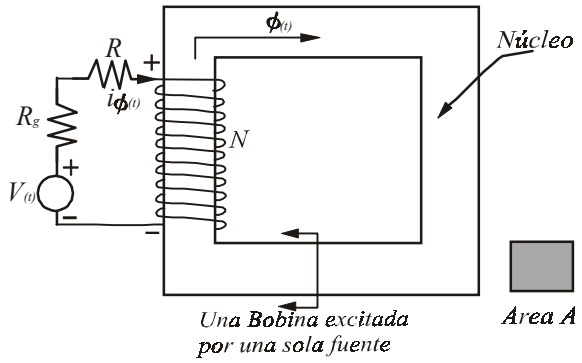
$$\oint_C \overline{E} \cdot d\overline{l} = -\int_A \frac{d\overline{B}}{dt} \cdot n dA \quad .....(3-2)$$

*En forma diferencial:*

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{d\overline{B}}{dt} \quad .....(3-3)$$

## 3.3 RELACIÓN ENTRE VOLTAJE APLICADO PERIÓDICO, VOLTAJE INDUCIDO Y FLUJO EN UN NÚCLEO MAGNÉTICO EXCITADO POR UNA SOLA FUENTE

*Tenemos un núcleo que puede ser o no ferromagnético, con una bobina de excitación. Un voltaje periódico v(t) (no necesariamente senoidal), se aplica a la bobina de excitación.*




*Una bobina excitada por una sola fuente*
**Figura** *3.3.1*

*Una corriente i(t) fluye y un flujo $\phi(t)$ se establece en el núcleo. El flujo variable con el tiempo induce una tensión en la bobina de excitación e(t). Aplicando la ley de Kirchoff y tratando a e(t) como una caída de voltaje, tendremos:*

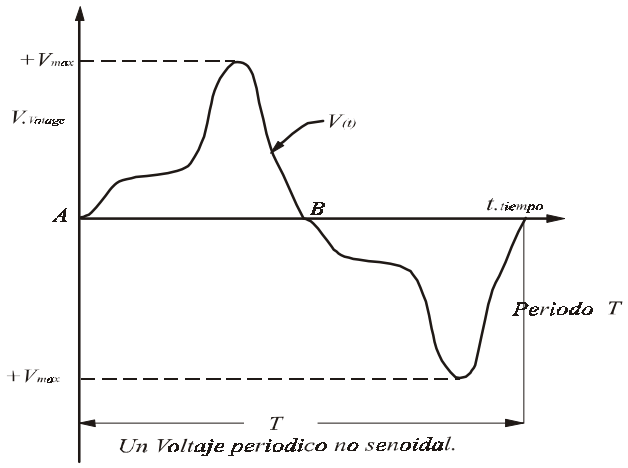
$$v(t) = i(t)(Rg + R) + e(t) = i(t)(Rg + R) + N\frac{d\phi}{dt} \quad .....(3-4)$$

*Suponiendo que:*

$$i(t)(Rg + R) << e(t)$$

$$v(t) = N\frac{d\phi}{dt} \quad .....(3-5)$$

*Como v(t) es una onda periódica por lo tanto será simétrica con respecto al eje del tiempo.*




*Un voltaje periodico no senoidal*
**Figura** *3.3.2*

*Donde: T es el período de la onda*

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad .....(3-6)$$

*$\omega$ es la frecuencia angular en rad/seg*

*De la ecuación (3-5), tenemos que:*

$$\frac{d\,\phi}{d\,t} = \frac{1}{N} v(t) \quad .....(3-7)$$

*Estamos suponiendo que el sistema se encuentra en estado estable y que los transitorios de la conexión inicial han expirado, por lo tando las ondas del voltaje inducido y de flujo son periódicas y simétricas con respecto al eje del tiempo.*

*En el punto A, v(t) es cero y tiende a crecer, $\frac{d\,\phi}{d\,t}$ en A es cero y también tiende a crecer, $\frac{d^2\phi}{d\,t^2}$ en A es positiva, entonces $\phi(t)$ tiene un mínimo relativo en A igual a $-\phi_{máx}$. Analizando de forma análoga, en B, $\phi(t)$ tiene un máximo relativo $\phi_{máx}$..*

*Integrando ambos lados de la ecuación (3-7) de A a B y aplicando los límites apropiados, tendremos:*

$$\int_{\phi A}^{\phi B} d\,\phi = \frac{1}{N}\int_{tA}^{tB} v(t) d\,t$$

$$\phi\Big]_{-\phi máx}^{\phi máx} = \frac{1}{N}\left[Area\ bajo\ medio\ ciclo\ de\ v(t)\right]$$

$$2\phi_{máx} = \frac{1}{N} V_{prom}(t_B - t_A) = \frac{1}{N} V_{prom}\frac{T}{2} = \frac{1}{2Nf} V_{prom}$$

$$\phi_{máx} = \frac{V_{prom}}{4fN} \quad .....(3-8)$$

$$V_{prom} = 4\ f\ N\ \phi_{máx} \quad .....(3-9)$$

*Definimos el factor de forma para configuraciones de ondas periódicas:*

$$Factor\ de\ forma = \frac{Valor\ eficaz}{Valor\ promedio} \quad .....(3-10)$$

$$f.f = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt}}{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt}$$

*Factores de forma para algunas configuraciones:*

**Tabla 3-1**

| Forma de Onda | Valor Máximo | Valor Eficaz | Valor Promedio | Factor de Forma |
|---|---|---|---|---|
| **Senoidal** | $V_{max}$ | $0.707\ V_{max}$ | $0.636\ V_{max}$ | **1.11** |
| **Triangular** | $V_{max}$ | $0.578 V_{max}$ | $0.500\ V_{max}$ | **1.16** |
| **Cuadrada** | $V_{max}$ | $V_{max}$ | $V_{max}$ | **1.00** |

*De las ecuaciones (3-9) y (3-10), tenemos:*

$$V_{eficaz} = 4(f.f)N\ f\ \phi_{máx} \quad ...(3-11)$$

*En el caso de voltajes no senoidales:*

$$\phi_{máx} = \frac{\text{Área bajo medio ciclo de } v(t)}{2N} \quad .....(3-12)$$

*En el caso de las ondas senoidales:*

$$V_{eficaz} = 4.44f\ N\ \phi_{máx} \quad .....(3-13)$$

- *En el caso de estructuras magnéticas, excitadas con corriente directa, el valor* $\phi_{máx}$ *no es afectado por la naturaleza del material ni por las dimensiones del núcleo.*
- *La magnitud, como la forma de onda de la corriente de excitación dependerá de la naturaleza del núcleo así como de sus dimensiones.*

## 3.4 FORMA DE ONDA DE LA CORRIENTE DE EXCITACIÓN EN UN SISTEMA FERROMAGNÉTICO CON FLUJO SENOIDAL

*Se describirá ahora un procedimiento gráfico para obtener la forma de onda de la corriente de excitación.*

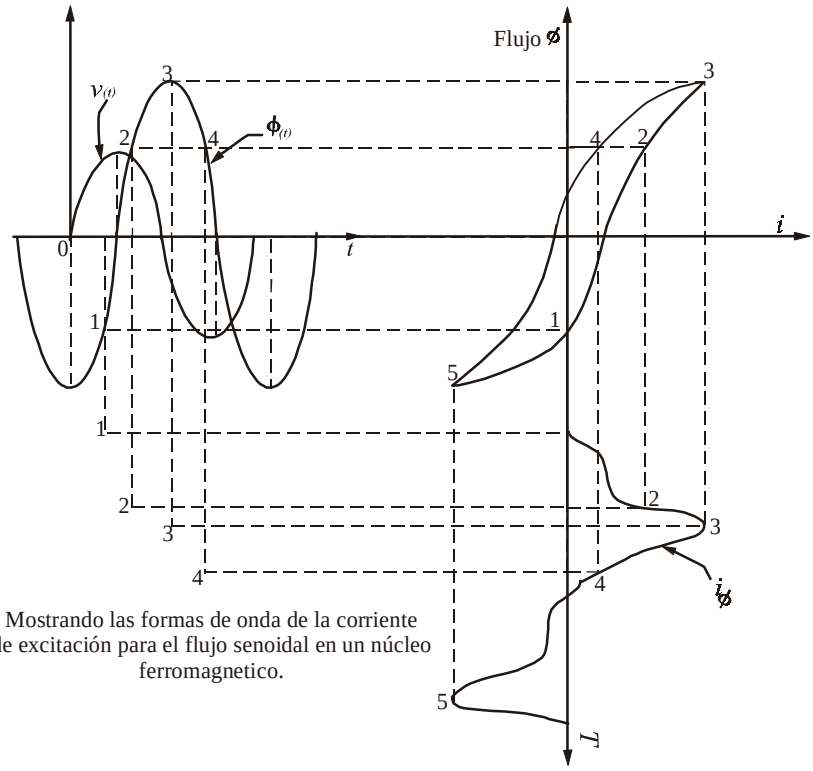
*a) Se considera* $i(t)(Rg+R)\cong 0$ *y* $v(t)$ *se supone senoidal* $v(t)=V_{max}\ sen\ \omega t$ *y*

$$e(t) = E_{máx} sen\ \omega t \quad .....(3-14)$$

*Considerando e(t) como una caída de voltaje,* $V_{max}=E_{max}$
*De la ecuación (3.5):*

$$\phi(t) = -\phi_{máx} cos\ \omega t \quad .....(3-15)$$

*La siguiente figura muestra v(t) y* $\phi(t)$*, pero no a e(t). También se muestran* $\phi(t)$ *vs i(t) para el núcleo, obtenida de la curva B-H.*




Mostrando las formas de onda de la corriente de excitación para el flujo senoidal en un núcleo ferromagnetico.

***Figura** 3.4.1*

*Como el anillo de histéresis es no lineal y tiene dos valores para una misma abscisa, la forma de onda de la corriente de excitación no es senoidal, aún cuando el flujo lo sea.*

*b) Se considera e(t)<< i(t)[R+Rg] y v(t) se supone senoidal*

$$v(t) = V_{máx} sen\, \omega t \quad .....(3-16)$$

*Entonces:*

$$v(t) = i(t)\left(R_g + R\right) \quad .....(3-17)$$

*Además:*

$$i(t) = I_{máx} sen\, \omega t \quad .....(3-18)$$

*Entonces:*

$$I_{máx} = \frac{V_{máx}}{R_g + R} \quad .....(3-19)$$

*Las formas de las ondas de v(t) e i(t) es la misma pero la forma de onda de ϕ(t) es aproximadamente senoidal, mas o menos en la parte superior, la forma de onda de e(t) se obtiene al derivar ϕ(t) con respecto al tiempo, esta curva tiene forma de pico.*

c) *Si $e(t) \cong i(t)[R+Rg]$ y $v(t)$ se supone senoidal, la determinación de las formas de onda de $i(t)$, $e(t)$ y $\phi(t)$ cuando $v(t)$ es senoidal es extremadamente difícil ya que $\phi(t)=f(v(t), i(t))$ en magnitud y forma. Pero pueden ser obtenidas por el método de prueba y error.*

## 3.5 ENERGÍA ALMACENADA EN UN NÚCLEO MAGNÉTICO EXCITADO POR UNA SOLA FUENTE

*Tenemos las siguientes suposiciones:*

1. *El espesor del núcleo es relativamente pequeño comparado con sus demás dimensiones, de modo que la densidad de flujo es uniforme a través de la sección transversal del núcleo. Se usa la longitud media $\ell_m$.*

2. *Aunque la resistencia de la bobina de excitación es efectivamente distribuido a lo largo de la bobina, se representará como un parámetro concentrado por la R externa y se supondrá que la bobina en sí no tiene resistencia.*

3. *El flujo establecido por la corriente es confinado a la sección transversal del núcleo.*

*Tenemos un núcleo magnético sometido a una fuente de energía eléctrica y se incrementa la corriente i(t) estableciendo un flujo. Una f.e.m. se induce en la bobina.*

$$e(t) = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(N\phi)}{dt} = N\frac{d\phi}{dt} \quad ...(3-20)$$

*La energía eléctrica suministrada por la fuente en un tiempo dt (excluyendo la pérdida óhmica en la resistencia R) es:*

$$dW = e\,i\,dt \quad .....(3-21)$$

*La ecuación (3-20) en (3-21)*

$$dW = N\frac{d\phi}{dt}i\,dt = N\,i\,d\phi = i\,d\lambda = F\,d\phi \quad .....(3-22)$$

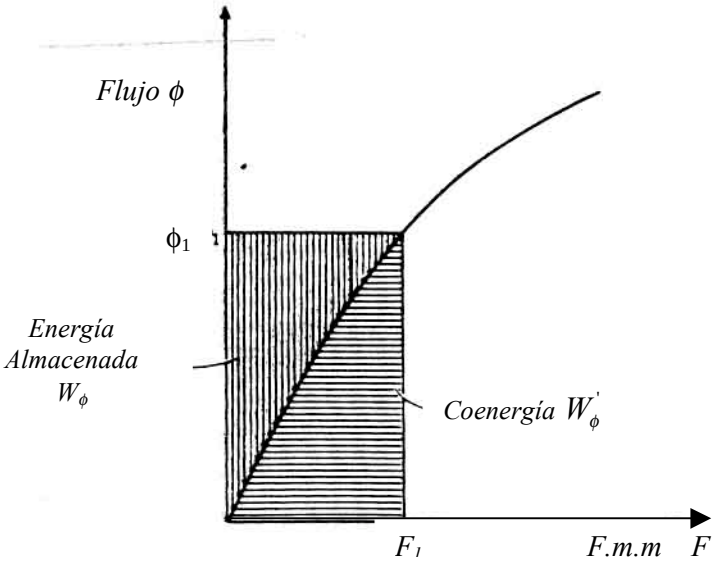
*Suponiendo que el núcleo tiene flujo y corriente cero inicial; si luego es incrementado a un valor $i_1$ se tendrá que la energía total suministrada al núcleo por la fuente es:*

$$W = \int_0^{\lambda_1} i\,d\lambda = \int_0^{\phi_1} F d\phi \quad ...(3-23)$$

*Donde $\phi_1$ y $\lambda_1$ son el flujo y los enlazamientos de flujo, correspondientes a la $i_1$. W se llama energía almacenada porque la energía fluye de la fuente al campo y es frecuentemente representada por $W_\phi$ ó W campo.*

$$W_\phi = \int_0^{\lambda_1} i\,d\lambda = \int_0^{\phi_1} F\,d\phi \quad .....(3-24)$$

*La ecuación (3-24) se representa gráficamente:*




*Energía almacenada y coenergía en un núcleo ferromagnético*
***Figura** 3.5.1*

$|W_\phi|$ *será el área comprendida entre la curva* $\phi$ *vs F y el eje de flujos.*
$|W'_\phi|$ *es el área comprendida entre la curva* $\phi$ *vs F y el eje de fuerza magnetomotriz.*

$$W'_\phi = \int_0^{F_1} \phi \, d\,F \quad ...(3-25)$$

*La coenergía no tiene un sentido físico.*

*Además:*

$\phi = BA$, *entonces* $d\phi = A\,dB$; $\phi$ *varía de 0 a* $\phi_1$, $B$ *varía de 0 a* $B_1$.

$F = H\ell$ *entonces* $dF = \ell dH$

$$W_\phi = \int_0^{\phi_1} F\,d\,\phi = \int_0^{B_1} H\ell A dB = Vol\int_0^{B_1} HdB \quad .....(3-26)$$

*Donde* $A\ell$ *es el volumen del núcleo.*

$$\frac{W_\phi}{Vol} = \frac{Energía\ almacenada}{unidad\ de\ volumen} = densidad\ de\ energía = w_\phi$$

$$w_\phi = \int_0^{B_1} HdB \quad .....(3-27)$$

*Analizando de forma análoga:*

$$W'_{\phi} = \mathrm{Vol}\int_0^{H_1} BdH \quad .....(3-28)$$

*La densidad de Coenergía:*

$$w'_{\phi} = \int_0^{H_1} BdH \quad .....(3-29)$$

$$W_{\phi} + W'_{\phi} = F_1\phi_1 = \text{Área del rectángulo}$$

*En cualquier estructura que consta de un número de ramas en serie y/o en paralelo, donde la sección transversal es uniforme tenemos:*

$$\text{Energía total almacenada} = \sum_{i=1}^{n} Vol_i \int_0^{B_i} H_i dB \quad .....(3-30)$$

$$\text{Coenergía total} = \sum_{i=1}^{n} Vol_i \int_0^{H_i} B_i dH \quad .....(3-31)$$

*Donde n representa el número total de secciones.*

## *CASO ESPECIAL: LA CURVA B VS H DEL NÚCLEO ES LINEAL*

*En este caso:*

$$W_{\phi} = W'_{\phi} = \frac{1}{2}F_1\phi_1 = \frac{1}{2}\Re\phi_1^2 = \frac{1}{2}PF_1^2 \quad .....(3-32)$$

*Donde:*

$\Re$ *es la reluctancia del núcleo*

$P$ *es la permeancia del núcleo*

*Igualmente las ecuaciones (3-27) y (3-29) pueden ser representadas de la siguiente forma:*

$$w_{\phi} = w'_{\phi} = \frac{1}{2}H_1B_1 = \frac{1}{2}\frac{B_1^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H_1^2 \quad .....(3-33)$$

*Donde $\mu$, es la constante de permeabilidad del material magnético lineal. La e.c. (3.32) puede también expresarse en términos de la inductancia de la bobina de excitación.*

*La inductancia es un parámetro pasivo de un circuito eléctrico, la cual es una medida de los efectos del campo magnético asociado con una parte del circuito, debido al flujo de una corriente en esa parte ó en partes adyacentes.*

*La inductancia propia L de la bobina de excitación es definida como el enlazamiento de flujo $\lambda_L$ establecidos por unidad de corriente en la misma bobina.*

$$\lambda_L = Li \quad .....(3-34)$$

*En el sistema MKS racionalizado, L está expresado en Henrys.*

$$[Henry] = \frac{Weber - Vuelta}{Amp} = \frac{Volt - Seg}{Amp}$$

*Luego:*

$$e = \frac{d\,\lambda}{d\,t} = L\frac{d\,i}{d\,t} \quad .....(3-35)$$

*También:*

$$\phi = \frac{F}{\Re} = FP = NiP \quad .....(3-36)$$

*Como:*

$$\lambda = N\,\phi = N^2 Pi$$

*Luego:*

$$L = N^2 P \quad .....(3-37)$$

*La ecuación (3-32) pasa a ser:*

$$W\phi = W_\phi^{'} = \frac{1}{2}P(Ni)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{N^2}(Ni)^2 = \frac{1}{2}Li^2 \quad .....(3-38)$$

## 3.6 REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE LA CORRIENTE DE EXCITACIÓN NO SENOIDAL $i_\phi(t)$

*La forma de onda de la corriente de excitación , $i_\phi(t)$ no es senoidal cuando v(t) es senoidal, el núcleo es ferromagnético, y $i_\phi(R+Rg) << e(t)$ (excepto cuando $i_\phi(R+Rg) >> e(t)$).*

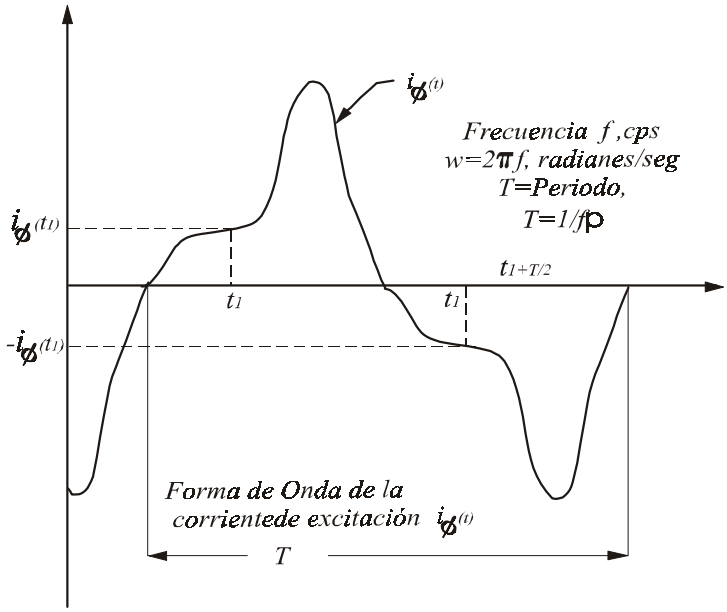
*La forma de la onda de $i_\phi(t)$, tiene las siguientes características:*

a) *La forma de onda de $i_\phi(t)$ es simétrica con respecto al eje de tiempo; el medio ciclo positivo y el medio ciclo negativo son semejantes y de igual área, esto a causa de la simetría del anillo de histéresis con respecto a los ejes coordenados y de la simetría de la forma de la onda del voltaje aplicado con respecto al tiempo.*

b) *La forma de onda de $i_\phi(t)$ satisface la condición:*

$$i_\phi(t) = -i_\phi\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad ...(3-39)$$

*donde T es el período.*




*Forma de onda de la corriente de excitación $i_\phi$ (t)*
***Figura** 3.6.1*

*c) La función $i_\phi(t)$ no es impar ni par*

- *No cumple f(t) = -f(-t) (no es impar)*
- *No cumple f(t )= f(-t) (no es par)*

*d) Satisface las condiciones de Dirichlet*

*1) f(t) tiene solo un número finito de máximos y mínimos en (a,b)*
*2) f(t) está acotada y*
*3) f(t) tiene sólo un número finito de discontinuidades finitas en (a,b)*

*Por lo tanto, la forma de onda de $i_\phi(t)$ puede expresarse como una serie de Fourier, pero esta sólo contiene armónicas impares. El término constante es suprimido, estando presentes únicamente los términos senos y cosenos. Luego:*

$$i_\phi(t) = I_{a1máx}\cos\omega t + I_{a3máx}\cos 3\omega t + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ I_{b1máx}\,sen\,\omega t + I_{b3máx}\,sen 3\omega t + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots (3-40)$$

*Expresada en valores eficaces de sus componentes:*

$$i_\phi(t) = \sqrt{2}\,[I_{a1ef}\cos\omega t + I_{a3ef}\cos 3\omega t + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ I_{b1ef}\,sen\,\omega t + I_{b3ef}\,sen 3\omega t + \ldots\ldots\ldots\ldots] \qquad \ldots\ldots\ldots (3-41)$$

*La potencia instantánea suministrada por la fuente a la bobina de excitación es:*

$$P(t) = v(t)i(t) \quad \ldots\ldots\ldots (3-42)$$

*Sustituyendo ambas ecuaciones. De v(t) e $i_\phi(t)$, v(t)= $\sqrt{2}\,V_{ef}\,senwt$*

$$P(t) = 2V_{ef}\begin{bmatrix} I_{a1ef}\cos\omega t\, sen\,\omega t + I_{a3ef}\cos 3\omega t\, sen\,\omega t + ..... \\ I_{b1ef}\, sen^2\omega t + I_{b3ef}\, sen 3\omega t\, sen\,\omega t + ..... \end{bmatrix} \quad .....(3-43)$$

*La potencia promedio está dada por:*

$$P_{prom} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T 2V_{ef} I_{b1ef}\, sen^2 w\, t\, d\, t = V_{ef} I_{b1ef} \quad .....(3-44)$$

*Todos los demás productos no contribuyen en nada a la integral. Solamente la componente $I_{b1ef}$enwt de $i_{\varnothing}(t)$ contribuye a la potencia promedio.*

*La única componente de la corriente de excitaciòn que contribuye a la potencia promedio es la componente $I_{b1ef}$senwt ó sea aquella que este en fase con el voltaje aplicado y tiene la misma frecuencia. Como R+Rg≈0 entonces $P_{Prom}$ entregada a la bobina de excitaciòn es disipada en el mismo núcleo.*

$$Pérdida\ en\ el\ núcleo = P_n = V_{ef} I_{b1ef} \quad .....(3-45)$$

*Luego como:*

$$i_{\phi}(t) = \sqrt{2}\left[I_{a1ef}\cos\omega t + I_{b1ef} sen\,\omega t + I_{a3ef}\cos 3\omega t + I_{b3ef} sen 3\omega t + .....\right] \quad .....(3-46)$$

*Este término es llamado componente de las pérdidas en el núcleo de la corriente de excitación. Los términos restantes establecen el flujo y por lo tanto constituyen la componente de magnetización de $i_{\phi}$ (t), tendremos entonces:*

$$i_{\phi}(t) = i_P(t) + i_m(t) \quad .....(3-47)$$

*Donde:*

$$i_P(t) = \sqrt{2} I_{b1ef}\, sen\,\omega t \quad .....(3-48)$$

$$i_m(t) = \sqrt{2}\left[I_{a1ef}\cos\omega t + I_{a3ef}\cos 3\omega t + I_{b3ef}\, sen 3\omega t + .....\right] \quad .....(3-49)$$

- *Si el núcleo fuese lineal:*

$$i_m(t) = \sqrt{2} I_{a1ef}\cos\omega t \quad .....(3-50)$$

$$i_P(t) = 0 \quad .....(3-51)$$

- *En muchas aplicaciones prácticas, se pueden despreciar las armónicas de orden elevado de $i_{\phi}$ (t), luego:*

$$i_m(t) = \sqrt{2} I_{a1ef}\cos\omega t \quad .....(3-52)$$

$$i_P(t) = \sqrt{2} I_{b1ef}\, sen\,\omega t \quad .....(3-53)$$

*Estas componentes fundamentales en el campo complejo son vistas así:*

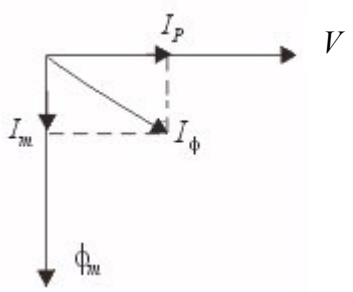



**Figura** *3.6.2*

- *Se usa la representación vectorial si y solo si las armónicas de orden elevado son despreciables (≅ 0).*

$$I_{mef} = \sqrt{(I_{a1ef}^2 + I_{a3ef}^2 + I_{b3ef}^2 + .....} \quad .....(3-54)$$

*La descomposición en sus dos componentes es ficticia. En realidad hay sólo una corriente en la bobina de excitación. $i_\varnothing(t)$ no es senoidal y está atrasada con respecto a la onda senoidal del voltaje. El ángulo de fase entre $i_\varnothing(t)$ y v(t) depende de las características del material ferromagnético de las dimensiones del núcleo y de la frecuencia del voltaje aplicado.*

## *3.7 CIRCUITO EQUIVALENTE APROXIMADO DE UN REACTOR CON NÚCLEO DE HIERRO*

*Dada la hipotética descomposición de la corriente de excitación $i_\phi(t)$ en dos componentes, esto nos recuerda un circuito eléctrico que es una combinación en paralelo de un resistor y un inductor real. La resistencia del embobinado* $\mathbf{R_B}$ *es pequeña y puede representarse en serie con la fuente de voltaje.*

*Se asume que el contenido de armónicas es despreciable y hacemos uso de fasores:*

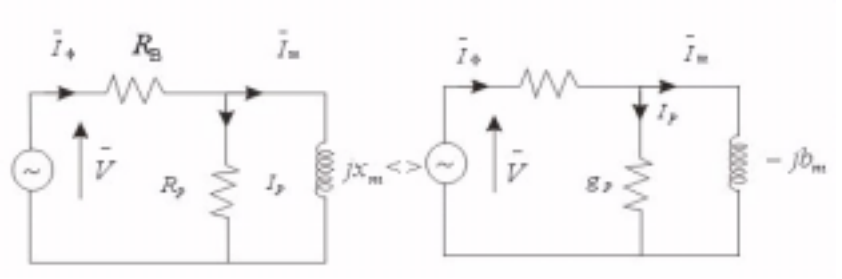



**Figura** *3.7.1*

*Donde:*

*$R_p$= Resistencia de pérdidas (Ω)*

*(Toma en cuenta las pérdidas en el núcleo)*

*$jX_m$=Reactancia de magnetización (Ω)*

*(Al pasar la corriente magnetizante por élla se encarga de producir el flujo magnetizante ó principal en el núcleo)*

$g_p$= *Conductancia de pérdidas* ($\Omega^{-1}$)= $\dfrac{1}{R_p}$

$-jb_m$= *Susceptancia magnetizante* = $\dfrac{1}{jX_m}$

** El signo menos indica que es una susceptancia inductiva*

## 3.8 DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE DE UN REACTOR CON NÚCLEO DE HIERRO.

*a) Determinación de la Resistencia del Bobinado ( $R_B$)*

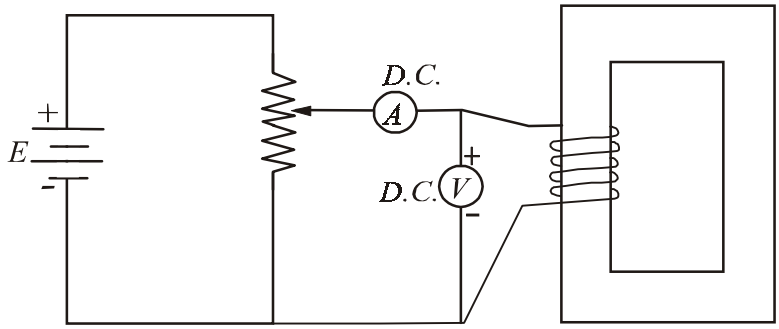



***Figura** 3.8.1*

*Se usa una fuente D.C. de bajo voltaje, con disponibilidad para variar la corriente.*

$V_{D.C.}$ = *Lectura registrada por un voltímetro D.C.*
$I_{D.C.}$ = *Lectura registrada por un amperímeto D.C.*

*Luego:*

$R_{B_{DC}} = \dfrac{V_{DC}}{I_{DC}}$, *es la resistencia óhmica del embobinado*

*Se toman varias lecturas y se calcula el valor promedio. Si una corriente A.C. fluye por el embobinado, la resistencia será mayor debido al efecto superficial.*

*La corriente A.C. circula cerca de la superficie del conductor causando de éste modo una distribución no uniforme de corriente en la sección transversal del conductor. El área efectiva de la sección transversal utilizada es entonces menor que el área disponible y como* $\mathbf{R_B}$ *es inversamente proporcional al área, la resistencia a corrientes variables en el tiempo es más grande que la resistencia en D.C. (Este efecto es una función de la frecuencia).*

*Usualmente se toma:*

$$R_{B_{AC}} = [1.1 - 1.25]R_{B_{DC}} \quad .....(3-55)$$

*b) Determinación de $g_p$ y bm:*

*Tenemos dos métodos:*

***b.1) Método analítico:*** *Se usa el circuito mostrado, aplicando el voltaje senoidal de magnitud y frecuencias conocidas.*

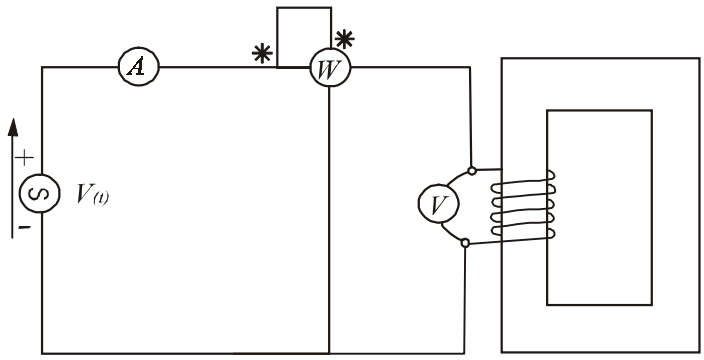



***Figura*** *3.8.2*

- *$R_{BAC}$ es dato de la prueba anterior*
- *Los instrumentos miden:*
  *$V \rightarrow V_{ef}$ (tensión nominal eficaz)*
  *$A \rightarrow I_{\phi ef}$ (corriente de excitación eficaz)*
  *$W \rightarrow P$ = (potencia promedio)=$P_{cu}+P_n$*
  *$P_n$ = pérdidas en el núcleo*
  *$P_n = P - I_{\phi ef}^2 R_B$*

*Suponiendo que $V >> I_{\phi ef} R_B$*

$$P_n = V^2 g_p = P - I_{\phi ef}^2 R_B \quad .....(3-56)$$

$$g_p = \frac{1}{V^2}\left[P - I_{\phi ef}^2 R_B\right] \quad .....(3-57)$$

*Luego:*

$$I_p = \frac{V}{R_p} = V g_p = \text{componente de pérdidas de } I_{\phi ef} \quad .....(3-58)$$

$$I_m = \sqrt{I_\phi^2 - I_p^2} = \text{componente de magnetización} \quad .....(3-59)$$

$$b_m = -\frac{I_m}{V} \quad .....(3-60)$$

***b.2) Método Gráfico:*** *Si un material ferromagnético es excitado por C.A. debemos contar con la curva densidad de flujo máxima vs fuerza de magnetización (B-H); además debemos conocer la variación de las pérdidas en el núcleo como una función de la densidad de flujo máximo y de la frecuencia.*

*La curva de pérdidas en el núcleo es trazado como una función de* $\mathbf{B_{máx}}$, *manteniendo la frecuencia constante. Una familia de estas curvas puede ser construida sobre un rango de frecuencia.*

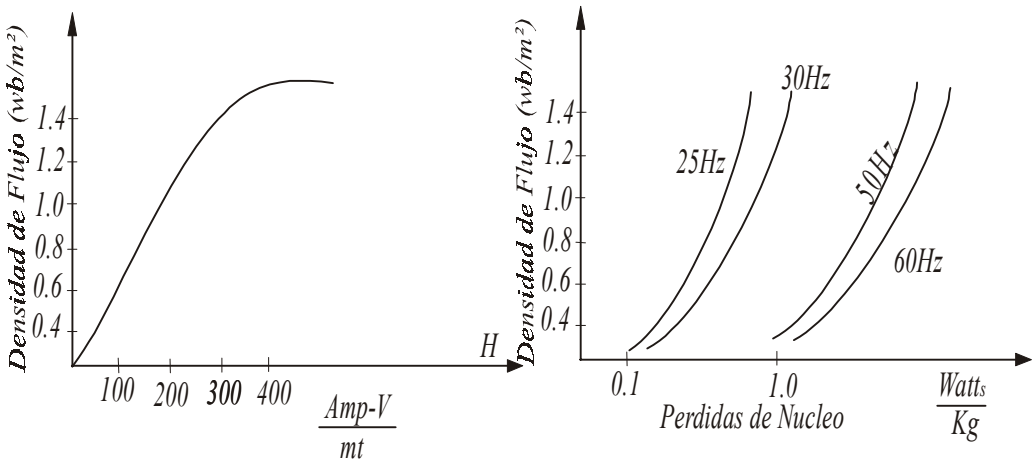



***Figura*** *3.8.3*

## *3.9 PÉRDIDAS EN LOS MATERIALES FERROMAGNÉTICOS*

- *Cuando la bobina con núcleo de hierro se excita con corriente continua (DC) la única pérdida que se presenta es la que se produce en la resistencia propia de la bobina. Se ha de notar que el núcleo no sufre calentamiento alguno.*

- *Cuando la bobina del núcleo se excita con corriente alterna (AC), ésta (el núcleo) si sufrirá un calentamiento y por consiguiente se producirá unas nuevas pérdidas llamadas "Pérdidas en el núcleo" que son debidas a la variación del campo magnético (y flujo magnético).*

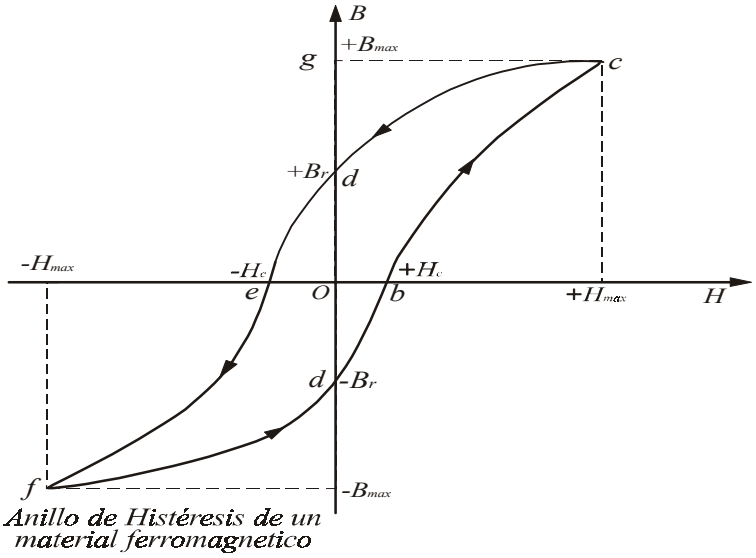
*Esta son:*

*a) Pérdidas por histéresis* ($P_h$)
*b) Pérdidas por corrientes Parásitas* ($P_f$)

*Las pérdidas totales en el núcleo de hierro vienen a ser la suma de ambos, es decir:*

$$P_T = P_h + P_f \quad .....(3-61)$$

*a)* ***Pérdidas por Histéresis (Ph).-*** *Son producidos por un fenómeno afin a la fricción molecular, ya que las partículas más pequeñas del núcleo tienden a alinearse primero en un sentido, y después en el otro, a medida que el flujo magnético varía periódicamente.*




*Anillo de histéresis de un material ferromagnético.*

***Figura** 3.9.1*

*Para determinar estas pérdidas será suficiente con medir con un planímetro el área encerrada por el lazo de histéresis.*

$$w_h = \eta\, B_{máx}^{n} \text{ (Pérdidas / unidad de volumen)} \quad .....(3-62)$$

*$\eta$ = coeficiente de Steinmetz , constante cuyo valor depende del material y del sistema de unidades usado.*

*n= exponente de Steinmetz, usualmente es 1,6.*

*Fórmula empírica deducida por Steinmetz (1892) después de un gran número de observaciones y mediciones experimentales.*

*Para una frecuencia f y un volumen $V_{ol}$ tendremos:*

$$P_h = \eta V_{ol}\, f B_{máx}^{n} \quad .....(3-63)$$

$$P_h = K_h\, f B_{máx}^{n} \quad .....(3-64) \quad \text{(en watts)}$$

*donde:*

*$K_h$ = cte., depende del material y del sistema de unidades usado.*
*f= frecuencia de magnetización en ciclos / seg.*
*$V_{ol}$ = volumen del núcleo en $m^3$.*

*$P_h$ es independiente de la forma de onda de la fuente de excitación, ó de la forma de onda de flujo $\phi(t)$, depende solamente de la amplitud de la densidad de flujo, la frecuencia de la fuente y la naturaleza del material magnético.*

$$E_{ef} = 4(f.f)f\ N\ A\ B_{máx} \quad .....(3-65)$$

$$B_{máx} = \frac{E_{ef}}{4(f.f)f\ N\ A} \quad .....(3-66)$$

$$P_n = K_h f\left[\frac{E_{ef}}{4(f.f)f\ N\ A}\right]^n \quad .....(3-67)$$

$$P_h = \frac{K_h^{'} E_{ef}^n}{f^{n-1}} \quad .....(3-68)$$

$$K_h^{'} = \frac{K_h}{(4(f.f)N\ A)^n} \quad .....(3-69)$$

b) ***Pérdidas por Corrientes Parásitas.-*** *Es la energía disipada en el núcleo debido a pérdidas óhmicas, es decir el campo magnético variable en el tiempo induce corrientes parásitas en el núcleo, como el núcleo tiene resistencia finita éste disipará energía debido a pérdidas óhmicas. Las corrientes inducidas forman anillos semejando un remolino, realmente hay un número infinito de anillos de corriente cubriendo completamente la sección transversal del núcleo.*

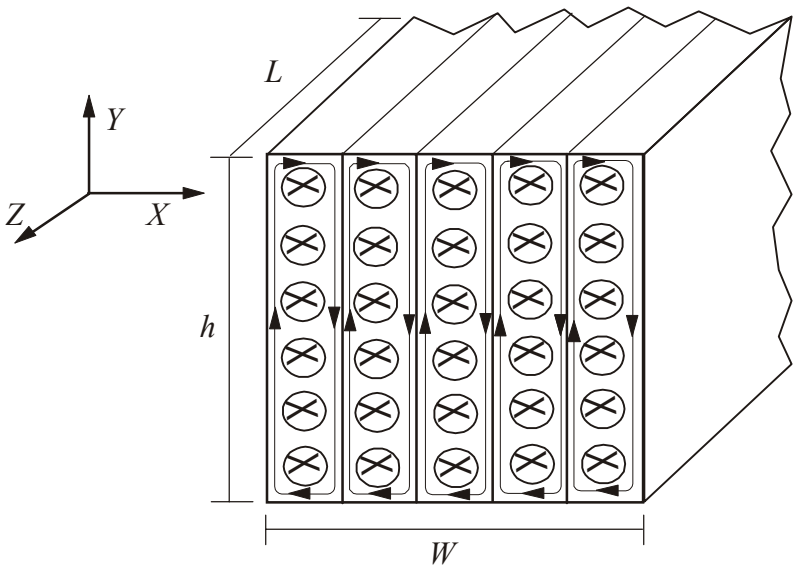



***Figura*** *3.9.2*

*Para la determinación de éstas pérdidas recurrimos a la siguiente fórmula:*

$$\omega_f = \frac{\pi^2 f^2 t^2 B_{máx}^2}{6\rho} \text{ (pérdida / unidad volumen)} \quad .....(3-70)$$

*Para un volumen $V_{ol}$ tendremos:*

$$P_f = \frac{\pi^2 f^2 t^2 Vol B_{máx}^2}{6\rho} \quad .....(3-71)$$

$$P_f = K_f f^2 B_{máx}^2 \quad .....(3-72)$$

*Donde:*

- $t$ : *espesor de las láminas que forman el núcleo (m)*
- $\mathbf{B}_{max}$ : *densidad de flujo máximo ($Wb/m^2$)*
- $f$ : *frecuencia en ciclos / seg*
- $Vol$ : *volumen del núcleo en $m^3$*
- $\rho$ : *resistividad del material ferromagnético ($\Omega$ x m )*

## 3.10 PÉRDIDAS TOTALES EN EL HIERRO ($P_T$).

*El total de pérdidas en el núcleo es la sumatoria de las pérdidas debido a la histéresis y a las corrientes parásitas.*

$$P_T = P_h + P_f \quad .....(3-73)$$

*Laminando el material del núcleo y aumentando su resistividad podremos limitar las pérdidas por corrientes parásitas. Las pérdidas por histéresis representan en las máquinas eléctricas alrededor del 75% de las perdidas totales.*

## 3.11 SEPARACIÓN DE PÉRDIDAS

*Si se conocen las pérdidas totales de una plancha magnética midiendo a diferentes frecuencias pero con la misma densidad de flujo máxima; es posible deducir analíticamente ó gráficamente sus dos componentes.*

$$P_T = P_h + P_f \quad .....(3-74)$$

$$P_T = K_h f\ B_{máx}^n + k_f f^2\ B_{máx}^2 \quad .....(3-75)$$

*Si mantenemos $B_{máx}$ = cte.*

$$P_T = af + bf^2 \quad .....(3-76)$$

$$P_h = af \quad .....(3-77)$$

$$P_f = bf^2 \quad .....(3-78)$$

*Para determinar a y b, efectuamos dos mediciones a las frecuencias $f_1$ y $f_2$*

$$P_{1t} = af_1 + bf_1^2 \quad .....(3-79)$$

$$P_{2t} = af_2 + bf_2^2 \quad .....(3-80)$$

*Resolviendo el sistema de ecuaciones con dos incógnitas se obtiene:*

$$a = \frac{\begin{vmatrix} P_{1t} & f_1^2 \\ P_{2t} & f_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_1^2 \\ f_2 & f_2^2 \end{vmatrix}} \quad .....(3-81)$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & P_{1t} \\ f_2 & P_{2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_1^2 \\ f_2 & f_2^2 \end{vmatrix}} \quad .....(3-82)$$

$$a = \frac{P_{1t} f_2^2 - P_{2t} f_1^2}{f_1 f_2 (f_2 - f_1)} \quad .....(3-83)$$

$$b = \frac{P_{2t} f_1 - P_{1t} f_2}{f_1 f_2 (f_2 - f_1)} \quad .....(3-84)$$

$$P_{1h} = af_1 \quad .....(3-85)$$

$$P_{2h} = af_2 \quad .....(3-86)$$

$$P_{1f} = bf_1^2 \quad .....(3-87)$$

$$P_{2f} = bf_2^2 \quad .....(3-88)$$

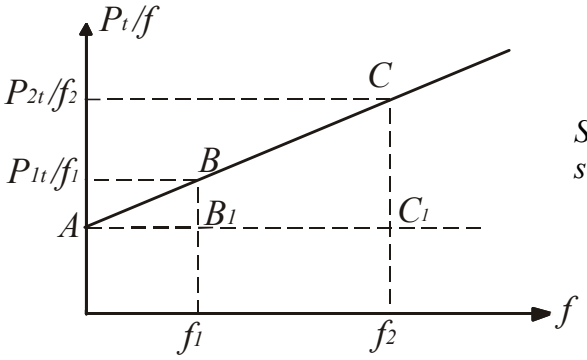
***MÉTODO GRÁFICO:***

*Sabemos :*

$$P_T = af + bf^2 \quad .....(3-89)$$

$$\frac{P_T}{f} = a + bf \quad .....(3-90)$$

*Tomamos como ordenada los valores* $\frac{P_T}{f}$ *y por abscisas las frecuencias, se ubican 2 ó más lecturas en plano cartesiano. Uniendo estos puntos se obtendrá una línea recta.*




*Se prolonga la recta hasta que se intersecta con el eje vertical.*

**Figura** *3.11.1*

$$a = |OA| \quad .....(3-91)$$

$$b = \frac{|BB_1|}{f_1} = \frac{|CC_1|}{f_2} \quad .....(3-92)$$

## *3.12 DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LAS PÉRDIDAS TOTALES*

*La determinación de las perdidas totales se hace generalmente mediante aparatos especiales, el mas conocido de ellos es el aparato de Epstein, con este aparato se pueden determinar las pérdidas a diferentes frecuencias y a diferentes densidades de flujo máximo.*

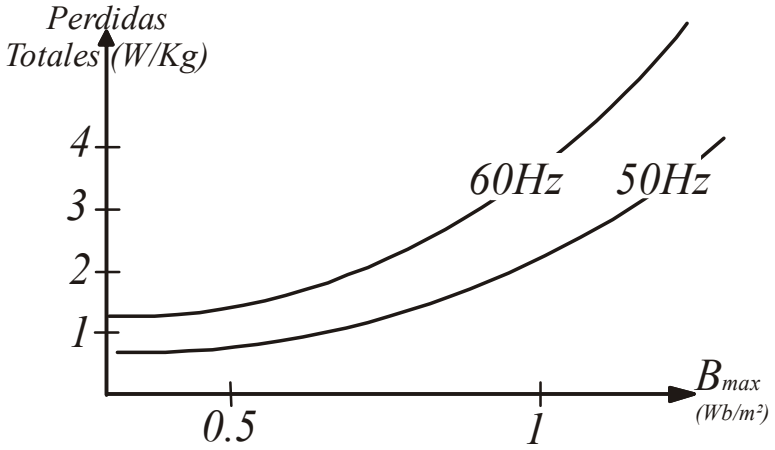



**Figura** *3.12.1*

## *3.13 REACTORES CON NÚCLEO DE HIERRO*

***BALASTOS*** *:sirven para estabilizar el funcionamiento de las lámparas de descarga de gases, ya que estas no pueden funcionar directamente conectados a la red de tensión. Si no hubiera un balasto entre la línea de tensión y la lámpara, ésta última explotaría.*

*Los balastos pueden ser impedancias inductivas, capacitivas ó resistivas que limitan la corriente (amperios) que circulan por las lámparas a los valores exigidos para un funcionamiento adecuado. Además, cuando es necesario, los balastos suministran la tensión y corriente de arranque requeridas y en el caso de reactancias de arranque rápido, la baja tensión requerida para calentar los cátodos de las lámparas. Las más utilizadas son las de tipo inductivo*

*Cada lámpara de descarga de gases( de diferente tipo y potencia)ha sido diseñada para operar con una corriente y tensión específica y es el reactor el que debe darle a la lámpara las condiciones necesarias para operar.*

*En resumen, las funciones que debe realizar un balasto son :*

- *Proporcionar la corriente de arranque ó de precalentamiento de cátodos para conseguir en éstos la emisión inicial de electrones.*
- *Suministrar la tensión de arranque en vacío( tensión que el balasto envía a la lámpara) suficiente para hacer saltar el arco en el interior de la lámpara.*
- *Limitar la corriente en la lámpara a los valores adecuados para su correcto funcionamiento.*

*Los reactores están formados por un núcleo de hierro de placas de acero y de una bobina de alambre de cobre. Algunos reactores producen un zumbido, esto es a causa de que generalmente éstos trabajan en la zona de saturación es decir se produce una vibración como consecuencia de las solicitaciones magnéticas sobre las placas de núcleo.*

*En una reactancia correctamente construida, la vibración fundamental de 100 Hz, pueden en ocasiones ser oídos.*

*Los reactores para lámparas de descarga de alta fusión, tales como las de mercurio y sodio alta presión, así como las lámparas de halogenuros metálicos, son en principio iguales a los de una lámpara fluorescente, variando la sección del alambre de cobre, así como las dimensiones de las láminas que forman el núcleo del reactor. Estos reactores varían en su tamaño y peso, debido a que son fabricados para cada tipo y potencia de lámpara. Por ejemplo: Un reactor para una lámpara de vapor de sodio de alta presión de 250 watts, no puede ser utilizado para operar con una lámpara de vapor mercurio de 250 watts.*

## *3.14 IMPORTANCIA DE LA CURVA DE MAGNETIZACIÓN*

*La curva de magnetización es de fundamental importancia, porque las características de funcionamiento de la máquina, bien sea generador ó motor, dependen casi completamente de ella.*

*Por esta razón, la fase de determinación de la curva de magnetización constituye un paso esencial en el proyecto, con objeto de tener la seguridad de que la máquina satisfará las condiciones especificadas.*

*La curva de magnetización se utiliza para el diseño de simples bobinas, choques ó balastos, transformadores y máquinas rotativas. También para el cálculo de las inductancias estática y dinámica utilizadas en el cálculo de la estabilidad ó el transitorio de un sistema de potencia.*

## *3.15 MODELOS DE REPRESENTACIÓN DE CURVAS DE MAGNETIZACIÓN*

### *a) Representación de la Curva de Magnetización Mediante Polinomios.*

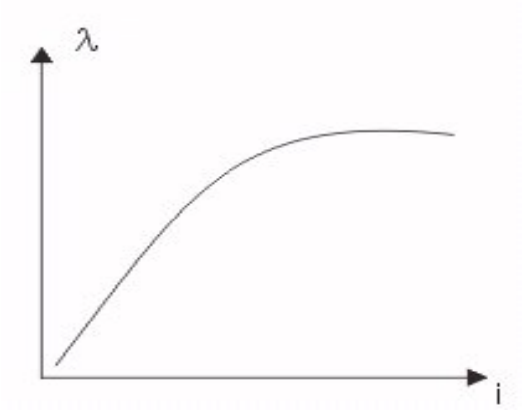



***Figura** 3.15.1*

*$\lambda$= Flujo concatenado ( $N\phi_m$) (weber –vuelta )$_{r.m.s.}$*
*i = corriente de magnetización ( Amps )$_{r.m.s.}$*

*El presente método tiene como objetivo dar una expresión analítica de la curva característica de magnetización, a partir de valores r.m.s. experimentales.*

*La curva de magnetización es aproximada por un ajuste polinomial entregado por la siguiente ecuación:*

$$i(t) = a\,\lambda(t) + b\lambda^n(t) \quad .....(3-93)$$

$$\lambda(t) = \lambda_m \cos\omega t \quad .....(3-94)$$

*Reemplanzando:*

$$i(t) = \left(a\lambda_m + K_1 b\lambda_m^n\right)\cos\omega t + k_3 b\lambda_m^n \cos 3\omega t + .... + K_n b\lambda_m^n \cos n\omega t \quad .....(3-95)$$

### *b) Representación de la curva de magnetización usando Interpolaciones lineales*

*La alta utilización de diversas calidades de materiales en la construcción de variados tipos de transformadores y máquinas eléctricas conduce a aproximar de la mejor forma posible a la curva característica de magnetización.*

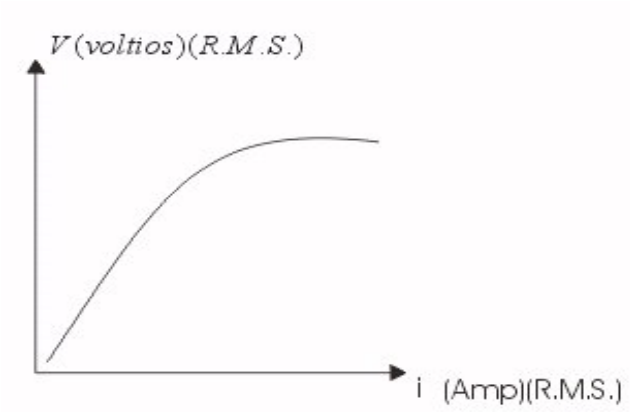



***Figura** 3.15.2*

*La curva experimental que muestra la relación r.m.s. tensión corriente es obtenida por medición experimental empleando el aparato de Epstein.*

*La idea es obtener varias funciones simples lineales en todo el rango de la curva característica de magnetización a partir de datos experimentales r.m.s. para ello se subdividirá la curva r.m.s. en "n" secciones iguales, donde el valor de "n" dependerá de la exactitud, fidelidad que el operador requiera.*

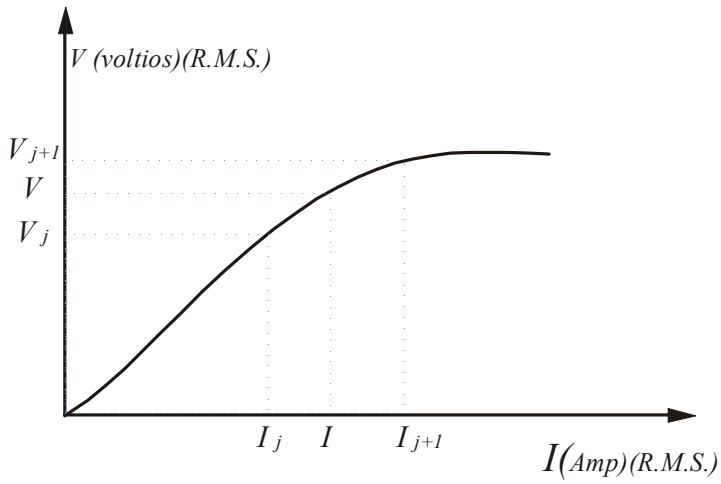



***Figura** 3.15.3*

$$V = \frac{V_{j+1} - V_j}{i_{j+1} - i_j}\left(i - i_j\right) + V_j \quad .....(3-96)$$

*Las posiciones individuales estarán representadas por ecuaciones de rectas; luego, la porción de curva r.m.s. entre los puntos "j" y "j + 1 " está dada por la fórmula descrita.*

1. *Es posible que una simple función, aplicada en muchos tramos represente el rango total desde el origen hasta la zona de saturación.*

2. *La aproximación sería una simple función matemática que puede ser aplicada en un programa de cómputo como una manera de rutina y no envuelve alguna decisión de parte del operador.*
3. *Los errores son pequeños, tanto como uno quisiera que lo sean.*
4. *El tiempo de computación es relativamente corto (segs).*

**c) Representación de la curva de Magnetización mediante la Ecuación de Froelich.**

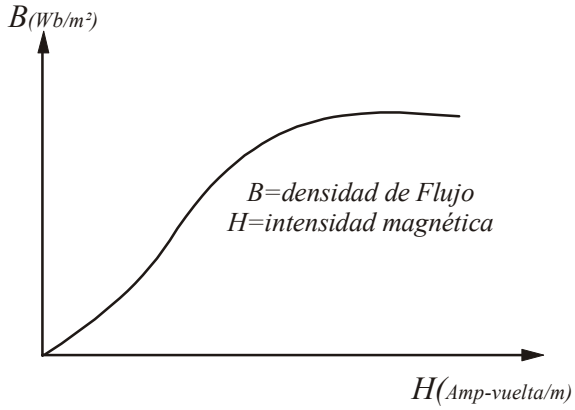



***Figura** 3.15.4*

*La aproximación de la curva de magnetización es de fundamental importancia, porque las características de funcionamiento de la máquina, bien sea generador ó motor, dependen casi completamente de ella.*

*Por ésta razón, la predeterminación de la curva de magnetización constituye un pase esencial en el proyecto, con objeto de tener la seguridad de que la máquina satisfará las condiciones especificadas, la evaluación que representa con mayor sencillez y relativa exactitud la curva de magnetización es la ecuación de Froelich.*

$$B = \frac{aH}{b+H} \quad .....(3-97)$$

*Donde a y b son constantes.*

*Se tienen dos constantes desconocidos por cada ecuación; éllas serán halladas a partir de los datos experimentales r.m.s.; es decir de dos puntos seleccionados, uno caería o la zona de remanencia y el oro después del codo de la zona de saturación.*
*La ventaja de éste método es que la ecuación utilizada para representar a la curva experimental de magnetización es muy sencilla.*

# *PROBLEMAS RESUELTOS*
# *CAPITULO III*

# *EXCITACIÓN DE CIRCUITOS MAGNÉTICOS CON AC*

***PROBLEMAS N° 3.1 :*** *Se proyectó un reactor con 140 láminas de 0,5 mm de espesor que debería de presentar unas pérdidas por histéresis y corrientes parásitas de 25 y 30 Watts respectivamente, pero por error en el núcleo se ensambló con 140 láminas de 0,35 mm*
*¿Determinar los nuevos valores de pérdidas respectivamente (asumir n= 1,7)*

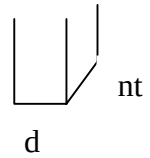
*SOLUCIÓN:*

*Sabemos que:*

$$Ph = \eta \times f \times B\max^{n}\ (Watts/m^3) = \eta \times f \times B\max^{1,7}$$

$$Pf = \frac{\pi^2 \times t^2}{6\rho} \times f^2 \times B\max^2\ (watts/m^3)$$

*t: Espesor de cada lámina del núcleo*




*f: Frecuencia de magnetización*
$\rho$ *:Resistividad del material ferromagnético* $(\Omega \times m)$

$$A = d \times n \times t$$

$$Eef_1 = 4,44 \times N \times f \times A_1 \times B\,max_1$$

$$Eef_1 = 4,44 \times N \times f \times B\,max_1 \times d \times 140 \times 0,5 \times 10^{-3}$$

$$Eef_2 = 4,44 \times N \times f \times A_2 \times B\,max_2$$

$$Eef_2 = 4,44 \times N \times f \times B\,max_2 \times d \times 140 \times 0,35 \times 10^{-3}$$

$$Pero: \quad Eef_1 = Eef_2 \qquad Entonces: \quad \frac{B\,max_1}{B\,max_2} = \frac{0,35}{0,5}$$

$$Es\ decir: \quad \frac{B\,max_1}{B\,max_2} = \frac{t_2}{t_1}$$

$$Vol. = \alpha.Am\ (Volumen\ proporcional)$$

** Para las pérdidas por histéresis :*

$$Ph_1 = \eta \times f \times B\,max_1^{1,7} \times \alpha \times Am_1\ (Watts)$$

$$Ph_2 = \eta \times f \times B\,max_2^{1,7} \times \alpha \times Am_2\ (Watts)$$

*Por lo cual :*

$$\frac{Ph_1}{Ph_2} = \left(\frac{B\,max_1}{B\,max_2}\right)^{1,7} \times \frac{Am_1}{Am_2} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{1,7} \times \frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{0,7} = 0,78$$

$$Ph_2 = \frac{Ph_1}{0,78} = \frac{25}{0,78} = 32,1W$$

** Para las pérdidas por corrientes parásitas :*

$$Pf = K \times B\,max^2 \times t^2 \times Vol.\,(Watts)$$

$$Entonces : Pf_1 = K \times B\,max_1^{\,2} \times 0{,}5^2 \times \alpha \times Am_1$$

$$Pf_2 = K \times B\,max_2^{\,2} \times 0{,}35^2 \times \alpha \times Am_2$$

*De donde :*

$$\frac{Pf_1}{Pf_2} = \left(\frac{B\,max_1}{B\,max_2}\right)^2 \times \left(\frac{0{,}5}{0{,}35}\right)^2 \times \frac{0{,}5}{0{,}35} = \frac{0{,}5}{0{,}35}$$

$$Pf_2 = 0{,}7 \times Pf_1 = 0{,}7 \times 30 = 21W$$

***PROBLEMA N° 3.2 :*** *Un reactor de núcleo de hierro es excitado por 3 diferentes voltajes que son aplicados sucesivamente a la bobina de excitación del núcleo mostrado en la figura. La resistencia de la bobina de excitación es despreciable. El exponente de Steinmetz es n=1,6. Parte de los datos obtenidos son dados en la tabla. Llenar los espacios en blanco.*

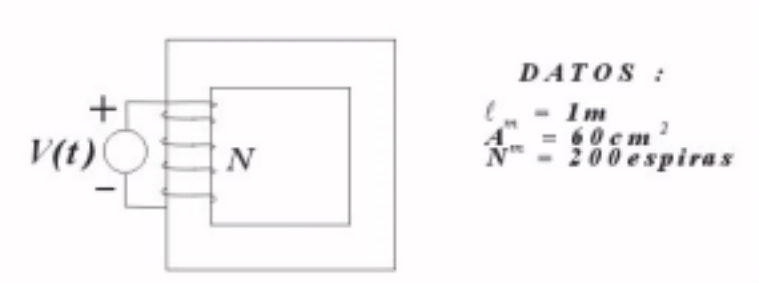



***Figura*** *P3.2.1*

| VOLTAJE APLICADO | Ph(W) | Pf(W) | Ptotal(W) |
|---|---|---|---|
| $v_1(t) = 140 \times sen377t$ | ? | ? | 100 |
| $v_2(t) = 280 \times sen377t$ | ? | ? | 360 |
| $v_3(t)$ es una onda cuadrada, cuyo valor pico es 357V y f=120Hz | ? | ? | ? |

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$Ph = Kh \times f \times B\,max^n = Kh \times f \times B\,max^{1,6}$$

$$Pf = Kf \times f^2 \times B\,max^2$$

$$Vef = \frac{140}{\sqrt{2}} = 99 = 4{,}44 \times f \times N \times B\,max \times Am = 4{,}44 \times 60 \times 200 \times B\,max \times 60 \times 10^{-4}$$

$$B\,max = 0{,}3097 Wb/m^2$$

$$Entonces : \quad Kh \times 60 \times 0{,}3097^{1,6} + Kf \times 60^2 \times 0{,}3097^2 = 100 \;.....(\alpha)$$

*b)*

$$Vef = \frac{280}{\sqrt{2}} = 198 = 4{,}44 \times 60 \times 200 \times 60 \times 10^{-4} \times B\,max$$

$$B\,max = 0{,}6194 Wb/m^2$$

$$Entonces: \quad Kh \times 60 \times 0{,}6194^{1{,}6} + Kf \times 60^2 \times 0{,}6194^2 = 360 \;.....(\beta)$$

*Resolviendo* $(\alpha)$ *y* $(\beta)$: $Kh=4{,}49$
$Kf=0{,}17$

*En a) :*

$$Ph = 4{,}49 \times 60 \times 0{,}3096^{1{,}6} = 41{,}3W$$

$$Pf = 58{,}7W$$

*En b) :*

$$Ph = 4{,}49 \times 60 \times 0{,}6194^{1{,}6} = 125{,}185W$$

$$Pf = 234{,}8W$$

*c) Para una onda cuadrada:*

$$Vef = V\,max = 357V, \qquad f = 120Hz \qquad f.f. = 1$$

$$B\,max = \frac{Vef}{4 \times f.f \times f \times N \times Am} = \frac{357}{4 \times 1 \times 120 \times 200 \times 60 \times 10^{-4}} = 0{,}6198$$

$$Ph = Kh \times 120 \times 0{,}6198^{1{,}6} = 250{,}63W$$

$$Pf = Kf \times 120^2 \times 0{,}6198^2 = 940{,}40W$$

$$P_{FE} = 1191{,}03W$$

***PROBLEMA N° 3.3 :*** *Se dispone de los siguientes datos de un reactor de núcleo de hierro:*
*Voltaje aplicado a la bobina de excitación = 220 V*
*Frecuencia = 60 Hz*
*Flujo en el núcleo =* $\phi\max \times sen377t$
*Corriente de excitación:*

$$i_\phi(t) = 1{,}414 \times sen377t + 0{,}7 \times sen1131t + 0{,}35 \times \cos 377t + 0{,}2 \times \cos 1131t$$

*a) Determinar las pérdidas en el núcleo*
*b) El valor de los parámetros* $g_p$ *y* $b_m$ *. Dar su circuito equivalente*

*Despreciar la resistencia del bobinado.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

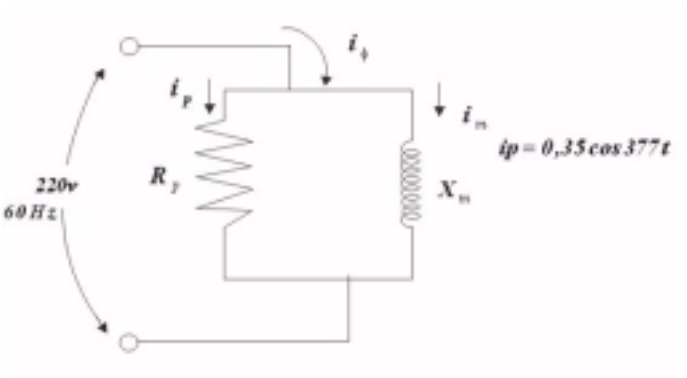



**Figura** *P3.3.1*

$$i_p(t) = 0{,}35 \times \cos 377t$$

$$v(t) = 220\sqrt{2} \times \cos 377t$$

*Potencia instantánea:* $P(t) = v(t) \times i_p(t) = 220\sqrt{2} \times \cos 377t \times 0{,}35 \times \cos 377t$

$$Pmedia = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 108{,}9 \times \cos^2 377t = 54{,}45W$$

*b)*

$$P_{FE} = \frac{V^2}{Rp} \qquad Rp = \frac{V^2}{P_{FE}} = \frac{220^2}{54{,}45} = 888{,}89\Omega$$

$$g_p = 1{,}125 \times 10^{-3}\, mhos$$

$$I_p = \frac{0{,}35}{\sqrt{2}} = 0{,}2475A$$

$$i_m = 0{,}7 \times sen3wt + \sqrt{2} \times senwt + 0{,}2 \times \cos 3wt$$

$$I_m{}^2 = \left(\frac{0{,}7}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1{,}265$$

$$I_m = 1{,}125A$$

$$X_m = \frac{V}{I_m} = \frac{220}{1{,}125} = 195{,}56\Omega$$

$$b_m = 5{,}1136 \times 10^{-3}\, mhos$$

$$I_\phi = \sqrt{I_p{}^2 + I_m{}^2} = 1{,}152A$$

***PROBLEMA N° 3.4 :*** *Cuando un voltaje senoidal de 200V eficaces y f = 60 Hz es aplicado a la bobina de excitación de un núcleo ferromagnético, las pérdidas por histéresis y foucault son 40 y 20 W respectivamente y la densidad de flujo: Bmax=0,93 Wb/ m*$^2$ *. Calcular éstas pérdidas cuando un voltaje:*
$v(t) = 250 \times sen377t + 71{,}5 \times sen1131t$ *es aplicado a la bobina de excitación.*
*El exponente de Steinmetz es 1,6*

*SOLUCIÓN:*

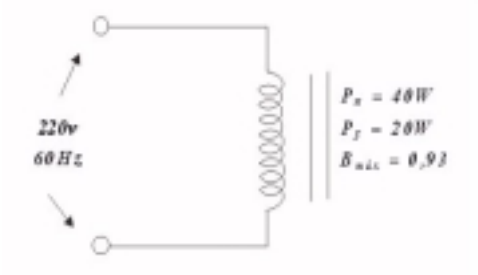



**Figura** *P3.4.1*

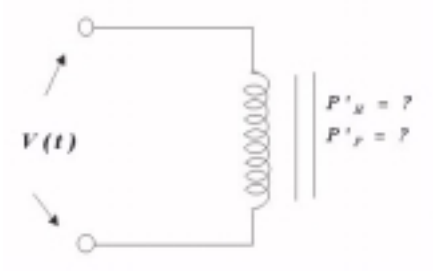



**Figura** *P3.4.2*

$$Ph = Kh \times f \times B\,max^{1,6} = 40 = \eta \times Vol \times f \times B\,max^{n}$$

$$Pf = Kf \times f^{2} \times B\,max^{2} = 20 = \frac{\pi^{2} \times t^{2} \times f^{2}}{6\rho} \times B\,max^{2} \times Vol$$

$$Para:\ v(t) = 250 \times sen377t + 71,5 \times sen113lt$$

*Aplicamos superposición:*

*a)*

$$250 \times sen377t:\quad V'ef = \frac{250}{\sqrt{2}} = 176,78V \quad ; \quad f' = 60Hz \quad ; \quad B' = ?$$

$$V = 4,4 \times N \times Am \times f \times B\,max = K \times f \times B\,max$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{f' \times B'max}{f \times B\,max} = \frac{B'max}{B\,max} \quad ; \quad (f' = f)$$

$$\frac{Ph'}{Ph} = \frac{f'}{f} \times \left(\frac{B'max}{B\,max}\right)^{1,6} = \left(\frac{B'max}{B\,max}\right)^{1,6} \qquad \frac{Pf'}{Pf} = \left(\frac{B'max}{B\,max}\right)^{2}$$

$$Ph' = \left(\frac{V'}{V}\right)^{1,6} \times Ph = \left(\frac{176,78}{200}\right)^{1,6} \times 40 = 32,83W$$

$$Pf' = \left(\frac{176,78}{200}\right)^{2} \times 20 = 15,625W$$

*b)*

$$750 \times sen113lt:\quad V''ef = \frac{71,5}{\sqrt{2}} = 50,558V \quad ; \quad f'' = 180Hz$$

$$\frac{V''}{V} = \frac{f''}{f} \times \frac{B''max}{B\,max}$$

$$\frac{Ph''}{Ph} = \frac{f''}{f} \times \left(\frac{B''max}{B\,max}\right)^{1,6} = \frac{f''}{f} \times \left(\frac{V''}{V} \times \frac{f}{f''}\right)^{1,6} = 0,057$$

$$Ph'' = 0,057 \times Ph = 2,3W$$

$$\frac{Pf''}{Pf} = \left(\frac{f''}{f}\right)^{2} \times \left(\frac{B''max}{B\,max}\right)^{2} = \left(\frac{f''}{f}\right)^{2} \times \left(\frac{V''}{V} \times \frac{f}{f''}\right)^{2} = \left(\frac{V''}{V}\right)^{2} = 0,0639$$

$$Pf'' = 0,0639 \times Pf = 1,278W$$

*Por lo tanto:*

*Ph total=Ph´+Ph´´=32,83+2,3=35,13W*

*Pf total=Pf´+Pf´´=15,625+1,278=16,903W*

***PROBLEMA N° 3.5 :*** *Se tiene un reactor de núcleo de hierro normalizado E–I de acero silicoso H-23 que presenta las siguientes características:*

*Número de Láminas = 60*
*Voltaje nominal = 110 V*
*Diámetro de Núcleo=d=2´´*
*Densidad de Campo Bm = 1 tesla*
*Peso específico del Fe =* $\gamma_{FE}$ *= 7750 Kg/ m3*
*f.a =0,95 ; t=0,5mm*

*g= 0*

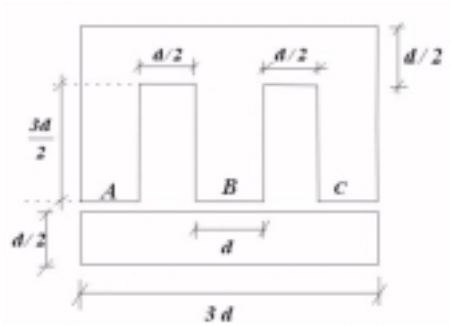



***Figura*** *P3.5.1*

*Se pide determinar:*

a) *El número de espiras, corriente absorvida e inductancia del reactor sin entrehierro si la frecuencia de la red es de 60 Hz.*
b) *Si en este reactor se crea un entrehierro de 0,5 mm, calcular la nueva inductancia del reactor . (Considerar efecto de borde).*
c) *Calcular el incremento de la corriente activa y reactiva.*

*SOLUCIÓN:*

$$E = 4{,}44 \times f \times N \times B \times A = 110 \quad , \quad \text{tomando un área :} \quad A = d \times n \times t$$

$$A = 2 \times 2{,}54 \times 10^{-2} \times 60 \times 0{,}5 \times 10^{-3} = 0{,}001524 m^2$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{110}{4{,}44 \times f \times B \times A} = \frac{110}{4{,}44 \times 60 \times 1 \times 0{,}001524} = 270{,}94$$

$$\therefore N \approx 271$$

$$\text{Sabemos que : } I_\phi = \sqrt{I_m^{\,2} + I_p^{\,2}} \quad \text{también :} \quad I_p = \frac{P_{FE}}{V_N}$$

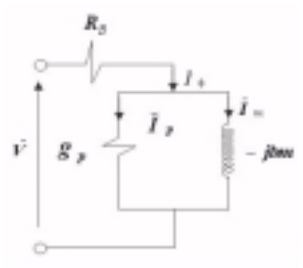



***Figura*** *P3.5.2*

*Ahora:*

$$P_{FE} = \rho_{FE}(W / Kg) \times W_{FE}$$

$$\text{De las tablas :} \quad \rho_{FE} = 2{,}8 W / Kg$$

*Luego:*

$$W_{FE} = \gamma_{FE} \times Vol_{FE}$$

$$Vol_{FE} = 3d \times \frac{5d}{2} \times 60 \times 0{,}5 \times 10^{-3} - 2 \times \frac{3d}{2} \times \frac{d}{2} \times 60 \times 0{,}5 \times 10^{-3}$$

$$Vol_{FE} = 4{,}645 \times 10^{-4}\, m^3$$

$$\therefore \quad W_{FE} = 7750 \times 4{,}645 \times 10^{-4} = 3{,}6\, Kg$$

$$P_{Fe} = 2{,}8 \times 3{,}6 = 10{,}08 W$$

$$I_P = \frac{10{,}08}{110} = 0{,}0916\, A$$

$$Cuando \quad B_m = 1T \Rightarrow de\ la\ curva\ B-H: \quad H_m = 150 amp - vuelta / m$$

$$I_{m_{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left( \frac{H_m \times \lambda_m}{N} \right) \quad donde \quad \lambda_m = 6d$$

$$I_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left( \frac{150 \times 6 \times 2 \times 2{,}54 \times 10^{-2}}{271} \right) = 0{,}12\, A$$

$$\therefore I_\phi = \sqrt{I_p^{\,2} + I_m^{\,2}} = \sqrt{0{,}0916^2 + 0{,}12^2} = 0{,}15\, A$$

$$L = \frac{N^2}{\Re_{eq}} = \frac{N^2}{\frac{1}{2} \times \frac{\lambda_m}{\mu \times S_A}} = \frac{2 \times \mu \times S_A \times N^2}{\lambda_m} = \frac{2 \times 1/150 \times d/2 \times n_\lambda \times t \times 271^2}{6d}$$

$$\therefore \quad L = 2{,}448 H$$

*b) Para un entrehierro:*

$$g = 0{,}5 mm = 0{,}5 \times 10^{-3}\, m$$

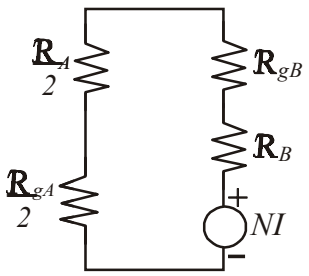



**Figura** *P3.5.3*

$$Entonces: \quad L = \frac{N^2}{\Re_{m_{eq}} + \Re_{g_{eq}}}$$

$$\Re_{g_{eq}} = \frac{\Re_{g_A}}{2} + \Re_{g_B}$$

$$Pero: \quad \frac{\Re_{g_A}}{2} = \Re_{g_B} \qquad S_A = \frac{d}{2} \times n_\lambda \times t = 7{,}62 \times 10^{-4}\, m^2$$

$$\Rightarrow \quad \Re_{g_{eq}} = 2\Re_{g_B} = \Re_{g_A}$$

$$\Re_{m_{eq}} = \frac{1}{2} \times \frac{\lambda_m}{\mu \times S_A} = \frac{1}{2} \times \frac{6d}{1/150 \times 7{,}62 \times 10^{-4}} = 3 \times 10^4\, amp - vuelta / Wb$$

$$\Re_{g_{eq}} = \frac{g}{\mu_o \times S_{g_A}} \quad ; \quad S_{g_A} = (d/2 + 2g) \times (\frac{n \times t}{f.a} + 2g) = 8{,}6 \times 10^{-4}\, m^2$$

$$\Rightarrow \quad \Re_{g_{eq}} = \frac{0{,}5\times 10^{-3}}{4\pi\times 10^{-7}\times 8{,}6\times 10^{-4}} = 46{,}266\times 10^{4}\ amp-vuelta/Wb$$

$$\therefore \quad L = \frac{271^2}{3\times 10^4 + 46{,}266\times 10^4} = 0{,}1490H$$

*c)*

$$\Delta I_P = 0$$

*De la ley de Ampere :*

$$N\times I_m = H_m\times\lambda_m + \phi_B\times\Re_{g_{eq}} = H_m\times\lambda_m + B_m\times S_B\times\Re_{g_{eq}}$$

$$I_{m_{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(\frac{H_m\times\lambda_m}{N} + \frac{B_m\times S_B\times\Re_{g_{eq}}}{N}\right)$$

$$I_{m_{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(\frac{150\times 6d}{271} + \frac{\Re_{g_A}\times d\times n\times t}{271}\right) = 1{,}96\,A$$

$$\Delta I_{m_{ef}} = 1{,}96 - 0{,}12 = 1{,}84\,A$$

$$\%I_{m_{ef}} = \frac{\Delta I_{m_{ef}}}{0{,}12}\times 100\% = 1533$$

***PROBLEMA N° 3.6 :*** *Se quiere construir una bobina para 110 voltios, que tenga una reactancia de 300Ω a 60 Hz, con una pérdida en el núcleo no superior a 25watts. Se dispone de láminas de las dimensiones indicadas, material H-23, 0,5mm. Determinar las dimensiones del núcleo y el número de espiras que habría que utilizar para reunir los requisitos (f.a = 0,92)*

*Siendo :* $P_{FE} = 2{,}8\times B_{\max}{}^2\left(\frac{Watts}{Kg.}\right)$ ; $\delta_{H-23} = 7{,}75 gr/cm^3$

*Curva B- H :* $B_{\max} = \frac{1{,}696\times H_{\max}}{93 + H_{\max}}$ ; $225 \le H_{\max} \le 400$

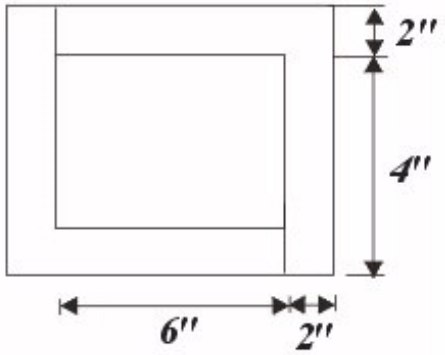



***Figura*** *P3.6.1*

*SOLUCIÓN:*

$V = 110 voltios \qquad f.a = 0,92$

$f = 60Hz \qquad X_m = 300\Omega$

$P_N \leq 25W \qquad P_{FE_{TOTAL}} = 2,8 \times B_{max}{}^2 \times W_{FE}$

$t = 5 \times 10^{-4} m \qquad \delta = 7,75 \times 10^3 Kg/m^3$

$$Vol_{FE} = A \times n \times t = 48 \times \left(2,54 \times 10^{-2}\right)^2 \times n \times 5 \times 10^{-4} = 1,548384 \times 10^{-5} \times n$$

$$W_{FE} = Vol_{FE} \times \delta = 1,548384 \times 10^{-5} \times n \times 7,75 \times 10^3 = 0,119999 \times n$$

$$P_{FE_{TOTAL}} = 2,8 \times B_{max}{}^2 \times 0,119999 \times n = 0,33599933 \times B_{max}{}^2 \times n = P_N$$

$$\Rightarrow \quad 0,33599933 \times B_{max}{}^2 \times n \leq 25$$

$$\therefore \quad B_{max}{}^2 \times n \leq 74,405 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$A_m = 2,54 \times 10^{-5} \times n$$

$$V_{ef} = 4,44 \times f \times B \times A_m \times N$$

$$B \times A_m \times N = \frac{V_{ef}}{4,44 \times f} \quad \Rightarrow \quad B \times n \times N = \frac{110}{4,44 \times 60 \times 2,54 \times 10^{-5}}$$

$$\therefore B_{max} \times n \times N = 16256,41 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$Im_{ef} = \frac{110}{300} = 0,3667\,A$$

$$N \times I_m = H_m \times \lambda_m \quad \Rightarrow \quad N \times 0,3667 \times \sqrt{2} = H_{max} \times 0,6096$$

$$H_{max} = 0,851 \times N$$

$$Pero: \quad 225 \leq H_{max} \leq 400 \quad \Rightarrow \quad 264,39 \leq N \leq 470 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$Para\ H_{max} = 225 \quad \Rightarrow \quad B_{max} = 1,2$$

$$\therefore De\ (1): \quad 1,2^2 \times n \leq 74,405$$

$$\Rightarrow n \leq 51,67 \quad por\ lo\ cual:$$

*n=50 láminas.*

$$En\ (2): N = \frac{16256,41}{1,2 \times 50} = 270\ espiras$$

$$\Rightarrow la\ profundidad\ del\ núcleo: h = \frac{n \times 5 \times 10^{-4}}{f.a} = \frac{50 \times 5 \times 10^{-4}}{0,92}$$

$$\therefore h = 0,027174m \equiv 2,7174cm.$$

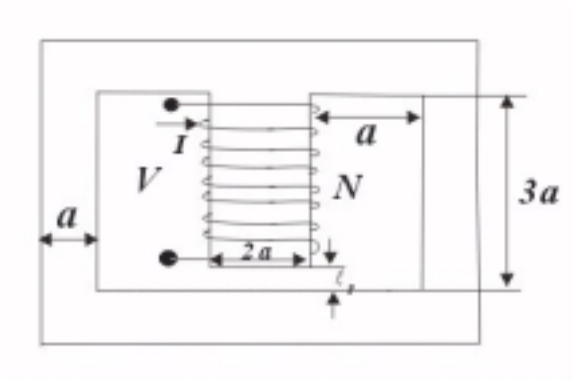
***PROBLEMA N° 3.7 :*** *Se ha diseñado un reactor con las características siguientes: 110V, 60 Hz , número de espiras 208, espesor de cada lámina 0,5 mm. f.a = 0,98, γ=7,75gr/cc, material H–23. Despreciar el efecto de borde y la caída de tensión en la resistencia del devanado.*

*Fue ensayado en el laboratorio, obteniéndose las siguientes lecturas de los instrumentos:*

| V(volts ) | f(Hz) | B(Tesla) | Watts/Kg. |
|---|---|---|---|
| 110 | 60 | 1,20 | 4,50 |

*Determinar:*

*a) El flujo magnético*
*b) El peso del material ferromagnético utilizado.*
*c) Los parámetros del circuito equivalente del reactor.*
*d) La inductancia.*




$a = 1''$

$\lambda_g = 0{,}41 \times 10^{-3}\, m$

***Figura*** *P3.7.1*

*SOLUCIÓN:*

*a) Primero hallaremos el número de láminas:*

$$V = 4{,}44 \times f \times N \times B_m \times A_m = 4{,}44 \times f \times N \times B_m \times 2 \times a \times n \times t$$

$$n = \frac{V}{4{,}44 \times f \times N \times B_m \times 2 \times a \times t}$$

$$n = \frac{110}{4{,}44 \times 60 \times 208 \times 1{,}2 \times 2 \times (2{,}54 \times 10^{-2}) \times (0{,}5 \times 10^{-3})}$$

$$n = 65{,}1298$$

$$Tomamos: \quad n = 65$$

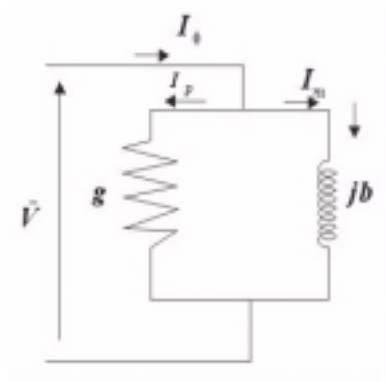
$$Ahora: \quad \phi = B_m \times A_m = 1{,}2 \times 2 \times (2{,}54 \times 10^{-2}) \times 65 \times (0{,}5 \times 10^{-3})$$

$$\therefore \phi = 1{,}9812 \times 10^{-3}\, Wb$$

*b)*

$$Volumen = Vol = Area \times n \times t$$
$$Vol = (30 \times a^2 - 6 \times a^2 - 2 \times a \times \lambda_g) \times n \times t = 15{,}46 \times 10^{-3} \times 65 \times 0{,}5 \times 10^{-3}$$
$$Vol = 502{,}45 cm^3$$
$$Entonces: \quad Peso = W = Vol \times \gamma = 502{,}45 \times 7{,}75 = 3894 gr = 3{,}894 Kg.$$

*d) Con los datos se obtiene el siguiente circuito equivalente:*




$$g = \frac{I_P}{V} \quad ; \quad \phi_m = \phi_g$$
$$\Rightarrow \quad B_m \times A_m = B_g \times A_g$$
$$B_m \times A_m = (\mu_o \times H_g) \times A_g$$
$$H_g = \frac{B_m \times A_m}{\mu_o \times A_g} \text{ ..... ..... } (1)$$

**Figura** *P3.7.2*

*Aplicando la ley de Ampere tenemos:*

$$H_m \times \lambda_m + H_g \times \lambda_g = N \times i \text{ .....(2)}$$
$$(1)\, en\, (2): \quad H_m \times \lambda_m + \frac{B_m \times A_m}{\mu_o \times A_g} \times \lambda_g = N \times i$$
$$i = \frac{1}{N} \times \left[ H_m \times \lambda_m + \frac{B_m \times A_m}{\mu_o \times A_g} \times \lambda_g \right] \text{.....(3)}$$
$$A_g = (2a + 2\lambda_g) \times (\frac{n \times t}{f.a} + 2\lambda_g) =$$
$$A_g = (2 \times 2{,}54 \times 10^{-2} + 2 \times 0{,}41 \times 10^{-3}) \times (\frac{65 \times 0{,}5 \times 10^{-3}}{0{,}98} + 2 \times 0{,}41 \times 10^{-3})$$
$$A_g = 1{,}7542 \times 10^{-3} m^2$$
$$A_m = 2 \times a \times n \times t = 1{,}651 \times 10^{-3} m^2$$
$$\lambda_m = 13a = 13 \times 2{,}54 \times 10^{-2} = 0{,}3302 m$$
$$como B_m = 1{,}2T \quad \Rightarrow de\, la\, curva B - H \quad H_m = 240 amp - vuelta/m$$
$$reemplazando\, en\, (3):$$
$$i = \frac{1}{208} \times \left[ 240 \times 0{,}3302 + \frac{1{,}2 \times 1{,}651 \times 10^{-3} \times 0{,}41 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 1{,}7542 \times 10^{-3}} \right] = 2{,}1526 A$$

*Tomando como referencia.* $\bar{V} = 110\angle 0°$

$i = 2{,}1526\angle -90° \Rightarrow \bar{I}_m = 1{,}5221\angle -90°$

$P_{pérdidas} = 4{,}5 \times 3{,}894 = 17{,}523\ Watts$

$$g = \frac{P_{pérdidas}}{V^2} = \frac{17{,}523}{110^2} = 1{,}45 \times 10^{-3}\ mhos$$

$I_P = g \times V = 1{,}45 \times 10^{-3} \times 110 = 0{,}1595 \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_P = 0{,}1595\angle 0°$

$\bar{I}_o = \bar{I}_P + \bar{I}_m = 1{,}53\angle -84°$

$$Y = \frac{I_o}{V} = \frac{1{,}53}{110} = 13{,}91 \times 10^{-3}\ mhos$$

$b_m = \sqrt{Y^2 - g^2} = 13{,}83 \times 10^{-3}\ mhos$

$\bar{V} = 110\angle 0° \quad , \quad \bar{I}_o = 1{,}53\angle -84°$

$\bar{I}_P = 0{,}1595\angle 0° \quad , \quad \bar{I}_m = 1{,}5221\angle -90°$

$g = 1{,}45 \times 10^{-3}\ mhos \quad , \quad b_m = 13{,}83 \times 10^{-3}\ mhos$

*d)*

$$L \times i = N \times \phi_m \quad \Rightarrow \quad L = \frac{N \times \phi_m}{i} = \frac{N \times B_m \times A_m}{i} = \frac{208 \times 1{,}2 \times 1{,}651 \times 10^{-3}}{2{,}1526}$$

$\therefore \quad L = 0{,}1914 H$

***PROBLEMA N° 3.8 :*** *Se tiene un reactor de núcleo E–I como se muestra en la figura cuyas características son:*

*# láminas (material H-23) = 36*
*# espiras = 460* $\lambda_g = 0{,}02''$
*Espesor de cada lámina = 0,5 mm.*
*Factor de apilamiento = 0,98*

*Despreciar la Resistencia del Bobinado.*

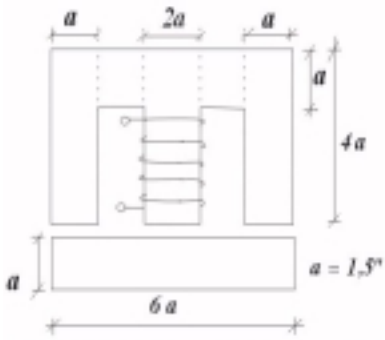



***Figura*** *P3.8.1*

*a) Si al reactor se le aplica una tensión senoidal de 220V eficaces, 60Hz.*
*Determine L (inductancia) considerando entrehierro.*

*b) Hallar L (inductancia) sin considerar entrehierro para a).*

*c) Si el reactor diseñado se somete a las siguientes pruebas:*

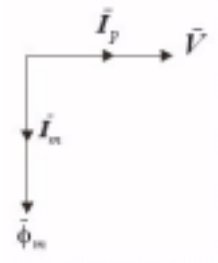
$Vef_1 = 220V \qquad f_1 = 60Hz \qquad Pt_1 = 20W$

$Vef_2 = 212{,}67V \quad f_1 = 58Hz \qquad Pt_2 = 19W$

*Determinar la tensión y potencia total (Ph y Pf) para 54Hz*

*SOLUCIÓN:*

*a) Sabemos que:* $L \times i_m = N \times \phi_m$



$$L = \frac{N \times \phi_m}{i_{m_{max}}}$$

***Figura** P3.8.2*

*Como la tensión aplicada es senoidal entonces:* $E = 4{,}44 \times N \times f \times \phi_{m_{max}}$

$$\Rightarrow \quad \phi_{m_{max}} = \frac{E}{4{,}44 \times N \times f} = \frac{220}{4{,}44 \times 460 \times 60} = 1{,}7952 \times 10^{-3}\, Wb$$

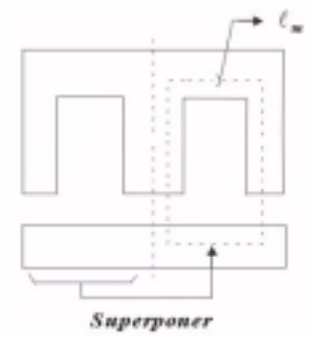



***Figura** P3.8.3*

$$A_g = (a + 2\lambda_g) \times \left( \frac{2 \times n \times t}{f.a} + 2\lambda_g \right)$$

$$A_g = (1{,}5 \times 0{,}0254 + 2 \times 0{,}02 \times 0{,}0254) \times \left( \frac{2 \times 36 \times 0{,}0005}{0{,}98} + 2 \times 0{,}02 \times 0{,}00254 \right)$$

$$A_g = 1{,}4767 \times 10^{-3}\, m^2$$

*Por la ley de Ampere :* $\oint \vec{H}.d\vec{l} = N \times i_m$

$$\Rightarrow \quad H_m \times \lambda_m + 2H_g \times \lambda_g = N \times i_m$$

$$i_{m_{max}} = \frac{1}{N} \times (H_m \times \lambda_m + 2H_g \times \lambda_g) = \frac{1}{N} \times (H_{m_{max}} \times \lambda_m + 2H_{g_{max}} \times \lambda_g) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$donde\ \lambda_m = 12a = 12 \times 1{,}5 \times 2{,}54 \times 10^{-2} = 0{,}4572m$$

$$\lambda_g = 0{,}02 \times 2{,}54 \times 10^{-2} = 5{,}08 \times 10^{-4}\, m$$

$$\therefore \quad A_m = 2 \times n \times t \times a = 2 \times 36 \times 0{,}5 \times 10^{-3} \times 1{,}5 \times 2{,}54 \times 10^{-2} = 1{,}3716 \times 10^{-3}\, m^2$$

$$\Rightarrow \quad \phi_{m_{max}} = B_{m_{max}} \times A_m = 1{,}7952 \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad B_{m_{max}} = 1{,}3088 Wb/m^2$$

$$De\,la\,curva\,B-H\;para\,el\,material\,H-23\,(0{,}5mm\,de\,espesor):\quad B_m = 1{,}3T$$

$$\Rightarrow\quad H_m = 325 amp-vuelta/m \qquad \therefore\quad H_{m_{max}} = 325 amp-vuelta/m$$

$$Asumiendo\ \phi_m = \phi_g \quad\Rightarrow\quad B_m = \frac{B_g \times A_g}{A_m} \quad\Rightarrow\quad B_g = \frac{B_m \times A_m}{A_g} = \mu_o \times H_g$$

$$H_{g_{max}} = \frac{\phi_{m_{max}}}{A_g \times \mu_o} = \frac{B_{m_{max}} \times A_m}{A_g \times \mu_o} = \frac{1{,}3088 \times 1{,}3716 \times 10^{-3}}{1{,}4767 \times 10^{-3} \times 4\pi \times 10^{-7}}$$

$$H_{g_{max}} = 9{,}674 \times 10^5\ amp-vuelta/m$$

$$En\ (\alpha):\quad i_{m_{max}} = \frac{1}{460} \times \left(325 \times 0{,}4572 + 2 \times 9{,}674 \times 10^5 \times 5{,}08 \times 10^{-4}\right)$$

$$i_{m_{max}} = 2{,}4597\,A$$

$$\therefore\quad L = \frac{460 \times 1{,}7952 \times 10^{-3}}{2{,}4597} = 0{,}34H$$

*b)*

$$Con\ \lambda_g = 0 \quad\Rightarrow\quad i_{m_{max}} = \frac{1}{N} \times H_{m_{max}} \times \lambda_m = \frac{1}{460} \times 325 \times 0{,}4572 = 0{,}323A$$

$$\therefore\quad L = \frac{460 \times 1{,}7952 \times 10^{-3}}{0{,}323} = 2{,}5566H$$

*c)*

$$CASO\ I:\quad Vef = 4{,}44 \times N \times f \times \phi_{m_{max}}$$

$$\Rightarrow\quad \phi_{m_{max}} = \frac{220}{4{,}44 \times 460 \times 60} = 1{,}7952 \times 10^{-3}\,Wb$$

$$CASO\ II:\quad \phi_{m_{max}} = \frac{212{,}67}{4{,}44 \times 460 \times 58} = 1{,}7953 \times 10^{-3}\,Wb$$

$$\therefore\quad B_{mI} = B_{mII} \quad\Rightarrow\quad Ph = a \times f \quad y \quad Pf = b \times f^2 \quad\Rightarrow\quad Ph + Pf = Pt$$

$$I)\quad 60 \times a + 60^2 \times b = 20$$

$$II)\quad 58 \times a + 58^2 \times b = 19$$

$$Resolviendo\ el\ sistema:\qquad a = 0{,}16092 \quad ; \quad b = 2{,}874 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow\quad Para\ f = 54Hz$$

$$Ph = 54 \times a = 8{,}68968W$$

$$Pf = 54^2 \times b = 8{,}380584W$$

$$\therefore\quad Pt(54Hz) = Ph + Pf = 17{,}07W$$

$$Vef = 4{,}44 \times 460 \times 54 \times 1{,}7952 \times 10^{-3} = 198V$$

**PROBLEMA N° 3.9 :** *Se quiere diseñar una bobina como la que se muestra, para 110V , 60 Hz, que presenta una $X_L$ =137 Ohmios con pérdidas en el núcleo no mayor de 1 Watts . Material H-23 (0,5 mm), f.a =0,9 y* $\lambda_g = 1mm$

$$p_{FE} = 1{,}8 \times B_{max}{}^{2} (Watts / Kg) \qquad \delta_{H-23} = 7750 Kg / m^{3} \qquad \frac{A_m}{A_g} = 0{,}8$$

*¿Determinar el número de láminas y el número de espiras de la bobina?*

*(sugerencia:* $L = \dfrac{N^2}{\Re}$ *)*

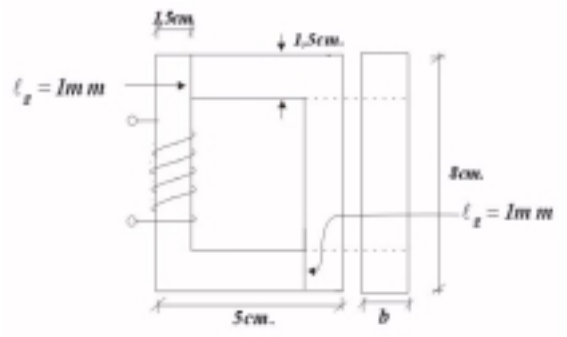



**Figura** *P3.9.1*

*SOLUCIÓN:*

$$\Re = \frac{\lambda_m}{\mu \times A_m} + \frac{2 \times \lambda_g}{\mu_o \times A_g} = \frac{1}{A_m} \times \left( \frac{\lambda_m}{\mu} + \frac{2 \times \lambda_g}{\mu_o} \times \frac{A_m}{A_g} \right)$$

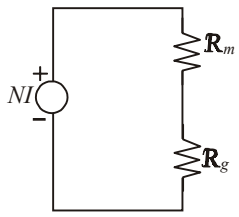
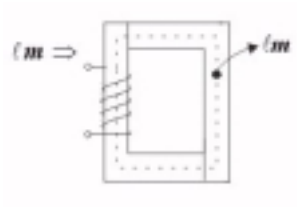



**Figura** *P3.9.2*




$$\lambda_m = 2 \times (8 - 1{,}5) + 2 \times (5 - 1{,}5) = 20cm = 0{,}2m.$$

**Figura** *P3.9.3*

*También:*

$$E_{ef} = 4{,}44 \times N \times f \times B_{max} \times A_m \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{E_{ef}}{4{,}44 \times f \times B_{max} \times A_m}$$

*Como:*

$$L = \frac{N^2}{\Re} = \frac{Eef^2}{4{,}44^2 \times f^2 \times B_{max}{}^2 \times A_m{}^2} \times \frac{A_m}{\left( \dfrac{\lambda_m}{\mu} + \dfrac{2 \times \lambda_g}{\mu_o} \times \dfrac{A_m}{A_g} \right)}$$

$$\Rightarrow L = \frac{Eef^2}{4{,}44^2 \times f^2 \times B_{max}{}^2 \times A_m \times \left( \dfrac{\lambda_m}{\mu} + \dfrac{2 \times \lambda_g}{\mu_o} \times \dfrac{A_m}{A_g} \right)}$$

*Pero:*

$$P_{FE} = p_{FE} \times Vol \times \delta = p_{FE} \times A_m \times \lambda_m \times \delta$$

$$\therefore \quad A_m = \frac{P_{FE}}{p_{FE} \times \lambda_m \times \delta} = \frac{P_{FE}}{1{,}8 \times B_{\max}{}^2 \times \lambda_m \times \delta}$$

*Reemplazando en L:*

$$L = \frac{Eef^2 \times 1{,}8 \times \lambda_m \times \delta \times B_{max}{}^2}{4{,}44^2 \times f^2 \times B_{max}{}^2 \times P_{FE} \times \left( \frac{\lambda_m}{\mu} + \frac{2 \times \lambda_g}{\mu_o} \times \frac{A_m}{A_g} \right)} \qquad \mu = \frac{B_{max}}{H_{max}}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{110^2 \times 1{,}8 \times 0{,}2 \times 7750}{4{,}44^2 \times 60^2 \times 1 \times \left( \frac{0{,}2}{\mu} + \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} \times 0{,}8 \right)} = \frac{475{,}686}{\left( \frac{0{,}2}{\mu} + 1273{,}24 \right)}$$

$$\Rightarrow \quad X_L = 2\pi \times 60 \times L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{137}{120\pi} = \frac{475{,}686}{\left( \frac{0{,}2}{\mu} + 1273{,}24 \right)}$$

*Resolviendo la igualdad anterior :*

$\mu = 5{,}6 \times 10^{-3}$

*De la curva* $\mu - H \quad \Rightarrow \quad H_{max} = 225 amp - vuelta / m$

*y de* $B - H \quad \Rightarrow \quad B_{max} = 1{,}18 Wb / m^2$

$$\Rightarrow \quad A_m = \frac{1}{1{,}8 \times 1{,}18^2 \times 0{,}2 \times 7750} = 2{,}574 \times 10^{-4}\, m^2$$

$$\therefore \quad N = \frac{110}{4{,}44 \times 60 \times 1{,}18 \times 2{,}574 \times 10^{-4}} = 1359{,}4 vueltas \approx 1350 vueltas$$

$$\Rightarrow \quad A_m = d \times n \times t = 1{,}5 \times 10^{-2} \times n \times 0{,}5 \times 10^{-3} = 2{,}574 \times 10^{-4}$$

$\therefore \quad n = 34{,}3 \approx 35$ *láminas*

***PROBLEMA N° 3.10 :*** *Se ha diseñado un reactor con las siguientes características*:

*Vnominal = 220 V*

*fnominal = 60 Hz*
*# de espiras N =405*
*# de placas = n = 80*
*Factor de apilamiento = 0,98*
*Densidad del Fe =7,65 gr /cc*
*Material : H – 23*
*t = 0,5 mm*

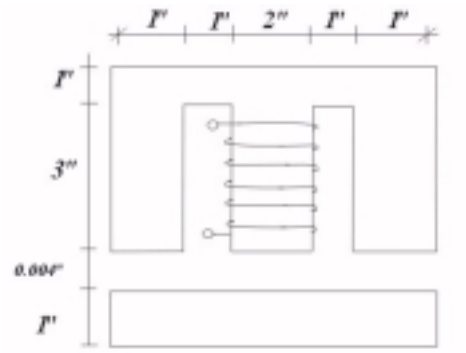



***Figura*** *P3.10.1*

a) *Si circula una corriente de 0.825Amp pico a pico por el bobinado de excitación, determinar la Inductancia L , considerando el entrehierro.*
b) *Determinar la Inductancia sin considerar el entrehierro, para determinar la corriente de excitación del caso (a).*

*c) Si al reactor diseñado, se le somete a las siguientes pruebas:*
*$Vef_1$ = 220 voltios $f_1$ = 60 Hz $Pt_1$= 20 watts*
*$Vef_2$ = 212.57 voltios $f_2$ = 58 Hz $Pt_2$ = 19 watts.*

*Determinar la tensión y potencia total ( Ph y Pf ), para f = 54 Hz*

*SOLUCIÓN:*

*a) Se sabe que:*

$$L \times i_{m_{\max}} = N \times \phi_{m_{\max}} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{N \times \phi_{m_{\max}}}{i_{m_{\max}}}$$

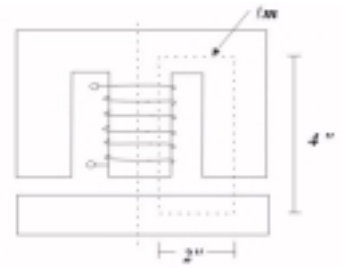
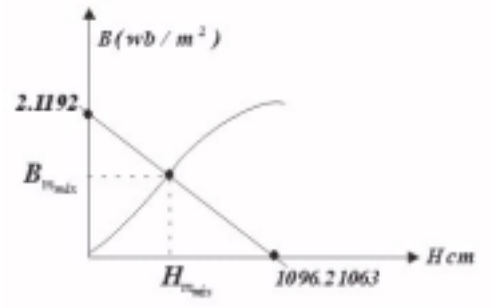



***Figura** P3.10.2*

*Aplicando la ley de Ampere:*



$$H_{m_{max}} \times \lambda_m + 2H_{g_{max}} \times \lambda_g = N \times i_{m_{max}}$$

$$H_{m_{max}} \times \lambda_m + 2\phi_{max} \times \Re_{eq_g} = N \times i_{m_{max}}$$

$$\phi_{max} = B_{m_{max}} \times A_m = B_{g_{max}} \times A_g$$

$$H_{m_{max}} \times \lambda_m + 2B_{m_{max}} \times A_m \times \Re_{eq_g} = N \times i_{m_{max}}$$

$$H_{m_{max}} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{m_{max}} = \frac{N \times i_{m_{max}}}{2 \times A_m \times \Re_{eq}}$$

$$B_{m_{max}} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{m_{max}} = \frac{N \times i_{m_{max}}}{\lambda_m}$$

$$\lambda_m = 12'' = 0{,}3048m$$

$$\lambda_{g1} = 0{,}004 = 1{,}016 \times 10^{-4}$$

$$A_m = 2 \times 2{,}54 \times 10^{-2} \times 80 \times 0{,}5 \times 10^{-3} = 2{,}032 \times 10^{-3}\, m^2$$

$$A_g = (a + \lambda_g) \times (b + \lambda_g) = 1{,}004 \times 2{,}54 \times 10^{-2} \times \left( \frac{2 \times 80 \times 0{,}5 \times 10^{-3}}{0{,}98} + 0{,}004 \times 2{,}54 \times 10^{-2} \right)$$

$$A_g = 2{,}08435 \times 10^{-3}\, m^2$$

$$\Re_{eq} = \frac{\lambda_g}{\mu_o \times A_g} = 3879{,}9265 amp - vuelta/Wb$$

*De la gráfica del H-23:*

***Figura*** *P3.10.3*

*Luego :*

$$L = \frac{N \times B_{max} \times A_m}{i_{m_{max}}} = \frac{405 \times 1{,}35 \times 2{,}032 \times 10^{-3}}{0{,}825}$$

$$L = 1{,}3467H$$

*b) Sin entrehierro:*

$$N \times i_{m_{max}} = H_{m_{max}} \times \lambda_m \quad \Rightarrow \quad H_{m_{max}} = \frac{N \times i_{m_{max}}}{\lambda_m} = \frac{405 \times 0{,}825}{0{,}3048}$$

$$H_{m_{max}} = 1096{,}21063 amp - vuelta/m$$

$$De\ la\ tabla\ B - H: \quad B_{m_{max}} = 1{,}56 Wb/m^2$$

$$L = \frac{N \times B_{m_{max}} \times A_m}{i_{m_{max}}} = 1{,}556H$$

*c) Se sabe:*

$$Vef = 4{,}44 \times N \times f \times A_m \times B_{max} \quad (\text{ para ondas senoidales })$$

$$Vef = K \times f \times B_{max} \; \Lambda \; \Lambda \; \Lambda \; \Lambda \; (\alpha)$$

*i)*

$$Vef_1 = 220V$$

$$f_1 = 60Hz \quad \Rightarrow \quad en\,(\alpha): \quad B_{1max} = {}^{3{,}6667}\!/_{K}$$

*ii)*

$$Vef_2 = 212{,}67V$$

$$f_1 = 58Hz \quad \Rightarrow \quad en\,(\alpha): \quad B_{2max} = {}^{3{,}6667}\!/_{K}$$

*Luego* $B_{\max}$ *= cte. en ambos casos entonces se verifica:*

$$Pt = a \times f + b \times f^2$$

$$Pt_1 = 60 \times a + 60^2 \times b = 20$$

$$Pt_2 = 58 \times a + 58^2 \times b = 20$$

*Resolviendo:* $P(f) = \frac{14}{87} f + \frac{1}{348} f^2$

*Donde f está en Hz y Pt en Watts*

*Luego para f=54Hz:*

*Pt=17,0689watts*

*Ph=8,6896watts*

*Pf=8,37931watts*

$$Vef = \frac{54}{60} \times 220 = 198V$$

***PROBLEMA N° 3.11 :*** *Se tiene un reactor de núcleo E – I como se muestra en la figura adjunta, cuyas características son :*
*Número de láminas ( material H – 23 ) = 36*
*Número de espiras = 460, espesor de cada lámina = 0, 5 mm.*
*Factor de Apilamiento = 0,98. Despreciar la resistencia del bobinado*

*a) Si el reactor es alimentado con una corriente continua de 0.72 amperios:*
   *a.1) Calcular el valor de la inductancia para* $\lambda_g$ *= 0,02´´ , siendo a=1,5´´.*

*b) Si al reactor se le aplica una tensión senoidal de 220 V eficaces, 60 Hz, se registra una potencia de 20 watts, siendo las pérdidas por histéresis de 14 watts ( considerar ℓg = 0,02 pulg) calcular:*
   *b.1) La inductancia del reactor*
   *b.2) Los parámetros del circuito equivalente del reactor.*

*SOLUCIÓN:*

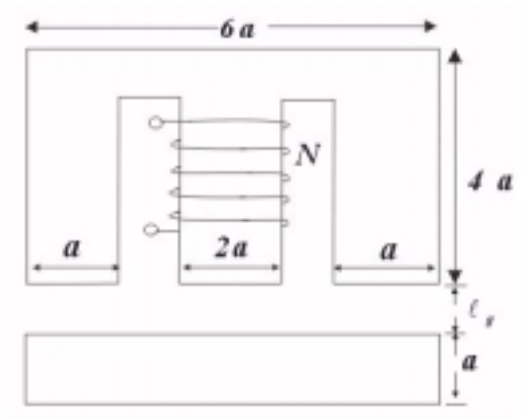



***Figura*** *P3.11.1*

$$a = 1{,}5'' = 1{,}5 \times 2{,}54 = 3{,}81cm = 0{,}0381m$$

*a)*

$$I = 0{,}72\,A$$

$$\lambda_g = 0{,}02'' = 5{,}08 \times 10^{-4}\,m$$

$$L = \frac{N \times B_{max} \times A_m}{I}\,\Lambda\,\Lambda\,\Lambda\,(\alpha)$$

$$donde\ A_m = 2 \times a \times n \times t = 2 \times 0{,}0381 \times 36 \times 0{,}5 \times 10^{-3} = 1{,}3716 \times 10^{-3}\,m^2$$

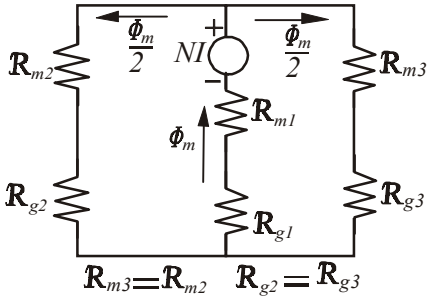



***Figura*** *P3.11.2*

*Del circuito magnético:*

$$N\times I=\phi_m\times(\Re_{m1}+\frac{\Re_{m2}}{2})+\phi_m\times(\Re_{g1}+\frac{\Re_{g2}}{2})$$

$$\phi_m=\phi_g \quad \Rightarrow \quad B_g=\frac{B_m\times A_m}{A_g}$$

$$N\times I=H_m\times\left(\lambda_{m1}+\frac{\lambda_{m2}}{2}\right)+B_m\times A_m\times\Re_g \Lambda\Lambda\Lambda\,(\beta)$$

$$Si \quad H_m=0 \quad \Rightarrow \quad B_{m1}=\frac{N\times I}{A_m\times\Re_g}\Lambda\Lambda\Lambda\,(\theta)$$

$$Si \quad B_m=0 \quad \Rightarrow \quad H_{m1}=\frac{N\times I}{\left(\lambda_{m1}+\frac{\lambda_{m2}}{2}\right)}\Lambda\Lambda\Lambda\,(\psi)$$

$$A_{g1}=(2a+2\lambda_g)\times(\frac{n\times t}{f.a}+2\lambda_g)=(2\times0,0381+2\times5,08\times10^{-4})\times(\frac{36\times0,5\times10^{-3}}{0,98}+10,16\times10^{-4})$$

$$A_{g1}=1,4967\times10^{-3}m^2$$

$$A_{g2}=(a+2\lambda_g)\times(\frac{n\times t}{f.a}+2\lambda_g)=(0,0381+2\times5,08\times10^{-4})\times(\frac{36\times0,5\times10^{-3}}{0,98}+10,16\times10^{-4})$$

$$A_{g2}=7,579\times10^{-4}m^2$$

$$\Re_{g1} = \frac{\lambda_g}{\mu_o\times A_{g1}} = \frac{5,08\times10^{-4}}{4\pi\times10^{-7}\times1,4967\times10^{-3}} = 270096,5828 \quad amp-vuelta/Wb$$

$$\Re_{g2} = \frac{\lambda_g}{\mu_o\times A_{g2}} = \frac{5,08\times10^{-4}}{4\pi\times10^{-7}\times7,579\times10^{-4}} = 533386,4038 \quad amp-vuelta/Wb$$

$$\Re_g = \Re_{g1}+\frac{\Re_{g2}}{2} = 536789,7847 \quad amp-vuelta/Wb$$

$$\lambda_{m1} = 4a = 4\times0,0381 = 0,1524m$$

$$\lambda_{m2} = 9a = 9\times0,0381 = 0,3429m$$

$$\lambda_m = \lambda_{m1}+\frac{\lambda_{m2}}{2} = 0,32385m$$

$$De\,(\theta): \quad B_{m1} = \frac{460\times0,72}{1,3716\times10^{-3}\times536789,7847} = 0,4499 \approx 0,45Wb/m^2$$

$$De\,(\psi): \quad H_{m1} = \frac{460\times0,72}{0,32385} = 1022,696\,amp-vuelta/m$$

*De la curva B-H:*

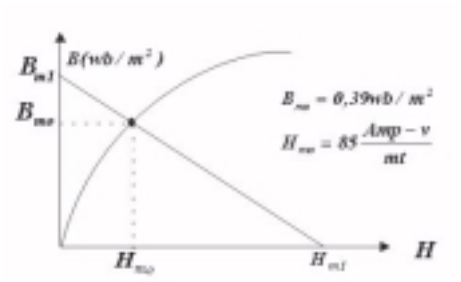



***Figura*** *P3.11.3*

$$De\ (\alpha):\quad L=\frac{460\times 1{,}3716\times 10^{-3}\times 0{,}39}{0{,}72}=0{,}3418H$$

*b)*

*V=220voltios*
*f=60Hz*
*Ph=20watts=Ph+Pf=14+Pf*
*Entonces: Pf=6watts*

*b.1)*

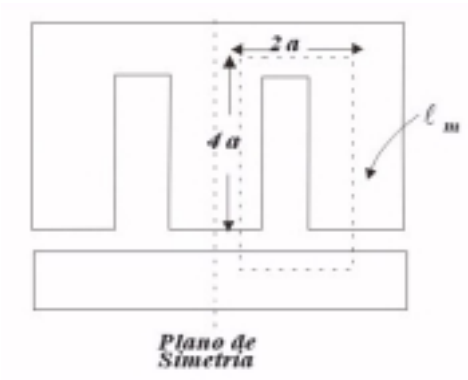
$$L=\frac{N\times\phi_{max}}{I_{max}}$$

$$Se\ sabe\ que:\quad Vef=4{,}44\times N\times f\times B_{max}\times A_m$$

$$B_{max}=\frac{Vef}{4{,}44\times N\times f\times A_m}=\frac{220}{4{,}44\times 460\times 60\times 1{,}3716\times 10^{-3}}=1{,}30889Wb/m^2$$

$$De\ la\ curva\ B-H:$$

$$H_m ef=310amp-vuelta/m\qquad\Rightarrow\qquad H_{m_{max}}=438{,}4062amp-vuelta/m$$




$$\lambda_m=12a=0{,}4572m$$

**Figura** *P3.11.4*

$$\oint \vec{H}.d\vec{l}=N\times I_{max}$$

$$H_m\times\lambda_m+2\times H_g\times\lambda_g=N\times I_{max}\quad\Rightarrow\quad I_{max}=\frac{1}{N}\times\left(H_m\times\lambda_m+2\times H_g\times\lambda_g\right)$$

$$además:\qquad \phi_m=B_m\times A_m=B_g\times A_g\quad\Rightarrow\quad B_g=\frac{B_m\times A_m}{A_g}$$

$$H_g=\frac{B_m\times A_m}{A_g\times\mu_o}$$

*Por lo tanto:*

$$I_{max} = \frac{1}{N} \times \left( H_{m_{max}} \times \lambda_m + 2 \times \lambda_g \times \left( \frac{B_m \times A_m}{A_g \times \mu_o} \right) \right)$$

$$I_{max} = \frac{1}{460} \times \left( 438{,}4062 \times 0{,}4572 + 2 \times 5{,}08 \times 10^{-4} \times \left( \frac{1{,}30889 \times 1{,}3716 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 1{,}4967 \times 10^{-3}} \right) \right)$$

$$I_{max} = 2{,}544\,A$$

*De* $(\alpha)$ *:*

$$L = \frac{460 \times 1{,}30889 \times 1{,}3716 \times 10^{-3}}{2{,}544} = 0{,}3246\,H$$

*b.2) Parámetros del circuito equivalente del reactor:*

$$g_P = \frac{Pn}{Vef^2} = \frac{20}{220^2} = 4{,}132 \times 10^{-4}\ mhos$$

$$R_P = 2420\Omega$$

$$b_m = \frac{I_{m\,ef}}{Vef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2} \times Vef} = \frac{2{,}544}{220 \times \sqrt{2}} = 8{,}177 \times 10^{-3}\ mhos$$

***PROBLEMA N° 3.12 :*** *Si el reactor del problema anterior es sometido a una prueba adicional para la determinación de las pérdidas en el núcleo se logró aplicar una tensión de :*

*V(t)= 207,03 sen 314,16t + 156 cos 314,16 t*

*Calcular:*

*a) Las pérdidas por histéresis y foucault.*

*b) La tensión y frecuencia aplicada*

*SOLUCIÓN:*

*Se aplica:*

$$V(t) = 207{,}03 \times sen\,314{,}16t + 156\cos 314{,}16t\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ (\alpha)$$

$$V(t) = \sqrt{2} \times V_{ef}' \times sen(314{,}16t + \varphi)$$

$$V(t) = \sqrt{2} \times V_{ef}' \times sen\,314{,}16t \times \cos\varphi + \sqrt{2} \times V_{ef}' \times \cos 314{,}16t \times sen\varphi\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ (\beta)$$

*Igualando* $(\alpha)$ *y* $(\beta)$ *:*

$$\begin{cases} \sqrt{2} \times V_{ef}' \times \cos\varphi = 207{,}03 \\ \sqrt{2} \times V_{ef}' \times sen\varphi = 156 \end{cases} \quad V_{ef}' = 183{,}3 \qquad \varphi = 37°$$

$$2\pi \times f' = 314{,}16 \quad \Rightarrow \quad f' = 50\,Hz$$

*a)*

$$B_{max}' = \frac{V_{ef}'}{4{,}44 \times f' \times N \times A_m} = \frac{183{,}3}{4{,}44 \times 50 \times 460 \times 1{,}3716 \times 10^{-3}} = 1{,}30889 Wb/m^2$$

*Inicialmen te :*

$$V(t) = 220\sqrt{2} \times sen 377t \qquad \Rightarrow \qquad B_{max} = 1{,}30889 Wb/m^2$$

$$Ph = K_h \times f \times B_{max}^{1,6}$$

$$Pf = K_f \times f^2 \times B_{max}^2 \quad ; \quad como\ B_{max} = B_{max}' :$$

$$Ph = K_1 \times f \qquad Ph' = K_1 \times f'$$

$$Pf = K_2 \times f^2 \qquad Pf' = K_2 \times f'^2$$

$$Ph' = \frac{f'}{f} \times Ph = \frac{50}{60} \times 14 = 11{,}67 Watts$$

$$Pf' = \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \times Pf = \left(\frac{50}{60}\right)^2 \times 6 = 4{,}167 Watts$$

$$Pn' = 15{,}837 Watts$$

*b)*

$$V_{ef}' = 183{,}3 voltios$$

$$f' = 50 Hz$$

***PROBLEMA N° 3.13*** **:** *Se ha diseñado un reactor de las características siguientes:*

*110 voltios , 60 Hz, número de láminas : 76,*
*espesor de lámina 0,5 mm, f.a. = 0,97,*
*densidad del fierro = 7,65 gr/cm$^3$, material H- 23.*

*Si se aplica a la bobina de excitación un voltaje de 110 voltios a 60 Hz y se obtienen unas pérdidas por foucault e histéresis de 6 y 12 watts respectivamente, la densidad magnética máxima obtenida es 1,1 Wb/m$^2$. La resistencia del bobinado medida en DC es 1,2ohmios, considerar:*

$$R_{AC} = 1{,}25\ R_{DC}\ .$$

*Determinar:*

*a) La inductancia del reactor*
*b) Las pérdidas en el cobre*
*c) Los parámetros del circuito equivalente del reactor*
*d) Las pérdidas por Kilogramo (watts/kg) del material ferromagnético*
*e) La corriente que absorbe el reactor*
*f) La energía almacenada en el hierro*
*g) La energía almacenada en el entrehierro a = 1,5 pulg.* $\lambda_g = 0{,}03 \times 10^{-3}$ *pulg.*

*SOLUCION:*

*Datos:*

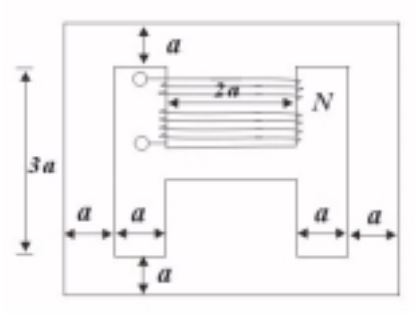



**Figura** *P3.13.1*

$$110V \qquad f = 60Hz$$

$$b_{ef} = n \times t = 76 \times 5 \times 10^{-4} = 0{,}038m$$

$$b_{geom} = \frac{n \times t}{f.a} = \frac{0{,}038}{0{,}97} = 0{,}0392$$

$$Ph = 6watts$$

$$Pf = 12watts$$

$$a = 1{,}5'' = 1{,}5 \times 2{,}54 \times 10^{-2} = 0{,}0381m$$

$$\lambda_g = (0{,}03 \times 10^{-3})'' = 7{,}62 \times 10^{-7}\, m$$

$$A_g = (2a + \lambda_g) \times (b_{geom} + \lambda_g) = 2{,}9871 \times 10^{-3}\, m^2$$

$$A_m = 2{,}8956 \times 10^{-3}\, m^2$$

*Luego tenemos, cortando a la mitad y superponiendo:*

$$\oint \vec{H}.d\vec{l} = N \times I_{max}$$

$$N \times I_{max} = H_{max} \times \lambda_m + H_g \times \lambda_g \;\Lambda\;\Lambda\;\Lambda\;\Lambda\; (\alpha)$$

$$\lambda_m = 12a = 0{,}4572\, m$$

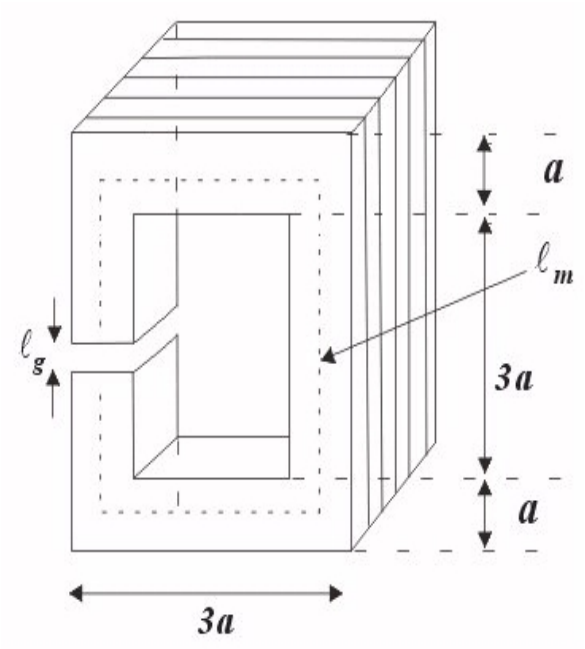



**Figura** *P3.13.2*

*a)*

$$Sabemos\,que\,B_{max} = 1{,}1\,Wb/m^2 \quad de\,la\,curva\,B-H: \quad H_{ef} = 180\,amp-vuelta/m$$

$$E_{ef} = 4{,}44 \times f \times N \times A_m \times B_{max} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{E_{ef}}{4{,}44 \times f \times A_m \times B_{max}}$$

$$N = \frac{110}{4{,}44 \times 60 \times 2{,}8956 \times 10^{-3} \times 1{,}1} = 129{,}63$$

$$\Rightarrow \quad Tomamos \;\; N = 130\,vueltas$$

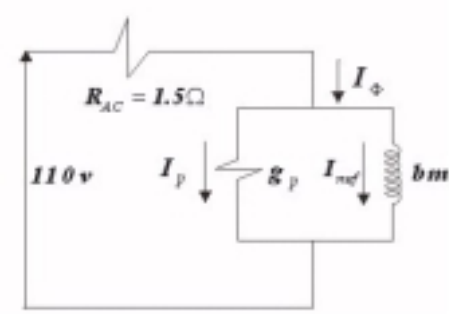
$$También \;\; B_m \times A_m = B_g \times A_g = \mu_o \times H_g \times A_g \quad \Rightarrow \quad H_g = \frac{B_m \times A_m}{\mu_o \times A_g}$$

$$De(\alpha): \quad I_{max} = \frac{1}{N} \times \left[ H_{max} \times \lambda_m + \frac{B_m \times A_m}{\mu_o \times A_g} \times \lambda_g \right]$$

$$I_{max} = \frac{1}{130} \times \left[ 180\sqrt{2} \times 0{,}4572 + \frac{1{,}1 \times 2{,}8956 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 2{,}9871 \times 10^{-3}} \times 7{,}62 \times 10^{-7} \right] = 0{,}9\,Amp$$

$$También \quad L = \frac{N \times \phi_{max}}{I_{max}} = \frac{130 \times 1{,}1 \times 2{,}8956 \times 10^{-3}}{0{,}9} = 0{,}46\,H$$

*b) Circuito equivalente:*




$$g_P = \frac{P_N}{110^2} = \frac{18}{110^2} = 1{,}4876 \times 10^{-3}\,mhos$$

$$I_P = 110 \times g_P = 0{,}163636\,Amp$$

$$I_{mef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = 0{,}636396\,Amp$$

$$\Rightarrow \quad I_\phi = 0{,}657\,Amp$$

**Figura** *P3.13.3*

$$P_{Cu} = R_{AC} \times I_\phi^{\,2} = 1{,}5 \times 0{,}657^2 = 0{,}6475\,Watts$$

*c)*

$$Y_\phi = \frac{I_\phi}{110} = 5{,}9727 \times 10^{-3}\,mhos \qquad b_m = \sqrt{Y_\phi^{\,2} - g_P^{\,2}} = 5{,}7845 \times 10^{-3}\,mhos$$

$$\therefore \quad g_P = 1{,}4876 \times 10^{-3}\,mhos \qquad b_m = 5{,}7845 \times 10^{-3}\,mhos$$

*d) Pérdidas por Kilogramo:*

$$Pérdidas / Kg = \frac{P_N}{\rho \times Vol}$$

$$Vol = [6a \times 5a - 2 \times 3a \times a] \times n \times t = 24a^2 \times n \times t = 1{,}32386832 \times 10^{-3}\, m^2$$

$$Pérdidas / Kg = \frac{18}{7650 \times 1{,}32386832 \times 10^{-3}} = 1{,}7774 Watts / Kg$$

*e)La corriente que absorbe el reactor es:* $I_\phi$

$$\therefore \bar{I}_\phi = 0{,}657 \angle -75{,}58°$$

*f) Energía almacenada:W*

$$W_{HIERRO} = W_{SISTEMA} - W_{ENTREHIERRO}$$

$$W_{HIERRO} = \frac{L \times I_{mef}^{\ 2}}{2} - W_g \ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda \ (\beta)$$

$$B_g = \frac{B_m \times A_m}{A_g} = \frac{1{,}1 \times 2{,}8956 \times 10^{-3}}{2{,}8971 \times 10^{-3}} = 1{,}0663\, Wb / m^2$$

$$W_g = Vol \times \int_0^{B_g} \frac{B.dB}{\mu_o} = \frac{B_g^{\ 2}}{2 \times \mu_o} \times Vol$$

$$W_g = \frac{B_g^{\ 2}}{2 \times \mu_o} \times A_g \times \lambda_g = \frac{1{,}0663^2 \times 2{,}9871 \times 10^{-3} \times 7{,}62 \times 10^{-7}}{8\pi \times 10^{-7}}$$

$$W_g = 1{,}02973 \times 10^{-3}\, Joules$$

$$W_{SISTEMA} = \frac{0{,}46}{2} \times 0{,}636396^2 = 0{,}09315\ Joules$$

*Al reemplazar en (β), tenemos :* $W_{HIERRO} = 0{,}09212\ Joules$

*g) Energía almacenada en el entrehierro*

$$W_g = 1{,}02973 \times 10^{-3}\ Joules$$

***PROBLEMAS N° 3.14 :*** *El reactor de núcleo de hierro, mostrado en la figura, está compuesto de 77 láminas de 0,5 mm de espesor, ancho de núcleo de 1,5 pulgadas, la bobina tiene 142 espiras cuya resistencia medida con tensión continua es 0,25 ohmios, ha sido cometido a un ensayo de laboratorio, cuyas lecturas de los instrumentos son:*

*(para* $\lambda_g = 0$*)*

*V: 75 volt*
*$I_\phi$ : ---*
*W : 2,4 watts*
*f : 60 Hz*

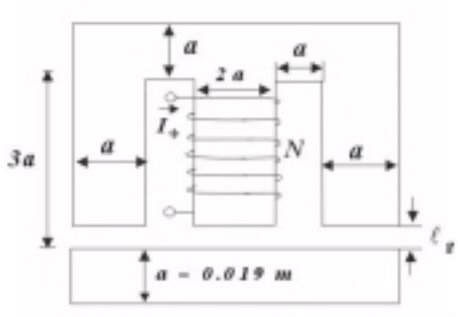



***Figura*** *P3.14.1*

*Además se conoce dos puntos de la curva $B_{máx} - H_{ef}$*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B_{máx}$ | 1,06 | 1,7 | $W_b/m^2$ |
| $H_{ef}$ | 200 | 300 | Amp/m |

*Utilizar la ecuación de Froelich*
*Considerar $R_{AC} = 1,2\ R_{DC}$*
*f.a = 0,95*

*a) Determinar la densidad de flujo cuando se aplica 75 V, 60 Hz*

*b) Determinar los parámetros del circuito equivalente (para 75 V, 60 Hz), las corrientes de magnetización y de pérdidas, además las pérdidas en el cobre.*

*c) Determinar el valor de la inductancia para $\lambda_g = 0$, V = 75 V, f= 60 Hz.*

d) *Para el caso de tener un entrehierro de $1,6x10^{-7}$m, y aplicando 75 Volts, 60 Hz. Determinar los parámetros del circuito equivalente, la inductancia y pérdidas en el cobre.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$V_{ef} = 4,44 \times B_{max} \times A_m \times f \times N$$

$$A_m = 2 \times a \times n \times t = 2 \times 0,01905 \times 77 \times 5 \times 10^{-4}$$

$$A_m = 1,46685 \times 10^{-3}\ m^2$$

$$B_{max} = \frac{V_{ef}}{4,44 \times A_m \times f \times N}$$

$$B_{max} = \frac{75}{4,44 \times 1,46685 \times 10^{-3} \times 60 \times 142}$$

$$B_{max} = 1,351615 Wb / m^2$$

*b) Para la ecuación de Froelich:*

$$B_{max} = \frac{a \times H_{ef}}{b + H_{ef}}$$

*de los datos :*

$$1,06 = \frac{a \times 200}{b + 200}$$

$$1,7 = \frac{a \times 300}{b + 300}$$

$$Resolviendo\ obtenemos: \quad a = -8{,}190909021, \quad b = -1745{,}454545$$

$$para: B_{max} = 1{,}351615\ Wb/m^2$$

$$\frac{H_{ef} \times a}{b + H_{ef}} = B_{max} \rightarrow De\ la\ curva\ B - H: H_{ef} = 247{,}228$$

$$Por\ la\ ley\ de\ Ampere:$$

$$N \times I_{m\,ef} = H_{ef} \times \lambda_m$$

$$I_{m\,ef} = \frac{247{,}228 \times 12 \times 0{,}01905}{142}$$

$$I_{m\,ef} = 0{,}398 Amp$$

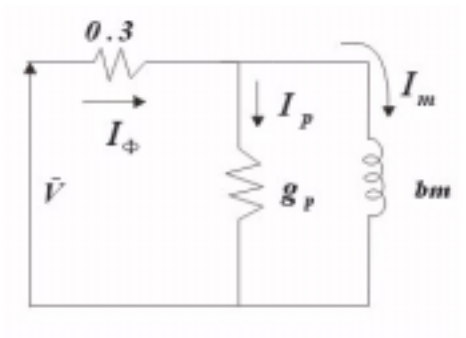



**Figura** *P3.14.2*

$$P_N = 2{,}4 - P_{Cu}$$
$$P_N = V^2 \times g_P$$
$$P_{Cu} = 0{,}3 \times I_\phi^{\ 2} \qquad de\ donde:$$
$$g_P = \frac{2{,}4 - 0{,}3 \times I_\phi^{\ 2}}{75^2}$$
$$I_P = V \times g_P = \frac{2{,}4 - 0{,}3 \times I_\phi^{\ 2}}{75}$$

$$I_\phi^{\ 2} = I_P^{\ 2} + I_m^{\ 2}$$
$$I_\phi^{\ 2} = \left( \frac{2{,}4 - 0{,}3 \times I_\phi^{\ 2}}{75} \right)^2 + 0{,}398^2$$
$$\therefore I_\phi = 0{,}399236586 Amp$$
$$\Rightarrow \quad I_P = \sqrt{I_\phi^{\ 2} - I_m^{\ 2}} = 0{,}03136244 Amp$$
$$g_p = \frac{I_P}{V} \Rightarrow \quad g_p = 4{,}1817 \times 10^{-4}\ mhos \quad \Rightarrow \quad R_p = 2391{,}3955 \Omega$$
$$b_m = \frac{I_m}{V} \Rightarrow \quad b_m = 5{,}307 \times 10^{-3}\ mhos \quad \Rightarrow \quad X_m = 188{,}441 \Omega$$
$$P_{Cu} = I_\phi^{\ 2} \times R_{AC} \Rightarrow \quad P_{Cu} = 0{,}047817 Watts$$

*c)*

$$L = N \times \frac{\phi_{ef}}{I_{m\,ef}} \quad ; \quad \phi_{ef} = B_{ef} \times A_m = 0{,}9557 \times 1{,}46685 \times 10^{-3} = 1{,}4019213 \times 10^{-3}$$

$$L = \frac{142 \times 1{,}4019213 \times 10^{-3}}{0{,}398} = 0{,}5H$$

*d)*

$\lambda_g = 1{,}6 \times 10^{-7}\, m$

$V = 75 voltios$

$f = 60 Hz$

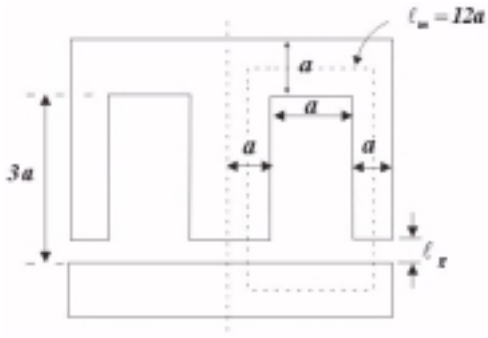



***Figura*** *P3.14.3*

$$N \times I_{m\,ef} = H_{ef} \times \lambda_m + 2 \times H_g \times \lambda_g$$

$$como: \quad \phi_{max} = \frac{V_{ef}}{4{,}44 \times f \times N} = \frac{75}{4{,}44 \times 60 \times 142}$$

$\phi_{max} = 1{,}982616 \times 10^{-3} Wb \qquad B_{max} = 1{,}3516\, Wb / m^2$

$\phi_{ef} = 1{,}40192 \times 10^{-3} Wb \qquad B_{ef} = 0{,}955736\, Wb / m^2$

*De la ecuación de Froelich:*

$$H_{ef} = 247{,}22836 amp - vuelta / m$$

$$A_g = (a + 2\lambda_g) \times \left( \frac{77 \times 5 \times 10^{-4} \times 2}{0{,}95} + 2\lambda_g \right) = 1{,}544 \times 10^{-3}\, m^2$$

$$como: \quad P_N = Ph + Pf$$

$Ph + Pf$ *están en función de* $B_{maz}$ *y* $f$

$\Rightarrow \quad P_N$ *: es el mismo del caso anterior.*

$V = 75 \quad , \quad f = 60$

$$\Rightarrow \quad I_P = 0{,}03136 \quad \Rightarrow \quad g_P = 4{,}1817 \times 10^{-4}\, mhos \Rightarrow R_P = 2391{,}3955 \Omega$$

$$N \times I_m = 247{,}228 \times 0{,}2286 + 2 \times \left( \frac{1{,}40192 \times 10^{-3} \times 1{,}6 \times 10^{-7}}{1{,}2566 \times 10^{-6} \times 1{,}544 \times 10^{-3}} \right)$$

$$I_m = 0{,}399631\ Amp$$

$$b_m = \frac{I_m}{V} \quad \Rightarrow \quad b_m = 5{,}3284 \times 10^{-3}\, mhos \quad \Rightarrow \quad X_m = 187{,}673 \Omega$$

$$I_\phi = \sqrt{I_P^{\,2} + I_m^{\,2}} = 0{,}4\, Amp$$

$$P_{Cu} = 0{,}3 \times I_\phi^{\,2} = 0{,}048 Watts$$

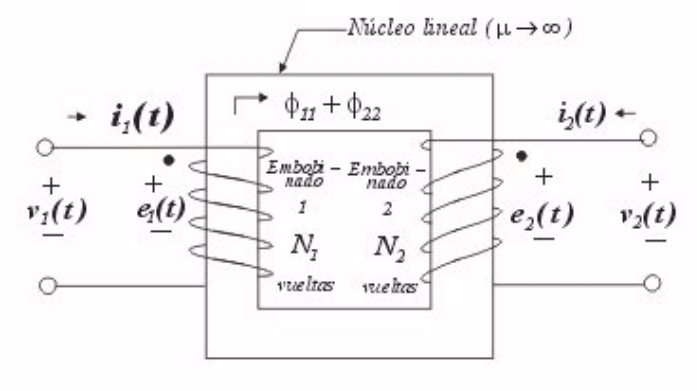
$$L = \frac{N \times \phi}{I_m} = 0{,}498142 H$$

# CAPÍTULO IV
# ANÁLISIS DEL CIRCUITO DEL TRANSFORMADOR CON NÚCLEO DE AIRE

## 4.1 EL TRANSFORMADOR IDEAL

*El transformador es un aparato que transfiere energía, sirve para transformar voltajes, corrientes e impedancias.*

*El núcleo puede ser lineal (núcleo de aire)*
*El núcleo puede ser no lineal (núcleo ferromagnético)*
*El diagrama esquemático de un transformador ideal se muestra a continuación:*




*Un Transformador Ideal*
***Figura** 4.1.1*

*En un transformador ideal se hacen las siguientes suposiciones:*

1) *La curva B-H del material del núcleo es lineal y de un solo valor. La permeabilidad del núcleo es muy grande, u→∞. El núcleo no tiene pérdidas.*

2) *Los flujos establecidos por las corrientes en los embobinados son encerrados enteramente en el núcleo. En otras palabras, el acoplamiento magnético de los dos embobinados es perfecto. Todo el flujo establecido por una bobina enlaza al de la otra y viceversa.*

3) *Los embobinados no tienen resistencia.*

4) *Son despreciables la capacitancia entre los embobinados aislados y el núcleo, así como entre las vueltas y entre los embobinados.*

*Otras consideraciones:*

*1) El flujo en el núcleo en dirección de las manecillas del reloj es positivo.*

*2) Las corrientes positivas son aquellas que establecen flujos positivos.*

*3) Los puntos colocados en las terminales superiores de los dos embobinados son llamados marcas de polaridad. Su significado es el siguiente: Una corriente variable en el tiempo entrando por la terminal puntuada de un embobinado, establece un flujo en el núcleo en tal dirección que los voltajes inducidos en los dos embobinados tienen la misma polaridad relativa (en este caso positiva) al de las terminales puntuadas.*

## 4.2 RELACIONES BÁSICAS EN UN TRANSFORMADOR IDEAL:

*Los siguientes datos describen al embobinado 1:*

$V_{1(t)}$ *voltaje entre los terminales del embobinado 1.*
$i_{1\,(t)}$ *corriente en el embobinado 1.*
$\phi_{11(t)}$ *flujo establecido por* $i_1\,(t)$
$e_{1(t)}$ *voltaje inducido en el embobinado 1 por el flujo que lo enlaza*
$N_1$ *# de vueltas en el embobinado 1.*

*Hagamos que* $V_2(t)$, $i_2(t)$, $\phi_{22}(t)$, $e_2(t)$ *y* $N_2$ *sean los datos correspondientes al embobinado 2.*
$\phi_{11(t)}$ *como* $\phi_{22(t)}$ *son confinados dentro del núcleo.*

*El flujo total* $\phi_{m(t)}$ *será:*

$$\phi_m(t) = \phi_{11}(t) + \phi_{22}(t) \quad .....(4-1)$$

*Los voltajes inducidos en los embobinados 1 y 2 de acuerdo con la ley de Faraday son los siguientes:*

$$e_1(t) = N_1 \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad .....(4-2)$$

$$e_2(t) = N_2 \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad .....(4-3)$$

$$\frac{e_1(t)}{e_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \quad ..... \quad (4-4)$$

*Como los embobinados no tienen resistencia, la aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff nos da :*

$$V_1(t) = e_1(t) \quad .....(4-5)$$

$$V_2(t) = e_2(t) \quad .....(4-6)$$

$$\frac{V_1(t)}{V_2(t)} = \frac{e_1(t)}{e_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \quad .....(4-7)$$

*Como u→∞., la fmm neta requerida para establecer flujos en el núcleo es cero:*

$$N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t) = 0 \quad .....(4-8)$$

*de la cual obtenemos:*

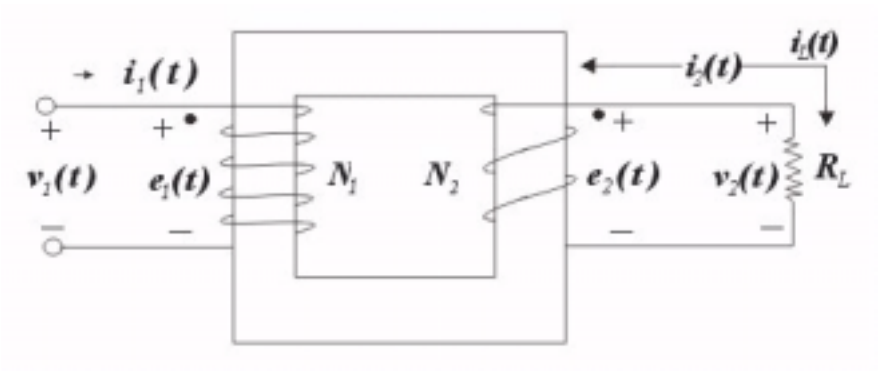
$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{N_2}{N_1} \quad .....(4-9)$$

*El signo negativo indica que las corrientes son de diferente signo en un mismo instante. La f.m.m. del embobinado 1 es balanceada por la f.m.m. del embobinado 2.*

*Se logra obtener:*

$$V_1(t) i_1(t) = -V_2(t) i_2(t) \quad .....(4-10)$$

*La energía circula en direcciones opuestas en los dos embobinados. Si un embobinado recibe una cierta cantidad de energía de la fuente a la cual está conectado, el otro embobinado entregará la misma cantidad de energía a la fuente a la que esté conectado. Un transformador ideal no puede almacenar energía.*




*Transformador ideal con una resistencia $R_L$ conectada al embobinado 2*

**Figura** *4.2.1*

*La corriente actual en $R_L$ es $i_L(t)$ y en términos de la referencia positiva de la corriente, es igual a $-i_2(t)$.*

$$R_L = \frac{V_2(t)}{i_L(t)} = -\frac{V_2(t)}{i_2(t)} \quad .....(4-11)$$

*Del circuito:*

$$V_2(t) = V_1(t)\left(\frac{N_2}{N_1}\right) \quad .....(4-12)$$

*Además:*

$$-i_2(t) = i_1(t)\left(\frac{N_1}{N_2}\right) \quad .....(4-13)$$

*Luego:*

$$\frac{V_1(t)}{i_1(t)} = R_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = R_L.a^2 = R_L' \quad .....(4-14)$$

*Donde:*

$$a = \frac{N_1}{N_2} \quad .....(4-15)$$

*Una resistencia $R_L$ conectada al embobinado 2 parece tener un valor $R_L'$ cuando se ve del lado 1. En general, para una impedancia $Z_L$, tenemos:*

$$Z_L' = Z_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = a^2 Z_L \quad .....(4-16)$$

*El término $Z_L'$ es llamado el valor de $Z_L$ referido al lado 1 del transformador.*

## 4.3 ANÁLISIS DEL TRANSFORMADOR DE POTENCIA CON NÚCLEO DE HIERRO

### LAS INDUCTANCIAS DE DISPERSIÓN

*Dibujemos un transformador de potencia con núcleo de hierro.*

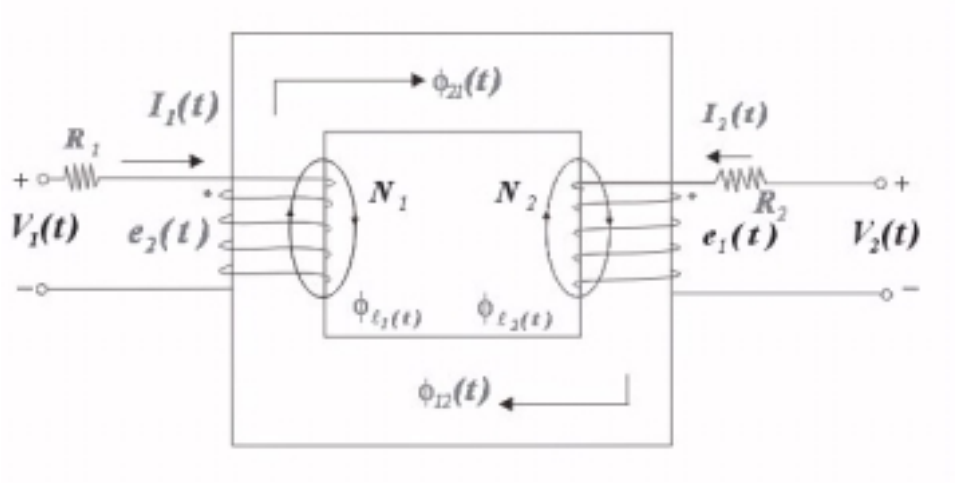



**Figura** *4.3.1*

*Supongamos que el embobinado 1 lleva una corriente $i_1(t)$ y suponiendo $i_2(t) = 0$. Hagamos:*

$$\phi_{11}(t) = \phi_{\lambda 1}(t) + \phi_{21}(t) \quad .....(4-17)$$

*Donde :*
***$\phi_{11}(t)$*** *es el flujo total establecido por* ***$i_1(t)$***
***$\phi_{21}(t)$*** *es la parte de* ***$\phi_{11}(t)$*** *que existe totalmente dentro del núcleo, por lo tanto enlaza únicamente al embobinado 2.*
***$\phi_{\ell 1}(t)$*** *es la parte de* ***$\phi_{11}(t)$*** *que enlaza únicamente al embobinado 1, pero no al 2.*
*El término* ***$\phi_{\ell 1}(t)$*** *es el llamado flujo de dispersión del embobinado 1 con respecto al embobinado 2.*

*Además:*

$$\phi_{\lambda 1}(t) = P_{\lambda 1} N_1 i_1(t) \quad .....(4-18)$$

$$\phi_{21}(t) = P_m N_1 i_1(t) \quad .....(4-19)$$

*Donde:*
***$P_{\ell 1}$*** *es la permeancia de la trayectoria magnética del flujo de dispersión* ***$\phi_{\ell 1}$***
***$P_m$*** *es la permeancia de la trayectoria magnética dentro del núcleo.*

*Análogamente* ***$\phi_{22}(t)$*** *es el flujo total debido a* ***$i_2(t)$*** *solamente, luego :*

***$\phi_{\ell 2}(t)$*** *es llamado flujo de dispersión del embobinado 2 con respecto al 1.*

$$\phi_{\lambda 2}(t) = P_{\lambda 2} N_2 i_2(t) \quad .....(4-20)$$

***$P_{\ell 2}$*** *es la permeancia de la trayectoria de* ***$\phi_{\ell 2}$***

$$\phi_{12}(t) = P_m N_2 i_2(t) \quad .....(4-21)$$

*Las ecuaciones del circuito (basadas en la ley de voltaje de Kirchhoff) para los dos embobinados son:*

$$V_1(t) = R_1 . i_1(t) + N_1 . \frac{d\phi_1(t)}{dt} \quad .....(4-22)$$

$$V_2(t) = R_2 i_2(t) + N_2 \frac{d\phi_2(t)}{dt} \quad .....(4-23)$$

*Luego, obtenemos:*

$$V_1(t) = R_1 i_1(t) + N_1 \frac{d\phi_{\lambda 1}(t)}{dt} + N_1 \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad .....(4-24)$$

$$V_2(t) = R_2 i_2(t) + N_2 \frac{d\phi_{\lambda 2}(t)}{dt} + N_2 \frac{d\phi_m(t)}{dt} \quad .....(4-25)$$

*Definimos la inductancia de dispersión del embobinado 1 con respecto al embobinado 2:* ***$L_{\ell 1}$***

$$L_{\lambda 1} = N_1 \frac{d\phi_{\lambda 1}(t)}{di_1(t)} \quad .....(4-26)$$

***$L_{\ell 2}$*** *es la inductancia de dispersión del embobinado 2 con respecto al embobinado 1. Luego tenemos :*

$$L_{\lambda 2} = N_2 \frac{d\phi_{\lambda 2}(t)}{di_2(t)} \quad .....(4-27)$$

$$L_{\lambda 1} = N_1 \frac{d\phi_{\lambda 1}(t)}{di_1(t)} \cong N_1 \frac{\phi_{\lambda 1}}{i_1} = \frac{N_1 P_{\lambda 1} N_1 i_1}{i_1} = N_1^{\,2} P_{\lambda 1} \quad .....(4-28)$$

*de igual manera:*

$$L_{\lambda 2} = N_2^{\,2} P_{\lambda 2} \quad .....(4-29)$$

*Entonces dejamos:*

$$N_1 \frac{d\phi_m(t)}{dt} = e_1(t) \quad .....(4-30)$$

$$N_2 \frac{d\phi_m(t)}{dt} = e_2(t) \quad .....(4-31)$$

*Podemos escribir :*

$$V_1(t) = R_1 i_1(t) + L_{\lambda 1} \frac{di_1(t)}{dt} + e_1(t) \quad .....(4-32)$$

$$V_2(t) = R_2 i_2(t) + L_{\lambda 2} \frac{di_2(t)}{dt} + e_2(t) \quad .....(4-33)$$

*Donde:*

$$\frac{e_1(t)}{e_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \quad .....(4-34)$$

*El circuito equivalente parcial del transformador real será:*

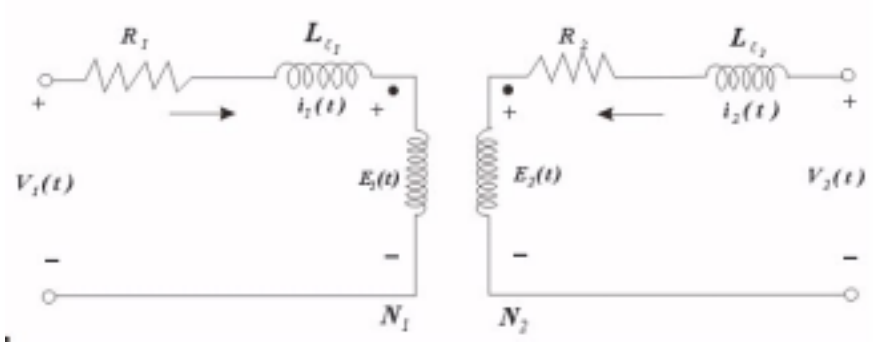



***Figura*** *4.3.2*

## *4.4 CIRCUITO EQUIVALENTE EXACTO*

*Los transformadores con núcleos ferromagnéticos poseen características de saturación y de histéresis. Es difícil obtener un circuito equivalente exacto para un transformador de núcleo de hierro que represente con suficiente aproximación las diferentes condiciones de operación.*

*La mayoría de los transformadores de núcleos de hierro son sometidos en general a una excitación senoidal y operados la mayor parte del tiempo en un estado estable.*

*El circuito anterior tiene que ser modificado para tomar en cuenta el hecho de que la f.m.m. neta que actúa en el núcleo de un transformador real es diferente de cero porque la permeabilidad(μ) del núcleo es finita.*

$$\Rightarrow N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t) \neq 0 \quad .....(4-35)$$

*Ambas corrientes $i_1$ (t) e $i_2$ (t) no pueden ser cero al mismo tiempo.*
*Si el embobinado 2 se deja en circuito abierto y se aplica una tensión $V_1(t)$ el transformador actúa como un reactor y requiere por lo tanto, una corriente de magnetización para establecer el flujo $\phi_{11}(t)$ en el núcleo. Suponga que $i_1(t)$ es dividida en dos componentes.*

$$i_1(t) = i_m(t) + i_2'(t) \quad .....(4-36)$$

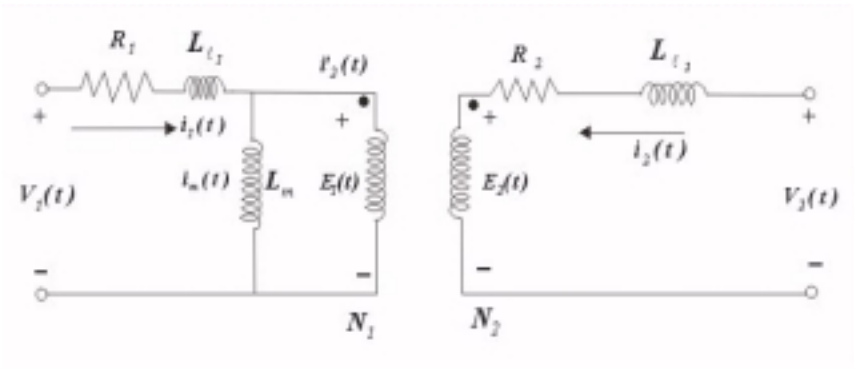



**Figura** *4.4.1*

*Un circuito equivalente satisfactorio se obtiene al incorporar al circuito una resistencia (que puede ser mostrada como conductancia $g_p$) en paralelo con la inductancia $L_m$ ó susceptancia $b_m$.*

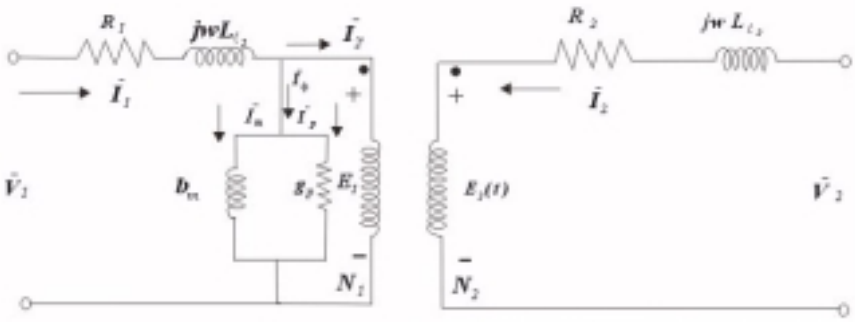



**Figura** *4.4.2*

*El circuito equivalente exacto es trazado para una operación senoidal en estado estable los voltajes y corrientes son representados por números complejos: las inductancias pueden ser mostradas como reactancias o susceptancias. La conductancia $g_p$ representa las pérdidas en el núcleo del transformador, y la*

*corriente $I_m$ circulando en $b_m$ representa la equivalente senoidal de la corriente de magnetización no senoidal. Las ecuaciones son:*

$$\overline{V}_1 = \overline{I}_1(R_1 + j\omega L_{\lambda 1}) + \overline{E}_1 \quad .....(4-37)$$
$$\overline{V}_2 = \overline{I}_2(R_2 + j\omega L_{\lambda 2}) + \overline{E}_2 \quad .....(4-38)$$

*Donde:*

$$N_1\overline{I}'_2 + N_2\overline{I}_2 = 0 \quad .....(4-39)$$
$$\overline{I}_1 = \overline{I}'_2 + \overline{I}_\phi \quad .....(4-40)$$
$$\overline{I}_\phi = \overline{I}_m + \overline{I}_P \quad .....(4-41)$$

## 4.5 ECUACIONES Y DIAGRAMA VECTORIAL

*Como un transformador de núcleo de hierro opera la mayor parte del tiempo en estado estable senoidal, es útil el trazado de diagramas complejos. Estos diagramas pueden ser usados para determinar la diferencia entre los voltajes sin carga y a plena carga ó para calcular el factor de potencia de entrada del transformador. Aquí vemos el circuito equivalente que muestra el suministro de potencia del transformador a una carga de impedancia $Z_L$.*

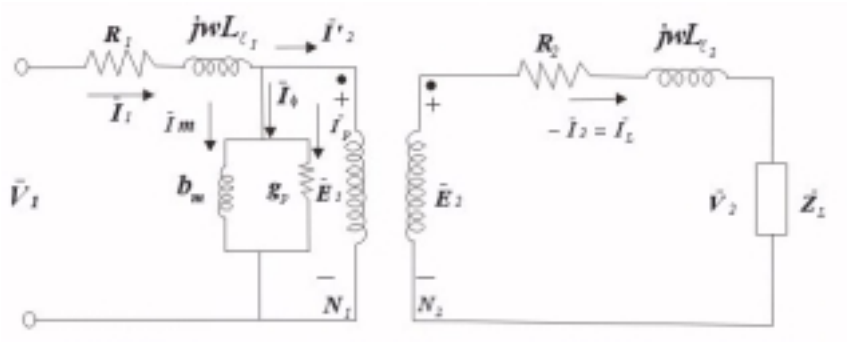



**Figura** *4.5.1*

***Diagrama complejo para $\overline{Z}_L$ inductiva:***
*La corriente de carga $\bullet_L$ está atrazada un ángulo $\theta_L$ con respecto al voltaje $\overline{V}_2$. La corriente de carga $\bullet_L$ = - $\bullet_2$ donde $\bullet_2$ es la corriente de referencia positiva.*

*De la ecuación anterior*

$$\overline{I}'_2 = \frac{N_2}{N_1}\overline{I}_L = \frac{\overline{I}_L}{a} \quad .....(4-42)$$

*El vector $\bullet_2$ representa al voltaje inducido en el embobinado 2, se obtiene al sumar en forma compleja a $\overline{V}_2$. Vemos la caída de voltaje en la impedancia de dispersión del lado 2. El complejo representando al flujo es dibujado atrazado 90° de $\bullet_2$ debido a que $e_2(t) = N_2 d\phi/dt$.*

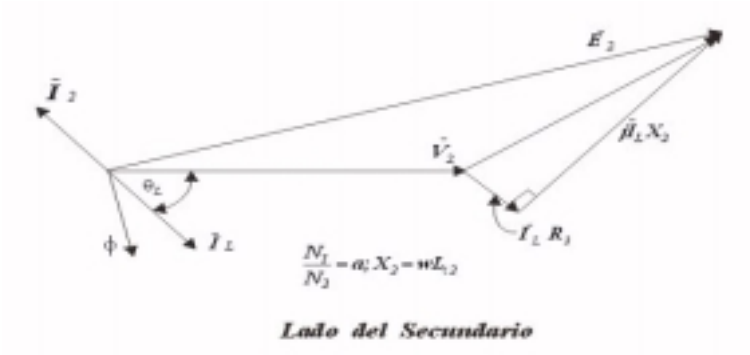



***Figura** 4.5.2*

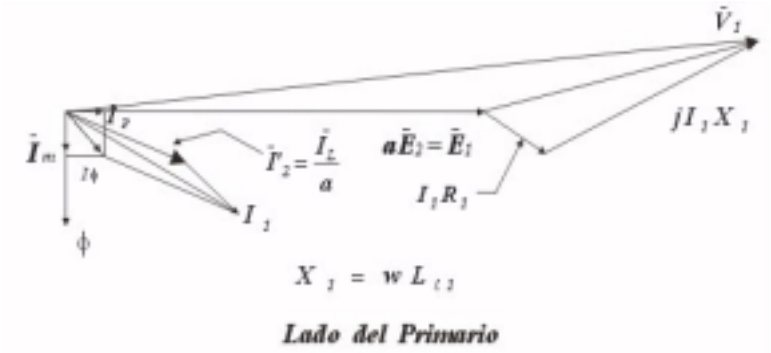



***Figura** 4.5.3*

*Podemos referir el circuito equivalente al lado primario:*

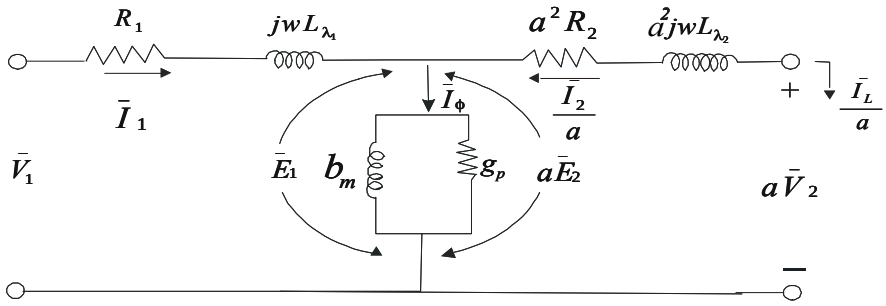


***Figura** 4.5.4*

*También podemos referir el circuito equivalente al lado secundario:*

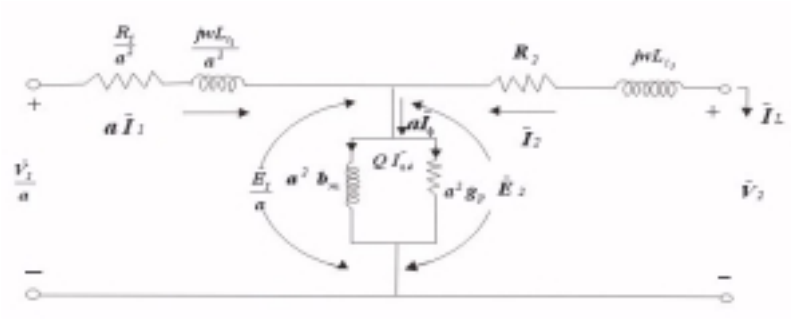


***Figura** 4.5.5*

*Los diagramas también pueden trazarse usando los circuitos equivalentes, para una carga con factor de potencia atrasado.*

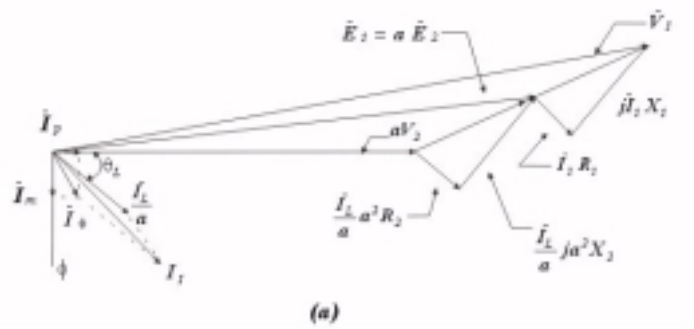



***Figura** 4.5.6*

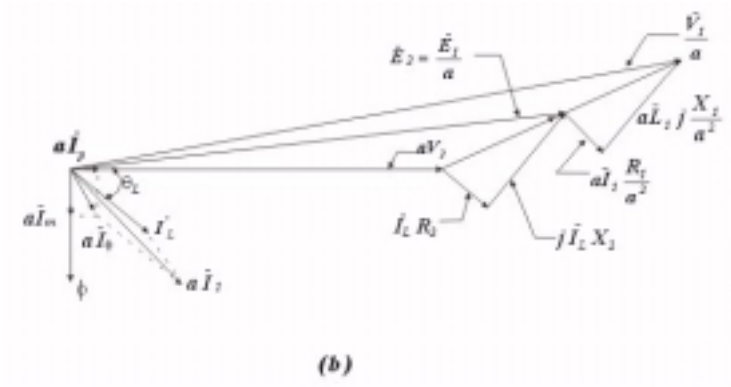



***Figura** 4.5.7*

## *4.6 LOS CIRCUITOS EQUIVALENTES APROXIMADOS*

*En la mayoría de transformadores de núcleo de hierro que son operados a frecuencias de potencia (50 ó 60 cps) y usados en la distribución de energía eléctrica a casas, industrias, etc. La corriente de excitación $I_Ø$ será pequeña del 2 al 4% de la corriente suministrada por los transformadores a las cargas; consecuentemente la rama de excitación puede ser movida a cualquier extremo del circuito.*

*a) Circuito equivalente aproximado de un transformador de núcleo de hierro referido al lado primario, corrido al extremo derecho:*

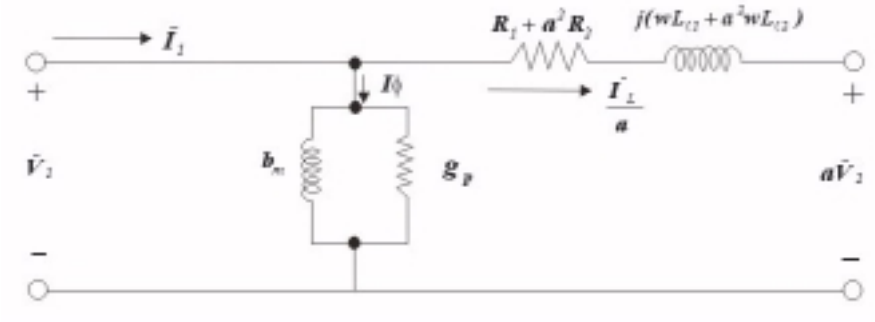


***Figura** 4.6.1*

*b) Circuito equivalente aproximado de un transformador de núcleo de hierro referido al lado secundario, corrido al extremo izquierdo:*

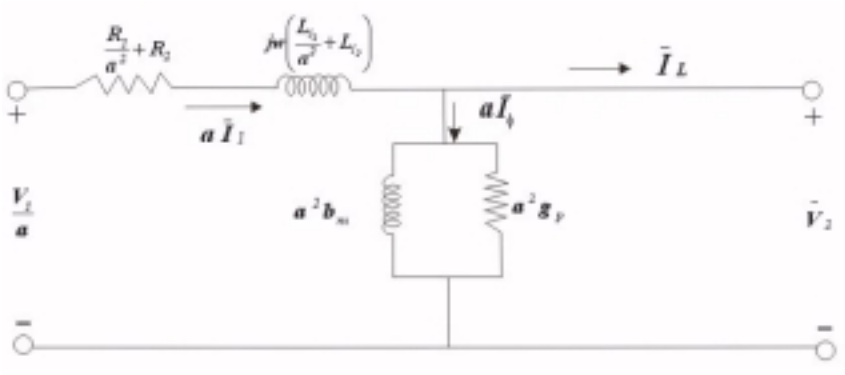


***Figura** 4.6.2*

*La reactancia de dispersión equivalente del transformador referida al lado del primario es:*

$$X_{eq1} = \omega(L_{\lambda 1} + a^2 L_{\lambda 2}) = \omega L_{eq1} \quad .....(4-43)$$

*La resistencia equivalente del transformador referida al lado primario es:*

$$R_{eq1} = R_1 + a^2 R_2 \quad .....(4-44)$$

*La resistencia equivalente del transformador referida al lado secundario es :*

$$R_{eq2} = \frac{R_1}{a^2} + R_2 \quad .....(4-45)$$

*La reactancia de dispersión equivalente referida al lado secundario es* ***:***

$$X_{eq2} = \frac{L_{\lambda 1}}{a^2} + L_{\lambda 2} = \omega L_{eq2} \quad .....(4-46)$$

## *4.7 DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS POR MEDICIONES DE UN TRANSFORMADOR DE NÚCLEO DE HIERRO*

*Los parámetros por determinar son:*

*1) Resistencias efectivas de c.a. de los dos embobinados $R_1$ y $R_2$.*
*2) Inductancias de dispersión $L_{\ell 1}$ y $L_{\ell 2}$.*
*3) Conductancia $g_p$ y susceptancia $b_m$.*

*Es habitual determinar los valores de los parámetros de un transformador de núcleo de hierro a su voltaje, corriente y frecuencia nominales debido a que por*

*lo general se espera que el transformador opere la mayor parte del tiempo a condiciones nominales ó muy cerca de ellas.*

*Los parámetros $g_p$ y $b_m$ son afectados por las condiciones de operación; si estos son determinados a una cierta frecuencia y densidad de flujo no permanecerán constantes, si la densidad de flujo y/o la frecuencia es variada por que se presentan los efectos de histéresis y de saturación y esto afecta los valores de las pérdidas en el núcleo y de la corriente de magnetización.*

*Los parámetros son determinados de dos pruebas: cortocircuito y circuito abierto.*

***a) PRUEBA DE CORTOCIRCUITO***

*El circuito usado para esta prueba se muestra a continuación:*

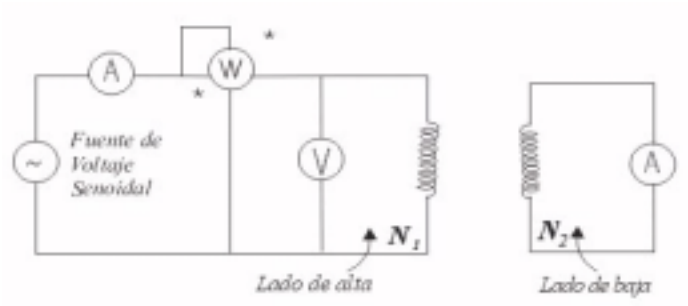



***Figura** 4.7.1*

- *Se pone en cortocircuito el lado de baja.*
- *Se aplica al lado de alta un voltaje senoidal pequeño.*
- *Se incluye un amperímetro que es un aparato de muy baja impedancia que va a registrar corrientes nominales correspondientes,*
- *Se registrará el voltaje de entrada: $V_{sc}$; corriente de entrada $I_{sc}$ y la potencia de entrada : $P_{sc}$.*
- *En la mayoría de los transformadores los fabricantes se esfuerzan continuamente por mantener las pérdidas en el núcleo y la corriente de excitación tan bajas como sea posible luego $I_{Ø}$ es del (2 al 4)% de la corriente nominal.*
- *El voltaje de entrada es pequeño para obtener las corrientes nominales en los embobinados debido a que dichas corrientes son limitadas por la impedancia de dispersión de los embobinados.*
- *La densidad del flujo en el núcleo para esta prueba es pequeña y las pérdidas en el núcleo y la corriente $i_m$ de magnetización será todavía más pequeña por lo tanto es permisible omitir la rama en derivación.*

*Veremos a continuación el circuito equivalente simplificado:*

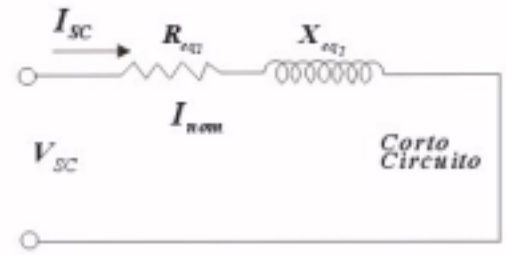



***Figura** 4.7.2*

*La impedancia de dispersión equivalente del transformador, la resistencia equivalente referida al lado de alta y la reactancia de dispersión equivalente referida al lado de alta son:*

$$Z_{SC} = \frac{V_{SC}}{I_{SC}} \quad .....(4-47)$$

$$R_{SC} = \frac{P_{SC}}{I_{Sc}^2} \quad .....(4-48)$$

$$X_{SC} = \sqrt{Z_{SC}^2 - R_{SC}^2} \quad .....(4-49)$$

$$R_{SC} = R_{eq1} \quad .....(4-50)$$

$$X_{SC} = X_{eq1} \quad .....(4-51)$$

$$I_{SC} = I_1 \, nominal \quad .....(4-52)$$

*El cálculo de $R_1$ , $R_2$, $X_1$ y $X_2$ se hace así; pero para ello se hace las siguientes suposiciones :*

1) *Los dos embobinados tienen la misma longitud por vueltas.*
2) *El área de la sección transversal del conductor es proporcional a la corriente nominal del embobinado.*
3) *La trayectoria magnética de los flujos de dispersión de los dos embobinados es esencialmente la misma.*

*Bajo estas condiciones, se puede mostrar que:*

$$R_1 = a^2 R_2 \quad .....(4-53)$$

$$L_{\lambda 1} = a^2 L_{\lambda 2} \quad .....(4-54)$$

$$\omega L_{\lambda 1} = \frac{X_{eq1}}{2} \quad .....(4-55) \qquad \omega L_{\lambda 2} = \frac{X_{eq1}}{2a^2} \quad .....(4-56)$$

*Además:*

$$R_1 = \frac{R_{eq1}}{2} \quad .....(4-57) \qquad R_2 = \frac{R_{eq1}}{2a^2} \quad .....(4-58)$$

*Donde:*

$$a = \frac{N_1}{N_2} \quad .....(4-59)$$

- *La potencia consumida, a corriente nominal en la prueba de cortocircuito es la pérdida nominal en el cobre del transformador.*

**b) PRUEBA DE CIRCUITO ABIERTO:**

- *Como el núcleo no es lineal y tiene pérdidas, los parámetros de $g_p$ y $b_m$ de un transformador de núcleo de hierro dependen de las condiciones de operación. Voltaje y frecuencia nominales se usan como regla en ésta prueba.*

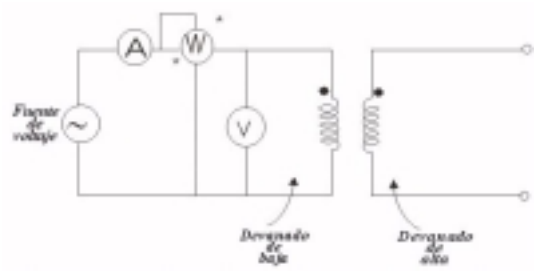



***Figura** 4.7.3*

- *Se aplica al devanado de baja: voltaje y frecuencia nominales.*
- *Se registra en el lado de baja, la corriente, el voltaje y la potencia.*
- *El circuito equivalente aproximado se representa nuevamente para la prueba de circuito abierto. Hagamos que $Voc_1$, $Ioc_1$ y $Poc_1$, representen el voltaje, corriente y potencia de entrada respectivamente.*

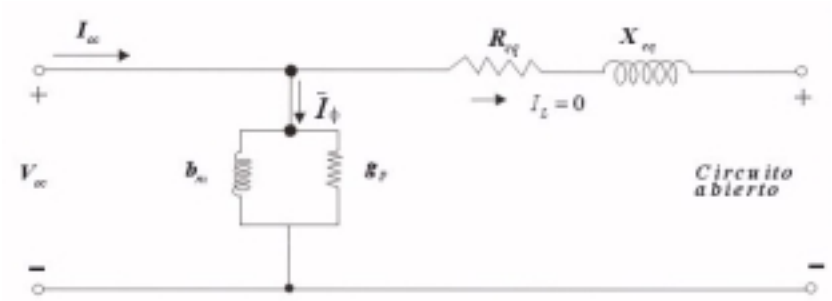



***Figura** 4.7.4*

*Es obvio que los únicos parámetros que tienen que ser considerados en la prueba de circuito abierto son $g_p$ y $b_m$. La impedancia de dispersión no afecta a los datos de prueba.*
*La admitancia de excitación $Y_\phi$ y sus componentes $g_p$ y $b_m$ referidas al primario son:*

$$Y_\phi = \frac{I_\phi}{V_{OC}} \quad .....(4-60)$$

$$g_P = \frac{P_{OC}}{V_{OC}^2} \quad .....(4-61)$$

$$b_m = \sqrt{Y_\phi^2 - g_p^2} \quad .....(4-62)$$

- *$P_{oc}$ representa la pérdida nominal en el núcleo del transformador. Es igual a $P_{h+f}$*

$$W = P_{oc}$$

## 4.8 RENDIMIENTO

*El rendimiento de un transformador es la razón de la potencia de salida a la de entrada expresada en tanto por ciento:*

$$\%\eta = \frac{Potencia\ de\ salida}{Potencia\ de\ entrada} \times 100\%$$

$$\%\eta = \frac{Potencia\ de\ salida}{(Potencia\ de\ salida + pérdidas)} \times 100\% = \frac{(Potencia\ de\ entrada - Pérdidas)}{Potencia\ de\ entrada} \times 100\%$$

*Pérdidas:*

- *Pérdidas por histéresis en el núcleo*
- *Pérdidas por corrientes parásitas en el núcleo*
- *Pérdidas en el cobre de los devanados ( pérdidas a 75°C)*

*Corrección de la Resistencia por efecto de la temperatura*

$$\frac{Rt_2}{Rt_1} = \frac{t_2 + 234.5}{t_1 + 234.5} \quad .....(4-63)$$

*El rendimiento de los transformadores es en general muy elevado, siendo mayor en unidades de grandes características nominales que en las pequeñas.*

## 4.9 EFICIENCIA Ó RENDIMIENTO DE UN TRANSFORMADOR

*Considerando el transformador de núcleo de hierro, supongamos que el voltaje de salida se mantiene constante al valor nominal y el transformador con factor de potencia $\cos\theta_L$ está entregando a la carga una corriente $I_{L2}$ ( no necesariamente del valor nominal).*

*En éste análisis se supone una operación en estado estable senoidal, $P_{h+f}$ representa a las pérdidas en el núcleo, estas pérdidas son dependientes de la densidad de flujo y de la frecuencia. Puede considerarse que $P_{h+f}$ permanece constante en el tiempo y que el voltaje de salida y la frecuencia son mantenidas constantes.*

*La $P_{cu}$, Pérdidas en el cobre o pérdidas óhmicas en los embobinados están en función de la corriente. Estas pérdidas están dadas por* $I_{L2}^2 R_{eq2}$

$\eta =$ *eficiencia del transformador*

$$\eta = \frac{Potencia\ de\ salida}{Potencia\ de\ salida + pérdidas} \quad .....(4-64)$$

$$\eta = \frac{V_2 I_{L2} \cos(\theta_L)}{V_2 I_{L2} \cos(\theta_L) + P_{h+f} + I_{L2}^2 R_{eq2}} \quad .....(4-65)$$

*Si $I_{L2}$ es la corriente nominal, entonces se obtiene la eficiencia nominal*

## 4.10 VARIACIÓN DE LA EFICIENCIA CON LA CARGA Y EFICIENCIA MÁXIMA

*Una comparación de las eficiencias a diferentes valores de la corriente de salida y al mismo factor de potencia indican que la eficiencia tiene un máximo valor en alguna fracción de la corriente nominal. En la ecuación anterior, $I_{L2}$ es la única variable si el factor de potencia de la carga se mantiene constante.*

*El valor de $I_{L2}$ al cual la eficiencia es máxima puede ser encontrado al establecer $d\eta/dI_{L2}=0$, resolviéndola para $I_{L2}$. Si el signo de la 2da derivada es negativo a este valor de $I_{L2}$ , entonces la eficiencia será máxima.*

$$\partial(n)/\partial I_{L2}=[(V_2I_{L2}\cos\theta_L+P_{h+f}+(I_{L2})^2R_{eq2})V_2\cos\theta_L-V_2I_{L2}\cos\theta_L)(V_2\cos\theta_L+2I_{L2}R_{eq2})]/(V_2I_{L2}\cos\theta_L+P_{h+f}+(I_{L2})^2R_{eq2})^2 = 0$$

$$I_{L2}=\sqrt{\frac{P_{h+f}}{R_{eq2}}} \quad .....(4-66)$$

*Multiplicando y dividiendo al lado derecho de la ecuación anterior por el valor nominal de $I_{L2}$ , obtenemos:*

$$I_{L2}(\text{para máxima eficiencia})=I_{L2}(\text{nominal})\sqrt{\frac{P_{h+f}}{I_{L2}(\text{nominal})R_{eq2}^2}} \quad .....(4-67)$$

$$I_{L2}(\text{para máxima eficiencia})=I_{L2}(\text{nominal})\sqrt{\frac{\text{Pérdidas en el núcleo nominales}}{\text{Pérdidas en el cobre nominales}}} \quad .....(4-68)$$

*Si las pruebas de circuito abierto y de corto circuito se realizan a condiciones nominales, como generalmente sucede, la ecuación es:*

$$I_{L2}(\text{para máxima eficiencia})=I_{L2}(\text{nominal})\sqrt{\frac{P_{OC}}{P_{SC}}} \quad .....(4-69)$$

*$P_{OC}$ = Potencia leída en la prueba de circuito abierto*
*Psc = Potencia leída en la prueba de cortocircuito*

*El valor de la máxima eficiencia a cualquier factor de potencia $\cos\theta_L$ se obtiene al sustituir la ecuación anterior en la primera ecuación.*

$$Eficiencia\ máxima = \frac{V_2 I_{L2}(nominal)\sqrt{\frac{P_{OC}}{P_{SC}}}\cos\theta_L}{V_2 I_{L2}(nominal)\sqrt{\frac{P_{OC}}{P_{SC}}}\cos\theta_L + 2P_{h+f}} \quad .....(4-70)$$

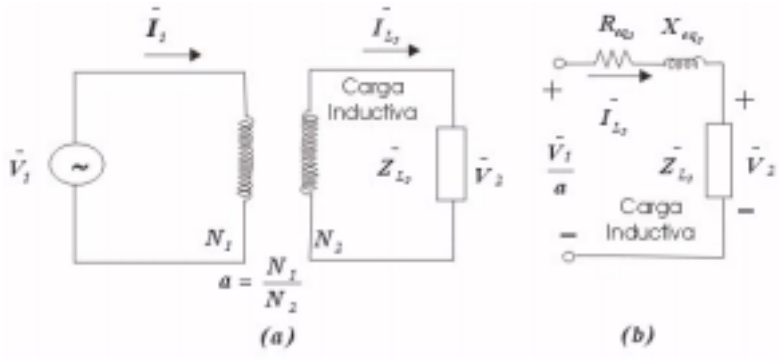
*Multiplicando ambos lados de la ecuación por $V_2$, obtenemos*

$$\frac{voltamperes\ de\ salida\ para\ máxima\ eficiencia}{voltamperes\ nominales\ de\ salida\ del\ transformador} = \sqrt{\frac{P_{OC}}{P_{SC}}} \quad .....(4-71)$$

*Esta relación es la misma para todos los valores de $\cos\theta_L$.*

## 4.11 LA REGULACIÓN DE UN TRANSFORMADOR

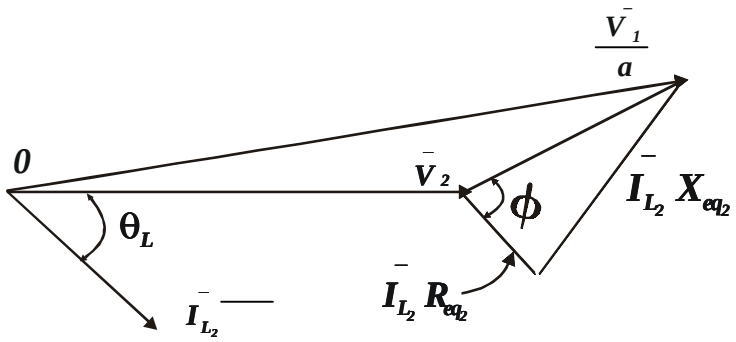
*La regulación de voltaje es una medida de la variación de la tensión de salida de un transformador, cuando la corriente de carga con un factor de potencia constante, varía desde cero a un valor nominal.*
*Se supone que los transformadores están sujetos a voltajes sinusoidales y operan en estado estable. Esta proposición es válida porque la mayor parte del tiempo los transformadores de potencia operan en un estado estable senoidal.*




*Transformador de núcleo de hierro de los embobinados alimentando una carga inductiva.*

*Circuito equivalente aproximado referido al lado 2, del transformador del núcleo de hierro de dos embobinados, para cálculos de la regulación de voltaje*

***Figura** 4.11.1*




***(c)***

*Diagrama vectorial del circuito equivalente aproximado*

***Figura** 4.11.2*

*En la figura , la carga esta conectada al lado 2 y la fuente de voltaje al lado 1. Supongamos que el transformador está entregando a la carga una corriente nominal a un voltaje nominal y con un factor de potencia específico. La fuente de voltaje es ajustada para obtener voltaje y corrientes nominales en los terminales de carga. Si la fuente de voltaje se mantiene constante a este valor y la carga es desconectada del transformador, el voltaje de salida cambiará; la diferencia entre los valores de voltaje de salida cuando está sin carga, y el nominal, a plena carga es definida como la regulación del voltaje nominal del transformador a un* ***f.d.p.*** *específico.*

$$r\% = \frac{\left|V_{2(sin\ carga)}\right| - \left|V_{2(nominal)}\right|}{\left|V_{2(nominal)}\right|} \times 100\% \quad .....(4-72)$$

*Como generalmente; la corriente de excitación es pequeña comparada con la corriente nominal de un transformador de núcleo de hierro, la rama en derivación consistente de $g_P$ y $b_m$ puede no ser considerado para cálculos de regulación de voltaje.*
*Cuando el transformador esta entregando la corriente nominal $I_{L2}$ a un factor de potencia de $\cos\theta_L$ el voltaje de carga es $V_2$. El correspondiente voltaje de entrada es $V_1/a$ referido al lado 2.*

*Cuando la carga se remueve, manteniendo el voltaje de entrada constante, se observa que el voltaje en los terminales de carga, cuando $I_{L2}=0$ es $(V_1/a)$. Luego la regulación es:*

$$r\% = \frac{\left|\bar{V}_1/a\right| - \left|\bar{V}_2\right|}{\left|\bar{V}_2\right|} \times 100\% \quad .....(4-73)$$

*Donde:*

$$\frac{\bar{V}_1}{a} = \bar{V}_2 + \bar{I}_{L2}(R_{eq2} + jX_{eq2}) \quad .....(4-74)$$

*Los términos $V_2$ y $\bar{I}_{L2}$ son los valores nominales.*

## 4.12 DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE LA REGULACIÓN

*Para obtener una expresión para la regulación de voltaje trazamos un diagrama complejo*

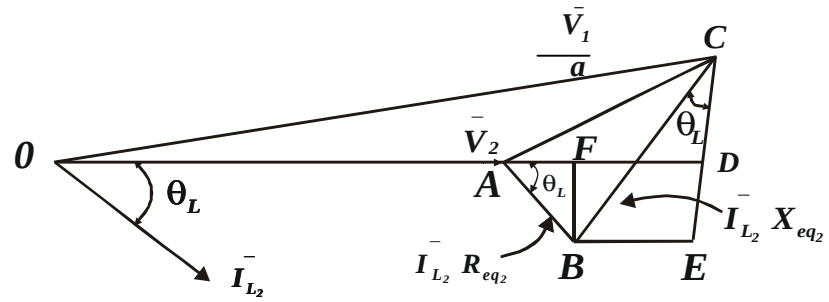



**Figura** *4.12.1*

*Diagrama complejo para el cálculo de la regulación de voltaje (carga Inductiva)*

$$\left|\bar{V}_2\right| = OA \quad .....(4-75)$$

$$\left|\frac{\bar{V}_1}{a}\right| = OC = (OD^2 + CD^2)^{1/2} \quad .....(4-76)$$

*De la figura tenemos:*

$$\left|\frac{\bar{V}_1}{a}\right| = OD(1+(\frac{CD}{OD})^2)^{1/2} \quad .....(4-77)$$

$$\left|\frac{\bar{V}_1}{a}\right| = OD\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{CD}{OD}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{CD}{OD}\right)^4 + \text{K K}\} \quad .....(4-78)$$

*Ampliando* $\left|\frac{\bar{V}_1}{a}\right|$ *en una serie binomial, obtenemos:*

*Como (CD/OD) generalmente es mucho más pequeño que 1, la serie infinita converge rápidamente entonces puede realizarse una útil aproximación sin*

$$\left|\frac{\bar{V}_1}{a}\right| = OC = OD + \frac{1}{2}(\frac{CD}{OD})^2 \quad .....(4-79)$$

*perder precisión al considerar solamente los dos primeros términos de la serie infinita:*

*Sustituyendo las ecuaciones anteriores y utilizando la ecuación de r%:*

$$r\% = \left[\frac{AD}{OA} + \frac{1}{2}\left(\frac{CD^2}{OA^2 + (OA)(AD)}\right)\right] \times 100\% \quad .....(4-80)$$

$$r\% = \left[\frac{AD}{OA} + \frac{1}{2}\left(\frac{CD}{OA}\right)^2\right] \times 100\%; \text{ debido a que } (OA)(AD) <<< OA^2 \quad .....(4-81)$$

*También tenemos las siguientes relaciones:*

$$AD = AF + FD = I_{L2}R_{eq2}\cos\theta_L + I_{L2}X_{eq2}sen\theta_L \quad .....(4-82)$$

$$CD = CE - DE = I_{L2}X_{eq2}\cos\theta_L - I_{L2}R_{eq2}sen\theta_L \quad .....(4-83)$$

*Sustituyendo las ecuaciones anteriores obtenemos:*
*Porcentaje de la regulación de voltaje para un factor de potencia de carga atrasado(carga inductiva).*

$$r\% = \left[\left(\frac{I_{L2}R_{eq2}}{V_2}\right)\cos\theta_L + \left(\frac{I_{L2}X_{eq2}}{V_2}\right)sen\theta_L + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{I_{L2}X_{eq2}}{V_2}\right)\cos\theta_L - \left(\frac{I_{L2}R_{eq2}}{V_2}\right)sen\theta_L\right)^2\right]\times 100\% \quad .....(4-84)$$

*$\theta_L$: será positiva ya que la carga es inductiva.*
*$\theta_L$: será negativa cuando la carga es capacitiva.*
$\cos\theta_L = \cos(-\theta_L)$, *y* $\operatorname{sen}\theta_L = -\operatorname{sen}(-\theta_L)$

*Porcentaje de regulación de voltaje para un factor de carga adelantado (carga capacitiva).*

$$r\% = \left[\left(\frac{I_{L2}R_{eq2}}{V_2}\right)\cos\theta_L - \left(\frac{I_{L2}X_{eq2}}{V_2}\right)sen\theta_L + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{I_{L2}X_{eq2}}{V_2}\right)\cos\theta_L + \left(\frac{I_{L2}R_{eq2}}{V_2}\right)sen\theta_L\right)^2\right]\times 100\% \quad .....(4-85)$$

*En una forma aproximada la regulación puede expresarse:*

$$r = \frac{I_{L2}R_{eq2}\cos\theta_L + I_{L2}X_{eq2}sen\theta_L}{V_2} = \frac{I_{L2}}{V_2}Z_{eq2}\cos(\phi - \theta_L) \quad .....(4-86)$$

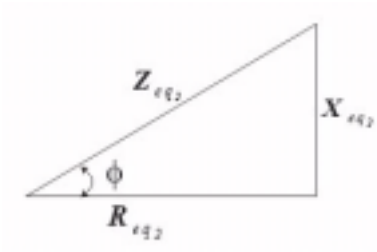



***Figura** 4.12.2*

## 4.13 EMPLEO DE VALORES UNITARIOS Y PORCENTUALES

*Los valores nominales de voltaje y de corriente y los volt-amperes nominales del transformador se usan como cantidades bases.*

*$R_{eq1}$ es la resistencia equivalente de un transformador referido al lado 1 y $V_1$ y $I_1$ son el voltaje y corriente nominales respectivamente en el lado 1.*

*El término $I_1R_{eq1}/V_1$ es definido como la resistencia normalizada, ó mejor conocida como la resistencia por unidad ; $R_{pu}$.*

$$R_{pu} = \frac{I_1 R_{eq1}}{V_1} \quad .....(4-87)$$

*De manera análoga, el valor normalizado de la reactancia de dispersión del transformador es :*

$$X_{pu} = \frac{I_1 X_{eq1}}{V_1} \quad .....(4-88)$$

*La impedancia de valor normalizada es:*

$$Z_{pu} = \frac{I_1 Z_{eq1}}{V_1} \quad .....(4-89)$$

*Los valores de $R_{pu}$ , $X_{pu}$, $Z_{pu}$, pueden también definirse en términos de las cantidades referidas al lado 2. Se puede demostrar fácilmente que las siguientes relaciones son verdaderas.*

$$Z_{pu} = \frac{\text{Voltaje en la prueba de corto circuito a corriente nominal}}{\text{Voltaje nominal}} \quad .....(4-90)$$

*Ambas mediciones en el mismo lado y*

$$Z_{pu} = \sqrt{R_{pu}^2 + X_{pu}^2} \quad .....(4-91)$$

*Como los transformadores de potencia generalmente operan con voltajes nominales, y el valor normalizado del voltaje de salida es tomado como la unidad, es decir,*

$$V_{pu} = 1 \quad .....(4-92)$$

*La corriente de salida puede variar. El valor normalizado de la corriente de salida es:*

$$I_{pu} = \frac{\text{corriente de salida en amperes}}{\text{corriente nominal en amperes}} \quad .....(4-93)$$

*ambas mediciones en el mismo lado.*

*Pérdidas en el cobre en pu*

$$(P_{cu})_{pu} = \frac{\text{pérdidas en el cobre nominales en watts}}{\text{corriente nominal en amperes}} \quad .....(4-94)$$

*Se puede demostrar que:*

$$(P_{cu})_{pu} = R_{pu} \quad .....(4-95)$$

*Conductancia en derivación, normalizada:*

$$g_{p\,pu} = \frac{V_1 g_{p1}}{I_1} = \frac{V_2 g_{p2}}{I_2} \quad .....(4-96)$$

*Donde* $g_{p2} = a^2 g_{p1}$ *se expresa en mhos, y tanto voltaje como corrientes son los valores nominales. Pérdidas en el núcleo normalizadas:*

$$(P_{h+f})_{pu} = \frac{\text{pérdidas en el núcleo nominales en watts}}{\text{voltamperes nominales en el transformador}} \quad .....(4-97)$$

*Es sencillo demostrar que :*

$$(P_{h+f})_{pu} = g_{p\,pu} \quad .....(4-98)$$

*La regulación de voltaje y eficiencia del transformador se pueden expresar en términos de cantidades normalizadas:*

$$\text{porciento de regulación de voltaje nominal} = \left[\left(R_{pu}\cos\theta_L \pm X_{pu}sen\theta_L\right) + \frac{(X_{pu}\cos\theta_L \mu R_{pu}sen\theta_L)^2}{2}\right] \times 100\% \quad .....(4-99)$$

*Signos superiores son para un f.d.p. atrasado (carga inductiva)*
*Signos inferiores son para un f.d.p. adelantado(carga capacitiva)*

*Si en la 1ra ecuación* $V_2$ *e* $I_{L2}$ *son los valores nominales se obtiene la eficiencia nominal.*

$$\frac{\cos\theta_L}{\cos\theta_L + g_{p\,pu} + R_{pu}} = \text{eficiencia a un factor de potencia } \cos\theta_L \quad .....(4-100)$$

$$(I_{pu})_{máx\eta} = \sqrt{\frac{g_{p\,pu}}{R_{pu}}} = \text{corriente de salida para máxima eficiencia} \quad .....(4-101)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{g_{p_{pu}}}{R_{pu}}}\cos\theta_L}{\sqrt{\frac{g_{p_{pu}}}{R_{pu}}}\cos\theta_L + 2g_{p_{pu}}} = \text{eficiencia máx. a f.d.p. } \cos\theta_L \quad .....(4-102)$$

*Las cantidades normalizadas son especialmente útiles al comparar las características de operación de un número de transformadores de las mismas ó diferentes capacidades. Ejemplo: Considere 2 transformadores, uno de 100KVA 1000/100 Volts y el otro de 20 KVA 200/100 Volts. Si los dos tienen las mismas* $R_{pu}$ , $X_{pu}$ *y* $g_{ppu}$ *entonces tendrán el mismo porciento de regulación de voltaje y de eficiencia a un factor de potencia específico* $\cos\theta_L$ .

*Otra ventaja de las cantidades normalizadas es que son cantidades sin dimensiones y la relación de transformación no entra en los cálculos de la regulación y de la eficiencia.*

## *4.14 AUTOTRANSFORMADORES*

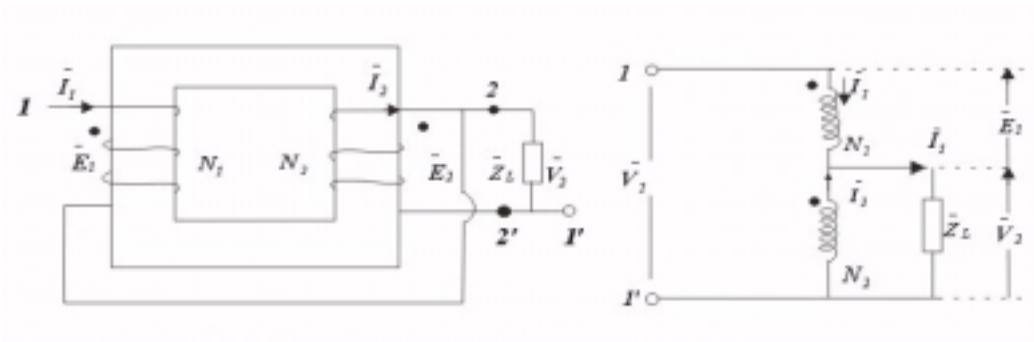



***Figura** 4.14.1*

*Un autotransformador es simplemente un transformador ordinario que tiene los arrollamientos primario y secundario conectados en serie.*

*Las dos bobinas son alimentadas desde una fuente de tensión mientras que la carga se conecta a una de las bobinas o viceversa.*

*Sus funciones son análogas a las de un transformador, la de transformar (reflejar) tensiones, corrientes e impedancias.*

***EL AUTOTRANSFORMADOR IDEAL***

*Suponemos la no existencia de flujos de dispersión*
*Despreciamos la resistencia de las bobinas : R1= R2 ≅ 0*
*ℜ→Reluctancia del circuito magnético nula ⇒ ℜ= 0 (μ→∞)*

*1) Aplicamos las Ley de Faraday*

$$\frac{E_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \frac{E_1 + V_2}{V_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \quad .....(4-105)$$

$$E_2 = V_2 = 4.44 N_2 f \phi_m \quad .....(4-104)$$

$$E_1 + V_2 = V_1 \quad .....(4-106)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = a_A \quad .....(4-107)$$

$a_A$ = *relación de transformación del autotransformador.*
*La reluctancia del núcleo es cero aplicando la sumatoria de fuerzas magnetomotrices en el circuito determinamos la fuerza magnetomotriz resultante de las dos bobinas y tendrá que ser teóricamente nula.*

$$N_1 I_1 - N_2 I_2 = 0 \quad .....(4-108)$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \frac{I_2 + I_1}{I_1} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \quad .....(4-109)$$

$$I_2 + I_1 = I_L \quad .....(4-110)$$

$$\frac{I_L}{I_1} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = a_A \quad .....(4-111)$$

$$\frac{I_L}{I_1} = a_A \quad .....(4-112)$$

*La Impedancia equivalente del autotransformador vista desde la entrada será:*

$$\overline{Z}_{eq1} = \frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_1} \quad .....(4-113)$$

*La Impedancia de carga será:*

$$\overline{Z}_L = \frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_L} \quad .....(4-114)$$

*Las ecuaciones son idénticas a las obtenidas para el transformador ideal, luego podemos establecer una analogía.*

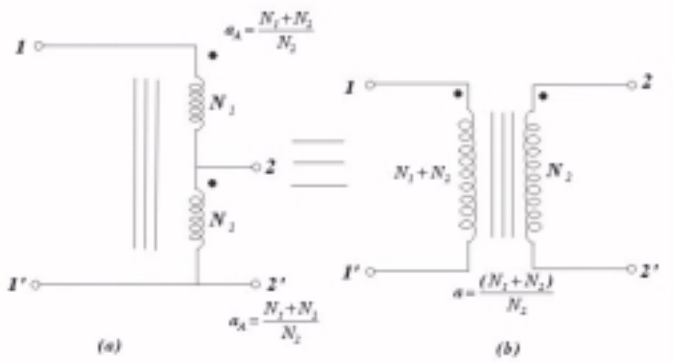



***Figura*** *4.14.2*

***CIRCUITOS EQUIVALENTES DEL AUTRANSFORMADOR REAL***

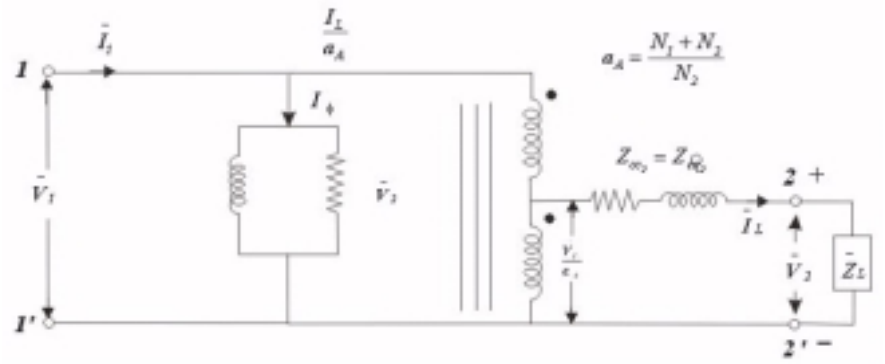


***Figura** 4.14.3*

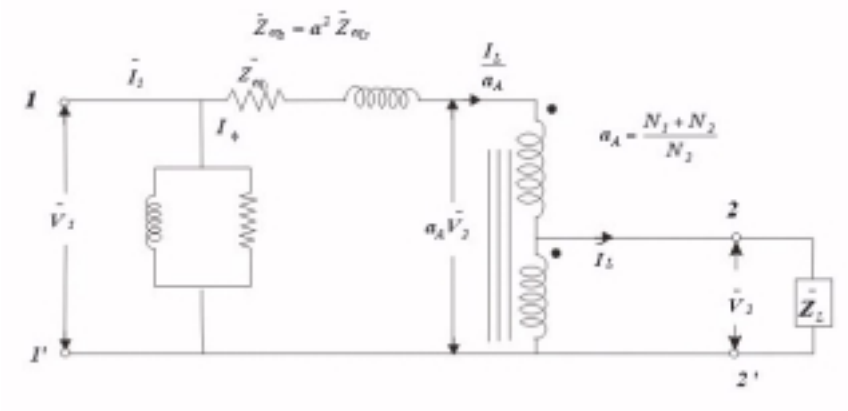


***Figura** 4.14.4*

*La admitancia de excitación se halla con la prueba de circuito abierto.*
*La impedancia de dispersión se halla mediante la prueba de cortocircuito*

***PRUEBA DE CIRCUITO ABIERTO***

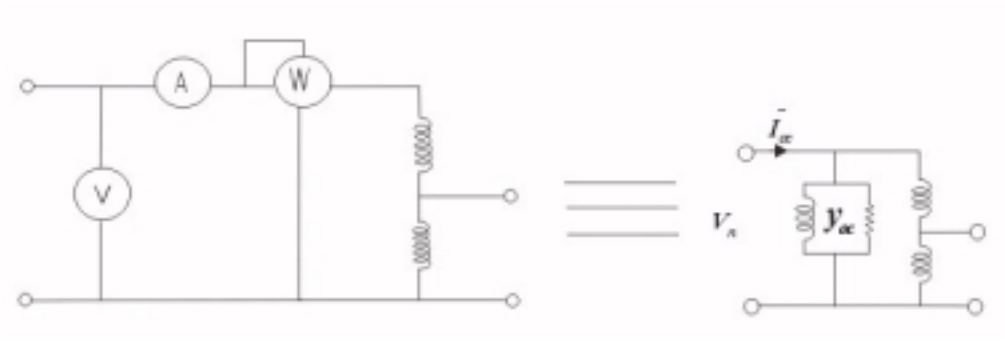



***Figura** 4.14.5*

*(A) = Ioc = corriente de excitación*
*(W) = Poc = pérdidas en el núcleo*
*(V) = $V_n$ = tensión nominal*

$$Y_{OC} = \frac{I_{OC}}{V_n} \quad .....(4-115)$$

$$g_P = \frac{P_{OC}}{V_n^2} \quad .....(4-116)$$

$$b_m = \sqrt{Y_{OC}^2 - g_p^2} \quad .....(4-117)$$

***PRUEBA DE CORTOCIRCUITO***

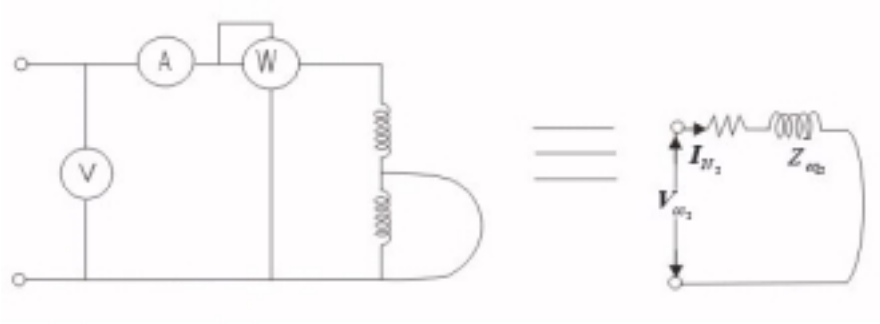



***Figura** 4.14.6*

*(A) = $I_{N1}$ = $I_{SC}$ = corriente nominal*
*(W) = $P_{cu}$ = $P_{SC}$ = pérdidas en el cobre*
*(V)=$V_{CC1}$=$V_{SC}$=tensión de cortocircuito*

$$Z_{eq1} = \frac{V_{CC1}}{I_{N1}} \quad .....(4-118)$$

$$R_{eq1} = \frac{P_{SC}}{I_{N1}^2} \quad .....(4-119)$$

$$X_{eq1} = \sqrt{Z_{eq1}^2 - R_{eq1}^2} \quad .....(4-120)$$

***EL TRANSFORMADOR ORDINARIO COMO AUTOTRANSFORMADOR***

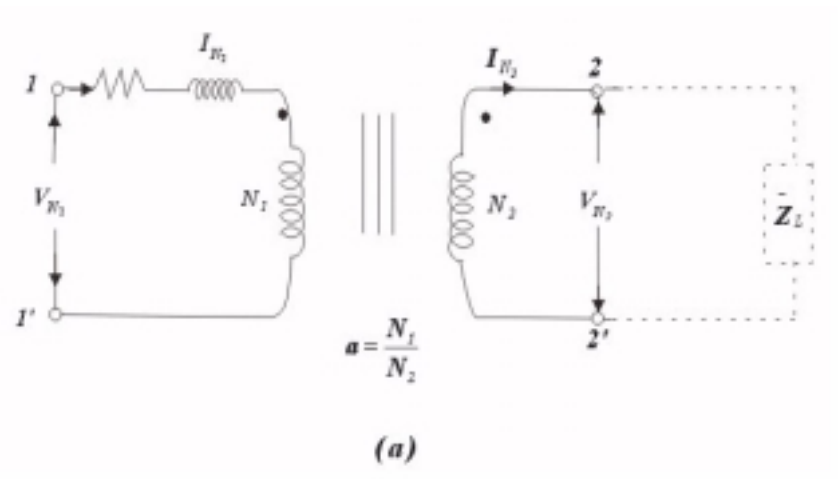



***Figura** 4.14.7a*

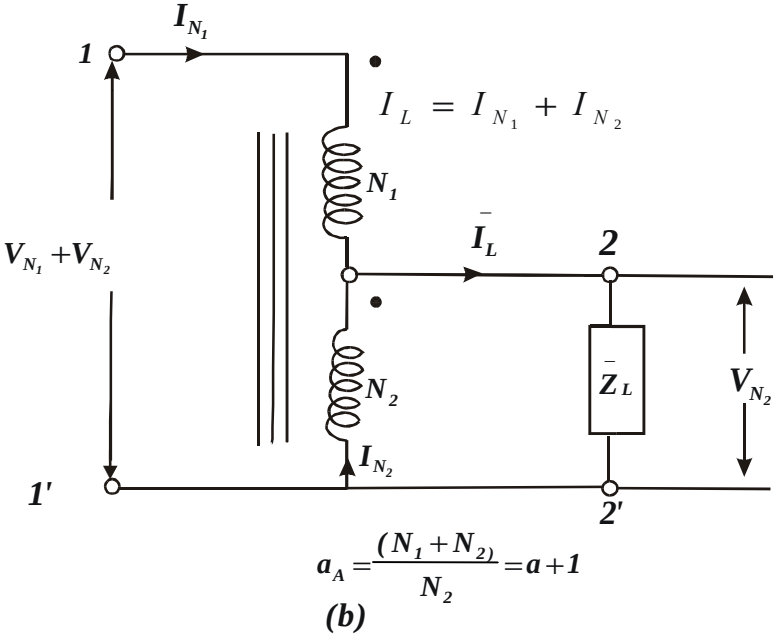



***Figura*** *4.14.7b*

*Las relaciones de transformación son diferentes.*

*Las corrientes $I_{N1}$ e $I_{N2}$ de los arrollamiemtos son iguales en ambas configuraciones.*

*$S_T$ = potencia aparente del transformador*
*$S_A$= potencia aparente del autotransformador*
*$I_{N1}=S_T/V_{N1}$, $I_{N2}=S_T/V_{N2}$*

*Funcionando como autotransformador las corrientes $I_{N1}$ e $I_{N2}$ podrían siempre recorrer los arrollamientos.*

$$I_L = I_{N1} + I_{N2} \quad .....(4-21)$$

*La potencia aparente del autotransformador será:*

$$S_A = V_{N2}(I_{N1} + I_{N2}) = V_{N2}I_{N1} + V_{N2}I_{N2} \quad .....(4-122)$$

$$S_T = V_{N2}I_{N2} \quad .....(4-123)$$

$$\frac{V_{N2}I_{N1} + V_{N2}I_{N2}}{V_{N2}I_{N2}} = \frac{I_{N1}}{I_{N2}} + 1 = \frac{N_2}{N_1} + 1 \quad .....(4-124)$$

$$S_A = \left(\frac{a+1}{a}\right)S_T \quad .....(4-125)$$

*La eficiencia del autotransformador mejora:*

$$\eta = \frac{p_2}{P_2 + P_{perd}} \quad .....(4-126)$$

$$P_{perd_A} = P_{perd_T} \quad .....(4-127)$$

$$P_{2A} = p_{2T} \quad .....(4-128)$$

*La tensión de cortocircuito $V_{CC}$ y la $Z_{eq1}$ son iguales en ambas consideraciones, pero la impedancia porcentual baja.*

$$Z_{eq_T}\% = \frac{V_{CC_1}}{V_{n1}} \times 100\% \quad .....(4-129)$$

$$Z_{eq_A}\% = \frac{V_{CC_1}}{V_{n1} + V_{n2}} \times 100\% \quad .....(4-130)$$

$$Z_{eq_A}\% = \frac{a}{a+1} Z_{eq_T}\% \quad .....(4-131)$$

*La regulación es directamente proporcional a la impedancia equivalente porcentual.*

$$r_A\% = \frac{a}{a+1} r_T\% \quad .....(4-132)$$

*La corriente de excitación permanecerá igual si se alimenta el autotransformador desde el secundario.*

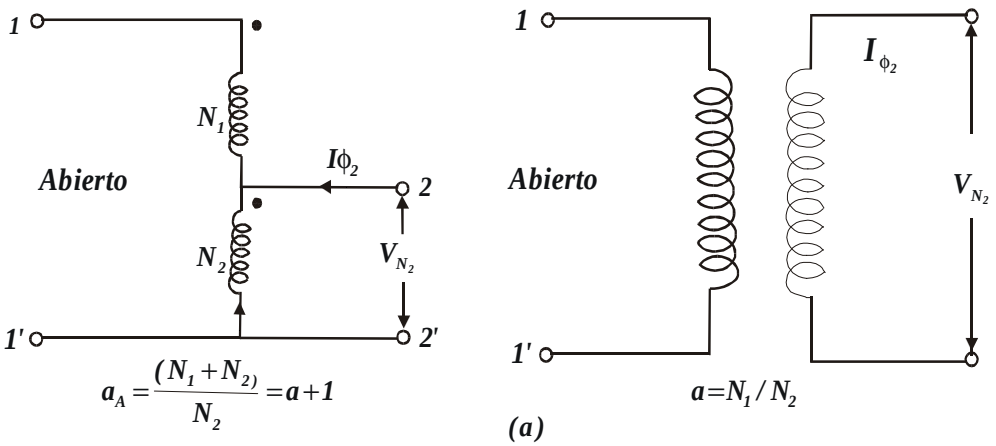



**Figura** *4.14.8a*

*Si se alimenta por el primario las corrientes de excitación serán diferentes.*

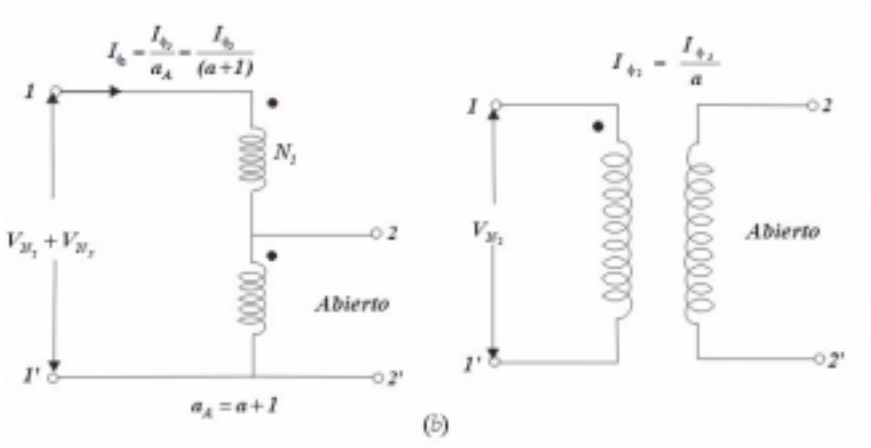



***Figura** 4.14.8b*

*La potencia total puede considerarse formada de dos partes que son:*

$S_C = P_C = V_{N2} I_{N1}$ *= voltamperios transferidos conductivamente a la carga*

$S_i = P_i = V_{N2} I_{N2}$ *= voltamperios transferidos inductivamente a la carga*

***VENTAJAS DE LOS AUTOTRANSFORMADORES FRENTE AL TRANSFORMADOR ORDINARIO***

*a. Dimensión más reducida*
*b. Costos más bajos*
*c. Eficiencia más alta .*
*d. Corriente de excitación más reducida*
*e. Mejor regulación*

***DESVENTAJAS FRENTE AL TRANSFORMADOR***

*a. Mayores corrientes de cortocircuito por disminuir su impedancia de cortocircuito.*
*b. Conexión eléctrica entre el primario y el secundario*

*Estas desventajas son muy importantes porque limita el uso del autotransformador notablemente pues solamente se le puede utilizar en circuitos que tienen tensiones del mismo orden de magnitud. Por ejemplo para elevar una tensión en un 10%.*

***APLICACIONES DE LOS AUTOTRANSFORMADORES***

*Las principales aplicaciones son como reguladores de tensión en distribución eléctrica, es decir para compensar caídas de tensión elevando ésta en determinado punto de la red en un 10% - 20%.*

*También se utiliza para el arranque de motores 3ϕ de inducción. Para limitar la corriente de arranque se alimenta el motor normalmente con una tensión reducida del 50% al 75% de la tensión nominal y cuando ya ha adquirido velocidad se le aplica la tensión plena.*

## *4.15 TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS*

*De acuerdo a la estructura del núcleo del transformador trifásico, la más empleadas son las siguientes :*

- *Transformador con Sistemas Magnéticos Acoplados, que es denominado como transformador de tres columnas o núcleo trifásico; que tiene una asimetría en los circuitos magnéticos, lo que origina que las tres corrientes de excitación no sean iguales.*

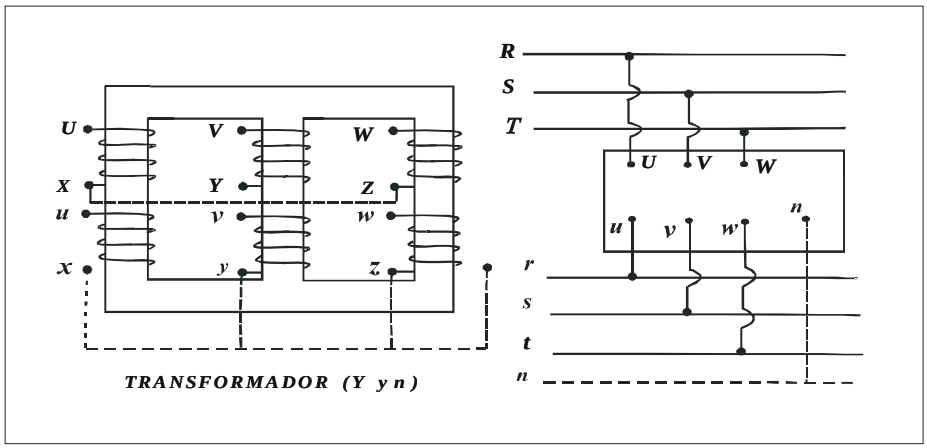



**Figura** *4.15.1*

- *Transformador con Sistemas Magnéticos Independientes, denominado también banco de transformación trifásica a base de transformadores monofásicos ó grupo transformador trifásico. En este caso se tienen tres circuitos magnéticos independientes, por lo que las corrientes de excitación serán iguales.*

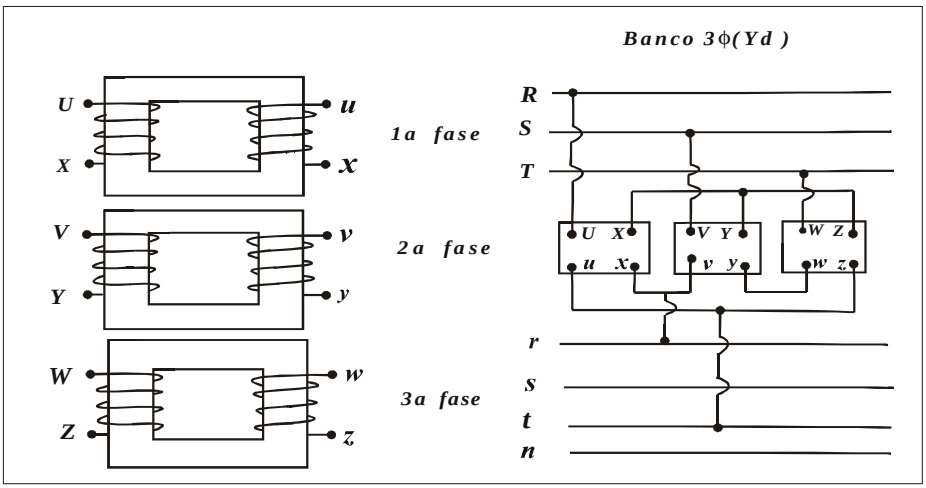


***Figura** 4.15.2*

***Ventajas del transformador de núcleo 3ϕ sobre los grupos monofásicos:***

1. *Ocupan menos espacio.*
2. *Son más livianos.*
3. *Son más baratos.*
4. *Hay solo una unidad que conectar y proteger.*

***Desventajas:***

1. *Mayor peso unitario.*
2. *Cualquier falla inutiliza toda la transformación 3ϕ lo que obliga a tener una unidad o potencia de reserva mayor.*

*Los devanados, tanto primario como secundario, pueden estar acoplados en:*
*Estrella (Y,y)*
*Triangulo(D,d)*
*Zeta(Z,z), también denominado conexión zigzag.*

*Por convención se adopta la letra mayúscula para indicar la forma de conexión del devanado primario y con letra minúscula, la del devanado secundario (por ejemplo: Yd es conexión primaria en estrella y secundario en triángulo). Por lo tanto las combinaciones de conexiones que se obtienen son las siguientes:*

*Dd, Dy, Dz, Yy, Yd, Yz, Zd, Zy, Zz; siendo las mas empleadas las seis primeras combinaciones.*

*Si algún devanado tiene neutro accesible, al símbolo correspondiente se le señala la letra "o" o "n".*

## *CONEXIONES DE TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS*

a) **Conexión Estrella:** *Esta forma de conexión, se prefiere para operaciones con tensiones elevadas(ó muy altas) por resultar más económico.*
b) **Conexión Triángulo:** *Empleada para transformadores de potencia elevada y tensiones moderadas ó corrientes elevadas.*
c) **Conexión Estrella-Estrella:** *Empleado cuando se desee disponer de neutro en baja y cuando no se prevean grandes corrientes de desequilibrio (fase-neutro). Útil para transformadores con potencias pequeñas ó moderadas a tensiones elevadas.*
d) **Conexión Estrella-Triangulo:** *Adecuado como transformador reductor (cuando no se requiere puesta a tierra en el secundario). No genera armónicas de tensión. Se recomienda mayormente para tensiones secundarias relativamente bajas que motiva corrientes elevadas.*
e) **Conexión Triángulo- Estrella:** *Empleado como transformador elevador. No es generador de terceras armónicas de tensión. No motiva flujos por el aire en caso de cargas desequilibradas (c.c.) ni traslados de neutros*

*(sobretensiones). Admite cargas desequilibradas y posibilidad de sacar neutro en baja tensión.*

f) **Conexión Estrella-Zeta:** *Solo se emplea en transformadores de distribución de reducida potencia. Puede operar con neutro secundario, admitiendo toda clase de desequilibrios y las tensiones secundarias no presenta terceras armónicas. Es más caro que el Estrella – Estrella, por el mayor empleo de material en su construcción.*

***PRUEBA DE CIRCUITO ABIERTO***

*Se aplica al lado de baja tensión, la tensión de línea nominal, manteniendo el lado de alta abierto.*

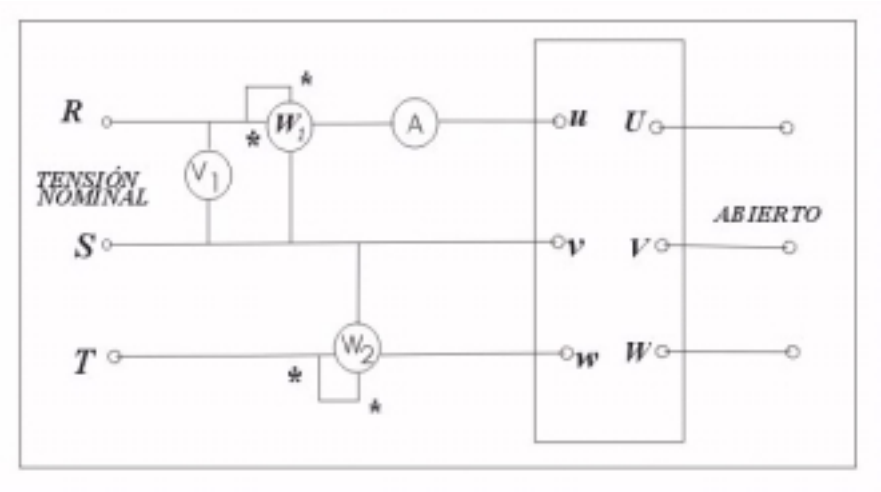



***Figura** 4.15.3*

*Registro de instrumentos:*

A → *Corriente de excitación($I_\phi$)*

$V_1$ → *Tensión de línea nominal del secundario*

$W_1$ + $W_2$ → *Pérdida del hierro*

***PRUEBA DE CORTOCIRCUITO***

*Se pone en cortocircuito el lado de baja del transformador.*

*Se alimenta el lado de alta con una tensión de cortocircuito del orden del ( 5% al 12%) de la tensión nominal de tal forma que fluyan las corrientes nominales por los arrollamientos.*

*Registro de Instrumentos:*

$A$ ⟶ *Corriente nominal*

$V$ ⟶ *Tensión de cortocircuito*

$W_1 + W_2$ ⟶ *Pérdidas en el cobre*

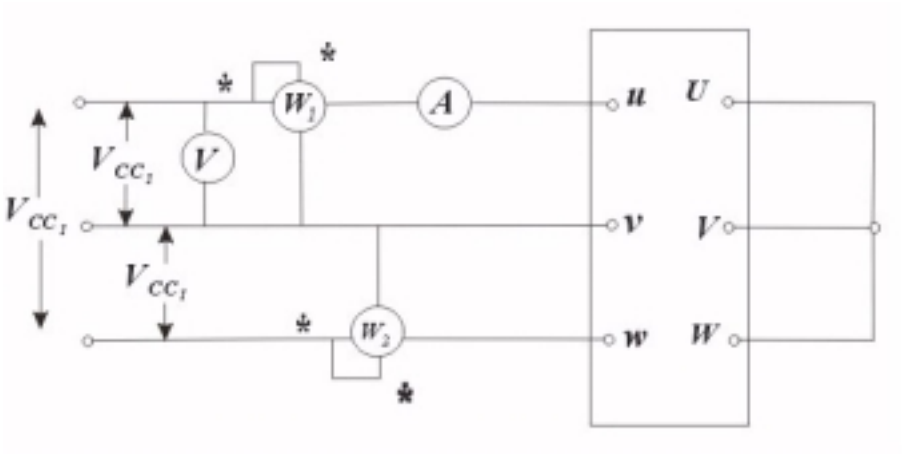



**Figura** *4.15.4*

*En los datos obtenidos de estas pruebas se pueden deducir los parámetros del transformador. Entonces podremos escribir:*

***Ensayo de cortocircuito:***

$$Z_{eq1} = \frac{\frac{V_{CC}}{\sqrt{3}}}{I_{n1}} \quad .....(4-133) \qquad Z_{eq1} = \frac{V_{CC}}{\sqrt{3}I_{n1}} \quad .....(4-134)$$

$$R_{eq1} = \frac{W_{cu}}{3I_{n1}^2} \quad .....(4-135) \qquad R_{eq1} = \frac{W_1 + W_2}{3I_{n1}^2} \quad .....(4-136)$$

$$Xeq_1 = \sqrt{Z_{eq1}^2 - R_{eq1}^2} \quad .....(4-137)$$

***Ensayo de circuito abierto:***

$$Y = \frac{I_\phi}{V_n} \quad .....(4-138)$$

$$g_p = \frac{P_{fe}}{3V_n^2} = \frac{W_1 + W_2}{3V_n^2} \quad .....(4-139)$$

$$b_m = \sqrt{Y^2 - g_p^2} \quad .....(4-140)$$

## *CIRCUITOS EQUIVALENTES DE LOS TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS*

*Si tenemos un transformador 3ϕ cuyo primario esta conectado en Y, el circuito equivalente aproximado de dicho transformador referido al primario será:*

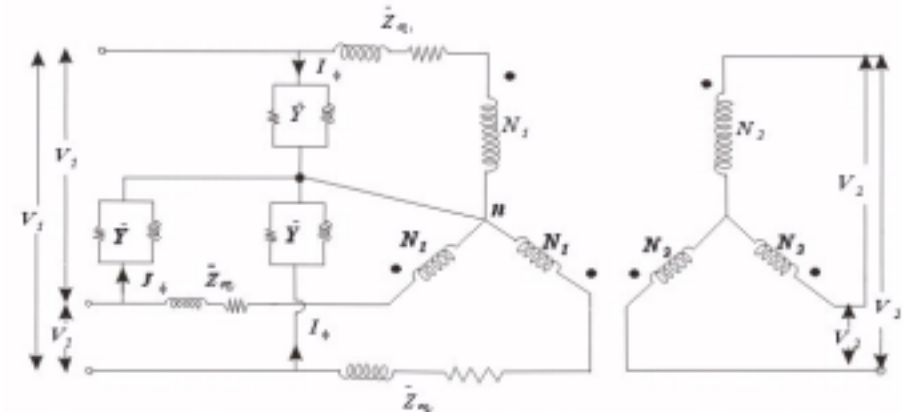


***Figura** 4.15.5*

*Si tuviéramos el transformador 3ϕ cuyo primario está conectado en Δ , el circuito equivalente aproximado de dicho transformador referido al primario será:*

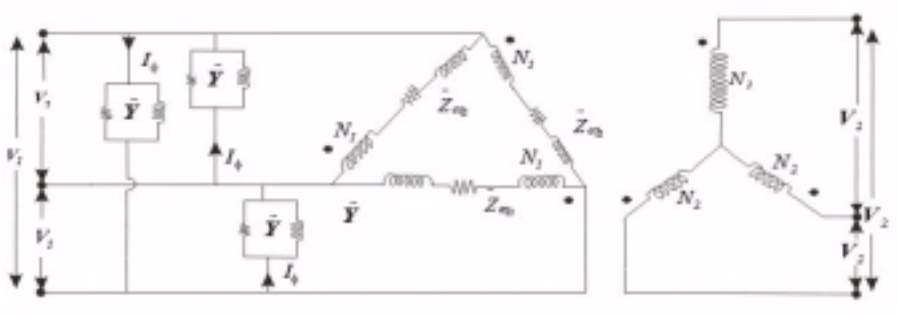


***Figura** 4.15.6*

*Luego si despreciamos la excitación y construimos el circuito monofásico equivalente tendremos:*

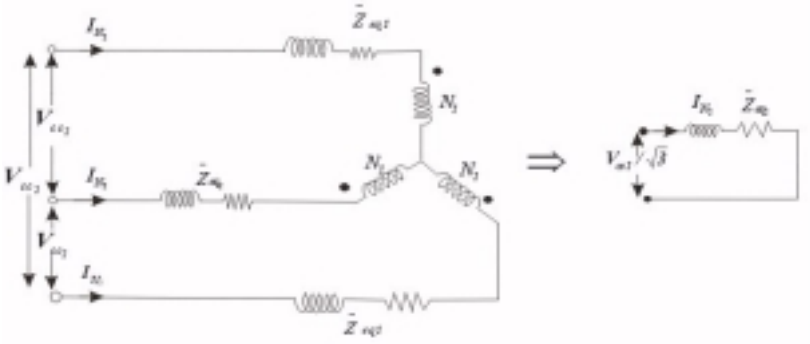


**Figura** *4.15.7*

## *4.16 TRANSFORMADORES DE AUDIO Ó A FRECUENCIA VARIABLE*

*Son pequeños transformadores con núcleos de hierro que trabajan a frecuencia variable. Se usan para acoplar entre sí distintos dispositivos en circuitos electrónicos de comunicaciones, medición y control.*

*Sus principales funciones son las de elevar tensiones contribuyendo así a la ganancia total en amplificadores, y las de actuar como transformadores de impedancias para conseguir la relación óptima entre la impedancia aparente de una carga y la de su alimentador.*

*En la figura se muestra un circuito equivalente de un transformador de salida:*

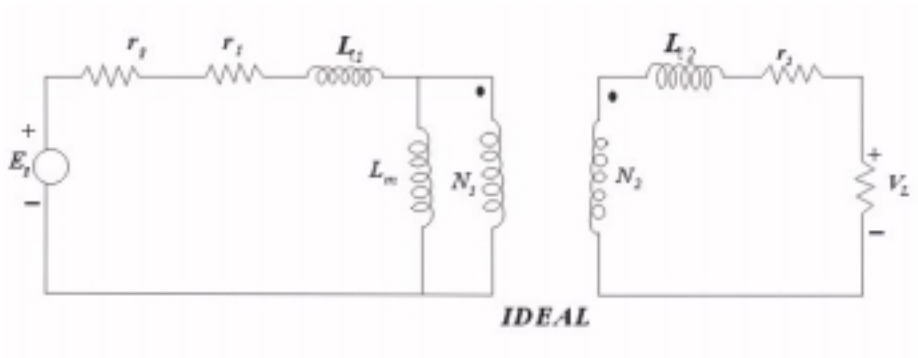



**Figura** *4.16.1*

$E_g$ ⟶ *El amplificador equivalente a una fuente de tensión* $E_g$.
$r_g$ ⟶ *Resistencia interna del amplificador.*
$r_L$ ⟶ *Resistencia de carga.*

- *No se toma en cuenta las pérdidas en el hierro.*

*Su estudio abarca tres gamas de frecuencias:*

*I) A frecuencias intermedias (alrededor de 500 Hz) ninguna de las inductancias tiene importancia y el circuito equivalente se reduce a una red de resistencias.*

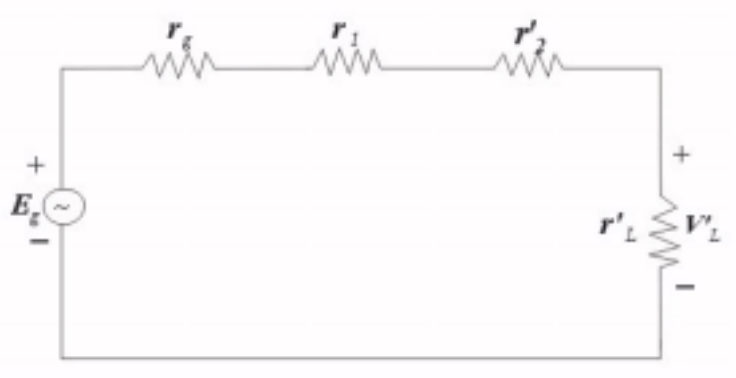


**Figura** *4.16.2*

$V_L$ ⟶ *Tensión de Carga*

$E_g$ → *Tensión de entrada*

$$\frac{V_L}{E_g} = \frac{N_2 r_L^{'}}{N_1 R_{se}^{'}} \quad .....(4-141)$$

$$R_{se}^{'} = r_g + r_1 + r_2^{'} + r_L^{'} \quad .....(4-142)$$

*En esta zona intermedia, la relación de tensiones es aproximadamente constante, es decir su curva característica es plana y el desfase nulo.*

*II) Al aumentar la frecuencia, las reactancias de dispersión del transformador van adquiriendo importancia y el circuito equivalente para la zona de frecuencias altas es la siguiente:*

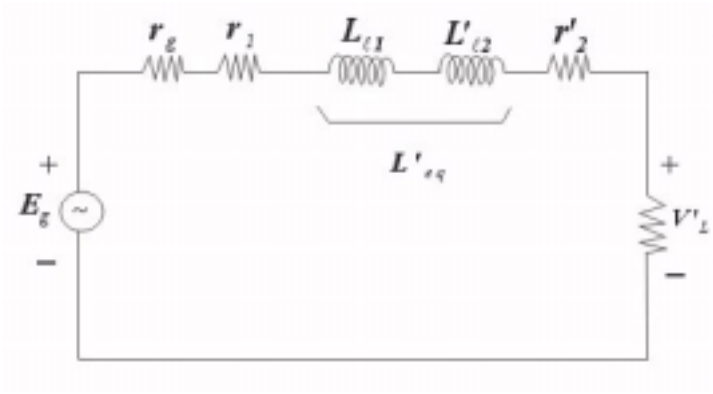



**Figura** *4.16.3*

$$\frac{V_L}{E_g} = \frac{N_2 r_L^{'}}{N_1 R_{se}^{'} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L_{eq}^{'}}{R_{se}^{'}}\right)^2}} \quad .....(4-143)$$

$L_{eq}^{'}$ = *es la inductancia de dispersión equivalente.*

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L_{eq}^{'}}{R_{se}^{'}}\right)^2}} \quad .....(4-144)$$

*Es la relación relativa tensión, respecto a su valor medio.*

$$\phi = tg^{-1}\left(\omega L_{eq}^{'} \div R_{se}^{'}\right) \quad .....(4-145)$$

*Es el ángulo de retraso de la tensión de salida respecto a la entrada.*

*III) A bajas frecuencias las reactancias de dispersión pueden despreciarse, pero la influencia del circuito magnetizante en derivación va creciendo a medida que decrece su reactancia.*

*La inductancia del circuito de magnetización casi se iguala al coeficiente de autoinducción $L_{11}$ del primario.*

*El circuito equivalente para bajas frecuencias es como se muestra en la figura:*

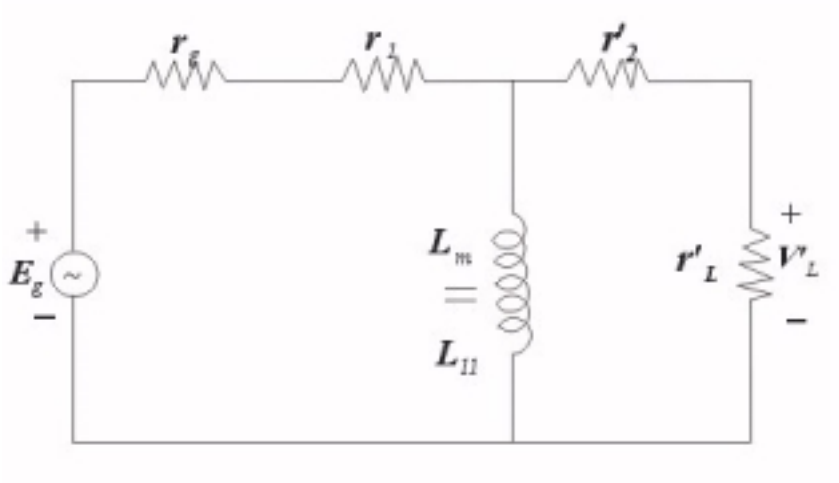



**Figura** *4.16.4*

$$\frac{V_L}{E_g} = \frac{N_2 r_L^{'}}{N_1 R_{se}^{'} \sqrt{1 + \left( \frac{R_{par}^{'}}{\omega L_{11}} \right)^2}} \quad .....(4-146)$$

*En donde:*

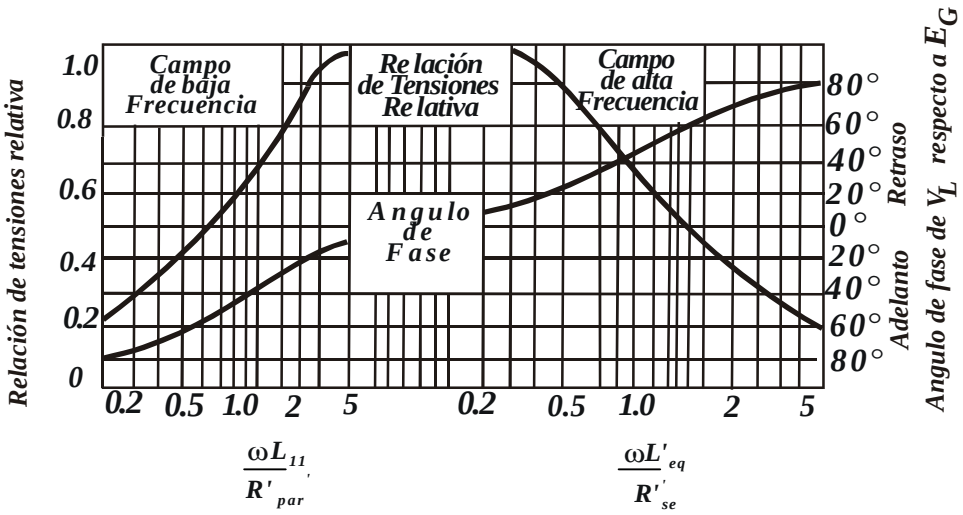
$$R_{par}^{'} = \frac{(r_g + r_1)(r_2^{'} + r_1^{'})}{r_g + r_1 + r_2^{'} + r_L^{'}} \quad .....(4-147)$$

*Relación relativa de tensiones:*

$$\sqrt{1 + \left( \frac{R_{par}^{'}}{\omega L_{11}} \right)^2} \quad .....(4-148)$$

*Ángulo de avance de la tensión de salida respecto a la tensión de entrada:*

$$\phi = tg^{-1} \left( \frac{R_{par}^{'}}{\omega L_{11}} \right) \quad .....(4-149)$$




**Características normalizadas de frecuencia de los tranformadores de salida**

**Figura** *4.16.5*

*La anchura de banda se define como:*

$$\frac{f_h}{f_t} = \frac{R'_{se} L_{11}}{R'_{par} L'_{eq}} \text{.....} (4-150) \qquad f_h = \frac{R'_{se}}{2\pi L'_{eq}} \text{.....} (4-151)$$

$$f_t = \frac{R'_{par}}{2\pi L_{11}} \quad \text{.....} (4-152)$$

*Para conseguir una anchura de banda muy amplia se requiere que la relación entre la autoinductancia y la inductancia de dispersión sea alta, ó que el coeficiente de acoplamiento sea lo más próximo posible a la unidad.*

## *4.17 PREGUNTAS Y RESPUESTAS SOBRE TRANSFORMADORES*

1. *¿ Qué es un transformador?*

   *El transformador es un aparato eléctrico cuya misión es transformar una tensión determinada en otra, también alterna, de igual frecuencia. La transformación tiene lugar sin ninguna clase de movimiento mecánico y casi sin pérdida de rendimiento.*

2. *¿Cómo se clasifican los transformadores?*

   *Los transformadores se clasifican de diversas formas a saber:*

   a) *Según su uso o aplicación, como de:*
      *Potencia.*
      *Distribución.*

*Medida.*
*Aislamiento.*

*Los de potencia pueden ser elevadores o reductores de voltajes.*
*Los de medida y generalmente los de distribución son reductores de tensión.*
*Los de aislamiento no elevan ni reducen el voltaje, solo hacen un acople magnético.*

*b) Según su sistema de refrigeración:*
*Secos (tipo abierto o sellado).*
*En líquido (aceite mineral, líquidos de alto punto de ignición, etc).*

*c) Según su número de fases en:*
*Monofásicos.*
*Trifásicos.*
*Otros (bifásicos, exafásicos, zig-zag, etc).*

*3. ¿Qué partes componen un transformador?*

*El transformador, cualquiera que sea su tamaño, básicamente está constituido de una parte activa que la componen el núcleo, las bobinas y sus accesorios.*

*a)* ***Parte activa:*** *Los devanados y el núcleo forman lo que se llama la parte "activa" del transformador y constituye el corazón del mismo.*

***Devanados.-****También llamados arrollamientos, son los encargados de recibir la tensión (arrollamiento primario) y de entregarlo (arrollamiento secundario).*

*El devanado primario y el secundario forman el circuito eléctrico del transformador, se construyen independientemente con un alambre de cobre ó aluminio al que se da vueltas parecidas a las de un resorte alrededor de un eje central o núcleo. Como es lógico, al terminar de arrollar quedan dos puntas que se llaman principio y fin del devanado. Estas dos puntas se comunican con la parte exterior por aisladores terminales que son de formas diferentes de acuerdo al nivel de voltaje al que están sometidos.*

*Los dos devanados (Primario y Secundario) no están unidos físicamente y de acuerdo al contexto de la respuesta, debe decirse más estrictamente"transformador de Voltaje o tensión", cuyo conjunto forma lo que se llama una fase del transformador.*

***Núcleo.-*** *Es el soporte mecánico sobre el que se enrrollan los devanados y al mismo tiempo lo que permite que al energizar el transformador (también se dice alimentar o entregar tensión) por el devanado primario "aparezca otra tensión en el secundario" mediante un fenómeno natural llamado "inducción magnética".*

*El núcleo forma el circuito magnético del transformador y es construido basándose en aceros especiales.*

b) ***Accesorios:*** *Según sea el uso o aplicación del transformador, los accesorios para éste pueden ser: Tanque, aisladores, herrajes, conmutador, indicador de nivel de aceite, termómetros, rieles, aceite, válvula de alivio de presión, ruedas, tanque de expansión, etc.*

c) ***Aditamentos mecánicos:*** *Constituídos por los tornillos, ángulos, apoyos y demás piezas que permiten el armado y el ajuste de la parte activa.*

d) ***El tanque:*** *Que contiene todo lo anterior, lo protege del medio ambiente y debe estar en capacidad de evacuar el calor producido por las pérdidas de energía propias de su funcionamiento.*

e) ***El Aceite:*** *Toda máquina al trabajar se calienta; el aceite refrigera la parte activa evacuando el calor generado en ella, sirviendo al mismo tiempo como elemento aislante. Hay transformadores llamados "secos", que reemplazan el aceite por aire.*

4. *¿Cuánta vida útil puede tener un transformador?*

*Un transformador, si es operado en las condiciones normales estipuladas en la placa de características y garantizadas por el fabricante, puede durar un mínimo de 20 años. Esto obviamente bajo el supuesto que el transformador se encuentre adecuadamente protegido y mantenido.*

5. *¿Cómo debo especificar un transformador?*

***NOTA****. Un vendedor de equipo técnico, debe tener el carácter de asesor y como tal, debe orientar al cliente ó usuario final del producto. Para el efecto debe consultar con éste, entre otros, los siguientes puntos:*

a) *Uso ó aplicación del transformador : Residencial ó Industrial.*
b) *Tipo de montaje : exterior en poste ó sobre piso; interior en sótano, ó pisos superiores.*
c) *Carga a aplicar al transformador en KVA*
d) *Tensión de la red de alimentación: Usualmente 22,900; 20,000 ; 13,200 10,000 voltios.*
e) *Tipo de servicio: Monofásico o trifásico.*
f) *Tensión de uso en el secundario : 440V, 380V (para el sistema trifásico) o 220V-110V ( para el sistema monofásico).*

*Para especificar correctamente un transformador, debe tenerse en cuenta como mínimo los siguientes puntos:*

- *Potencia ó capacidad expresada en KVA.*
- *Número de fases: monofásico o trifásico.*

- *Conexión:Dy,Dd,Yd,Yy, etc.*
- *Refrigeración:tipo seco ó en líquido.*
- *Tensión primaria.*
- *Tensión secundaria.*
- *Otros.*

*Si el transformador es requerido para subestación capsulada, como subestación tipo pedestal o Pad- Mounted.*

*Ahora, para saber que potencia necesita el transformador hay diversos criterios generales que influyen y son los siguientes.*

*a) El consumo en Kilovatios de cada equipo a conectar ( Este dato aparece en cada aparato eléctrico).*
*b) La simultaneidad con que se conectan los aparatos, es decir, si funcionan todos a la vez ó en forma alterna.*
*c) El tipo de aparatos.*
*d) Las posibilidades futuras de aumento de carga.*

*Un método rápido y muy aproximado sería el siguiente:*

*a) Saber los vatios que tienen todos los aparatos que podemos instalar, ésto se llama saber la capacidad instalada; los siguientes consumos son típicos:*

| ***EQUIPO*** | ***POTENCIA CONSUMIDA*** | ***F. d.*** |
|---|---|---|
| *Nevera* | *Entre 180 y 300 vatios* | *(0.4)* |
| *Congelador* | *Entre 150 y 400 vatios* | *(0.4)* |
| *Radio* | *Entre 75 y 350 vatios* | *(0.8)* |
| *Máquina de coser* | *Entre 30 y 60 vatios* | *(0.2)* |
| *Afeitadora* | *Entre 25 y 40 vatios* | *(0.1)* |
| *Tostadora* | *Entre 1000 y 1400 vatio* | *(0.1)* |
| *Calentador eléctrico* | *Entre 450 y 1500 vatios* | *(0.5)* |
| *Calentador de agua* | *Entre 750 y 2000 vatios* | *(0.4)* |
| *Plancha* | *Entre 550 y 1200 vatios* | *(0.3)* |
| *Estufa eléctrica* | *Entre 2000 y 5000 vatios* | *(0.4)* |
| *Televisor* | *Entre 150 y 550 vatios* | *(0.2)* |
| *Lavadora* | *Entre 200 y 1500 vatios* | *(0.1)* |
| *Ventilador* | *Entre 25 y 100 vatios* | *(0.3)* |
| *Bombillos* | *Entre 15 y 300 vatios* | *(0.4)* |
| *Motores* | *750 vatios por caballo* | *(0.8)* |

*b) El número que aparece al lado derecho es llamado "Factor de demanda" o "Factor de utilización" y trata de establecer en la escala de 0 a 1 el grado de uso de cada aparato en un tiempo determinado y con respecto a los demás.*

*Como es lógico, éste depende del oficio y del nivel de vida del usuario.*
*Los valores que se han colocado son típicos de una casa ó finca sin mucha actividad industrial.*
*Multiplicar el consumo de cada aparato por su factor de demanda, por él número de aparatos y sumar al total, dividiendo luego por mil – 1000- para obtener el resultado en Kilovatios.*

c) *El resultado anterior se divide por un "Factor de potencia global" que depende solamente del tipo de carga, varia entre 0 y 1 con valores típicos entre 0,6 y 0,9. (es menor mientras más motores tenga la edificación). Un valor típico casero es 0,9; un valor típico Industrial es 0,7; el resultado anterior nos da la potencia requerida en KVA sin tener en cuenta futuras ampliaciones.*

d) *Si se preveé alguna ampliación futura, multiplíquese el resultado anterior por un factor mayor que la unidad que tome en cuenta la amplitud en % del aumento de carga. Ejemplo: si se provee un aumento del 50% tómese un factor de seguridad de 1,1.*
*De todo lo anterior podemos decir que para una casa o finca "modesta" un transformador monofásico de 10 KVA debe quedar "sobrado", como se observa, hay muchos factores en juego y lo preferible es asesorarse de un técnico.*

*Ejemplo:*

*Supongamos que una pequeña Industria de confecciones posee el siguiente equipo Instalado:*

- *15 máquinas de coser con motores de 40 vatios ( factor de demanda = 0,7).*
- *20 planchas de 800 vatios ( factor de demanda = 0,7).*
- *5 ventiladores de 100 vatios ( factor de demanda = 0,5).*
- *40 bombillos de 200 vatios (factor de demanda = 1,0).*

*Suma las capacidades instaladas por su factor de demanda = 15* 40*0,7 + 20* 800 * 0,7 + 5* 100* 0,5 + 40* 200* 1,0 + 200* 0,4 = 19950 Vatios =19,95 KW.*

$$\text{Potencia actual requerida en } KVA = \frac{19,95}{0,7} = 28,5KVA$$

*Potencial actual requerida sin proyección inmediata al futuro = 28,5* 1,1= 31,35 KVA.*

*En este caso un transformador trifásico de 30 KVA puede quedar demasiado ajustado. Recomendaríamos instalar un transformador de 45KVA con muy buena proyección futura. Si toda la carga es monofásica, un transformador de 37,5 KVA es el indicado, aunque para uso Industrial es más acostumbrada la potencia trifásica.*

6. *¿Cómo, cuándo y por cuánto tiempo puedo sobrecargar un transformador?*

   *Un transformador puede ser sobrecargado si se conoce:*

   - *La temperatura ambiente promedio del lugar ó recinto donde esta instalado.*
   - *La temperatura promedio del aceite en el nivel superior del tanque.*
   - *La carga que tuvo el transformador las 24 horas precedentes.*

   *Con lo anterior y basado en las guías de cargabilidad, dato suministrado por el fabricante, se puede determinar qué sobrecarga y por cuanto tiempo se le puede aplicar al transformador.*

   *Queda entendido que una sobrecarga exige térmicamente a los diversos aislantes y puede ocasionarse una disminución en la vida útil del transformador.*

7. *¿Puedo pedir cualquier capacidad o existen capacidades normalizadas de transformadores?.*

   *Las normas técnicas de transformadores tienen establecidas capacidades normalizadas para transformadores así:*

   *Monofásico*
   *5, 10, 25, etc*

   *Trifásico*
   *15, 30, 45, 75, etc.*

   *Estas deben consultarse, sin embargo se puede hacer a pedido especial otras capacidades no normalizadas.*

8. *¿Cómo influye el grupo de conexión en la carga a instalar?*

   *El grupo de conexión (Dd0, Dy1,Dy5,Dy11, etc) no tiene incidencia sobre la carga. Incide según sea la necesidad de un neutro accesible en el lado secundario ó en el primario por cuestiones de conexión de equipos de medida y protecciones. Por lo general el grupo de conexión más comúnmente usado es el Dyn5. Esto significa que hay acceso externo al neutro.*

   *El grupo de conexión debe tenerse en cuenta sólo cuando se requiere un transformador para ser instalado en paralelo con otro transformador, ó cuando el transformador se alimenta por un generador eléctrico.*

9. *¿Puede un transformador entregarme dos tensiones simultáneas y diferentes por el secundario, y qué capacidad me puede dar?*

*Efectivamente, un transformador puede entregar dos ó más tensiones diferentes por el lado secundario y en forma simultánea. Precaución especial: Debe tenerse cuidado en las cargas a conectar puesto que la suma de las potencias entregadas debe ser como máximo igual a la nominal del transformador.*

10. *¿Qué es el transformador conmutable?*

    *Es aquel transformador que está diseñado y constituído para operar en dos tensiones de alimentación diferentes. Ejm. Inicialmente ser conectado para una tensión primaria de 13200 voltios y luego, mediante la conmutación ó cambio de conexión Interna en los devanados, conectarse a 11400 voltios.*

    *Ahora bien, dicha conmutación puede realizarse desde el exterior del transformador mediante una perilla de conmutación o efectuando cambios internos, desencubando el transformador.*

11. *¿Ante una caída ó elevación del voltaje secundario, qué puede hacerse en el transformador?*

    *Todos los transformadores monofásicos y trifásicos de ejecución normal, disponen de un sistema de cambio, diferente al detallado en la pregunta anterior que permite obtener ajustes pequeños de tensión.*

    *Ejm. Si en un sistema trifásico normal a 7% (208 – 195), y el conmutador de derivaciones se encuentra en ese momento en la posición 2 de 5, como cada paso de derivación equivale a 21.5%, entonces debo adelantar la perilla de conmutación 3 pasos 72.5 =2.8), ó sea a la posición 5 para lograr obtener aproximadamente los 208 – 120 voltios originales.*

12. *¿Cómo debo especificar el voltaje secundario de un transformador monofásico?*

    *Si se desea alimentar cargas permanentes en un sistema trifilar,* ***NO TRIFÁSICO****, es diferente el que sea 240 – 120 ó 120 – 240. Pero si en un futuro deseo alimentar sólo a 120 voltios, debo especificarlo 120 – 240 voltios. La razón es que los cuatro terminales internos del devanado de baja tensión están sueltos y permite conectarlos en serie o paralelo.*
    *Así hay una diferencia entre los conectores de B.T. para 240 – 120 y / o 120 – 240, como se indica en la norma ANSI.*

13. *¿Porqué se habla de un voltaje secundario en vacío y un voltaje secundario a plena carga?*

    *Cuando un transformador se energiza y no se aplica carga, por el secundario aparece un voltaje que se llama "tensión en vacío"; pero cuando comienza a cargarse, esta tensión va reduciéndose hasta caer aproximadamente un 2%, Esto depende del transformador cuando esté completamente cargado. Esto se debe a pérdidas internas del transformador Inherentes a su construcción y se conoce como regulación.*

*Entonces el voltaje en vacío tiene que ser un poco mayor con carga y basta que nos sea entregado uno de los datos para quedar definido el otro.*

14. *¿Qué accesorios debe llevar un transformador?*

*Analicemos primero cuáles son los accesorios de que disponemos y para qué sirve cada uno:*

***a) Relé Buchholz:***
*Es un aparato de protección del transformador que puede accionar una alarma en caso de fallas leves y que puede sacar de servicio al transformador en caso de fallas graves. Las fallas que puede detectar son todas aquellas que producen aumento de temperatura capaz de hacer ebullir el aceite y producir burbujas; tal es el caso de un cortocircuito interior. Sólo puede ir en transformadores que lleven tanque de expansión.*

***b) Deshumectador de silica – gel:***
*La expansión y contracción del volumen del aceite hacen que el transformador necesite "respirar" el aire del medio ambiente, el cual contiene humedad que al penetrar al interior ocasionaría degeneración del aceite y oxidación interior, este deshumectador contiene gránulos de una sustancia deshidratante que son paso forzado del aire, absorbiendo toda su humedad.*

***c) Válvula de Sobrepresión:***
*Es una protección contra explosión del transformador ocasionada por aumento de presión cuando ocurren fallas ó cortocircuito. Las hay en dos tipos : Con contacto de alarma y/o disparo (para desconectarse el transformador) y pequeña sin contactos.*

***d) Indicador de Nivel:***
*Es un medio exterior de conocer el nivel (altura) a la que se encuentra el líquido en el tanque con el fin de descubrir fugas ó aumentos excesivos en el volumen por calentamiento. Las hay de dos tipos: Tipo flotador mostrando el nivel por medio de una aguja en un dial, y de vidrio, donde se observa directamente el Interior del tanque.*

***e) Termómetro:***
*Indica la temperatura en la parte superior del aceite. Los tenemos en dos tipos : con contacto de alarma y / o disparo y sin contactos.*
*Ambos poseen un indicador de la máxima temperatura que ha alcanzado el transformador desde la ultima inspección.*

***f) Conmutador de Derivaciones:***
*Colocado con el fin de regular el voltaje de salida el transformador cuando ocurren variaciones en el voltaje primario. Estos son de accionamiento exterior.*

***g) Placa de características:***
*Donde aparecen consignados todos los datos particulares del transformador, tales como corrientes por las líneas, pesos, conexiones eléctricas, etc.*

***h) Caja para terminales del circuito de control:***
*A donde van todos los terminales de los contactos de alarma y / o disparo que poseen el revelador buchholz, la válvula de sobrepresión, termómetros, etc. Los elementos encargados de dar alarma como bombillos, sirenas, pitos, etc. Deben ser conectados desde esta caja.*

***i) Tanque de expansión:***
*Es un tanque elevado con respecto al tanque principal del transformador y conectado por una tubería con éste (En ésta tubería se instala el Relé Buchholz), su finalidad es prevenir el envejecimiento prematuro del aceite; sólo se usa en transformadores de potencias mayores a 2,5 MVA ó en casos en los que el cliente lo desee.*

***j) Caja terminal ó ducto para aisladores:***
*Es una cámara donde van albergados los aisladores terminales para A.T. ó B.T. con el fin de protegerlos en un medio ambiente hostil, deben cumplir distancias eléctricas mínimas y clave de recirculación generalmente IP 20 o IP 28.*

***k) Dispositivo de purga:***
*Se utiliza para drenar ó tomar muestras de aceite, deben ir en la parte inferior del tanque principal y en la parte inferior del tanque de expansión cuando el transformador lo lleva.*

***l) Válvulas de Recirculación:***
*Son dos: una en la parte superior y otra en la parte inferior del tanque. Se usan para hacer recircular aceite con filtro de prensa*

***m) Conectores del Tanque a tierra:***
*Se usan para aterrizar el tanque con el fin de evitar peligros en el personal que se acerque a él y facilitar el camino a tierra de las sobretensiones. Los hay tornillos y placa de conexión a tierra.*

***n) Dispositivos para tracción:***
*Facilita el arrastre de los transformadores evitando que sea agarrado de partes susceptibles de daño.*

***o) Orejas de Levante:***
*Para levantar el transformador con eslingas ó ganchos.*

***p) Ruedas:***
*Facilita la traslación del transformador. Las tenemos en dos tipos: Orientable con ó sin pestañas.*

***q) Radiadores:***
*Ayudan a enfriar el transformador aumentando artificialmente la superficie del tanque en contacto con el medio ambiente refrigerante.*

***r) Manovacuómetros:***
*Se utilizan con el fin de chequear los cambios en la presión interna del transformador.*

***s) Gancho para levante de la tapa:***
*Permite levantarla cuando su peso sobrepasa los 50Kg.*

***t) Cuernos de arco:***
*Desvía las sobretensiones de las líneas para que se descarguen a través del tanque y no pasen por los devanados.*

15. *¿Cuál es la diferencia entre un transformador convencional y uno autoprotegido?*

*La diferencia entre un transformador convencional y uno autoprotegido radica en que el primero está construido con lo mínimo y necesario para operar; parte activa, tanque, aceite y accesorios y para su adecuada instalación se le debe adicionar externamente las protecciones como pararrayos, fusibles en el primario y un posible Interruptor automático en la salida a la red secundaria.*

*El autoprotegido lleva externamente y adosado al tanque los pararrayos e internamente los fusibles del primario y secundario, además de un interruptor, e inclusive lámpara de señalización de sobrecarga.*

16. *¿Qué es un autotransformador?*

*Es un transformador que tiene unidos físicamente los dos devanados debido a que esto ocasiona un ahorro en el material a usar en la construcción.*

*Cuando la relación entre el voltaje de A.T. y el B.T. no excede de 2 y el voltaje de A.T. no excede de 1200 voltios, el auto transformador es una alternativa muy económica para el cliente, ya que el precio de lista se busca para un transformador con una potencia menor que la pérdida en un factor:*

$$\frac{AT - BT}{AT}$$

*Se necesita el previo consentimiento del cliente y de la fábrica para venderlo.*

*Ejemplo:*

*Nos piden un transformador $1\phi$ de 75 KVA. Con A.T. = 440 voltios y B.T. = 220 voltios.*

*Hay dos alternativas:*

$$\frac{AT - BT}{AT} = \frac{440 - 220}{440} = \frac{220}{440} = 0,5$$

*Y buscamos el precio de lista de un transformador con:*

$$75\ KVA * 0,5 = 37,5\ KVA$$

*Advertimos que es sólo para el precio ya que el auto transformador puede entregar todos los 75 KVA completos.*

*Cuando calculemos la potencia para el precio siempre debemos aproximar los resultados a la potencia superior más próxima:*

*Ejemplo: Si el transformador del ejemplo anterior hubiese sido 45 KVA 3ϕ deberiamos buscar en lista de precios un transformador con:*

$$45KVA * 0,5 = 22,5\ KVA$$

*Como este valor no aparece en la lista, lo aproximamos a 30 KVA.*

*NOTA: Para bajas potencias no es técnica y económicamente recomendable.*

17. *¿A qué pruebas se someten los transformadores antes de ser despachados al cliente?.*

*Hay que diferenciar tres tipos de pruebas:*

- *De rutina: Las que se realizan a todos los transformadores que salen"Sin excepción".*
- *Tipo y especiales: Se realizan a solicitud del cliente.*

***Las pruebas de rutina son:***

a) *Medida del valor de la resistencia óhmica de los devanados en la posición de trabajo del conmutador de derivaciones.*
b) *Medidas de la Relación de transformación, verificación y comprobación de la polaridad y grupo de conexión.*
c) *Medidas de las pérdidas y tensión de cortocircuito.*
d) *Medidas de las pérdidas y corrientes de vacío.*
e) *Prueba de tensión inducida: Se trata de verificar la calidad del aislamiento entre espiras y entre capas. Para el efecto se aplica una tensión por el devanado de baja tensión, equivalente al doble de la tensión en vacío y para evitar la saturación del núcleo se aplica una frecuencia equivalente como mínimo al doble de la nominal y durante un lapso de tiempo que depende de la frecuencia aplicada.*

*f) Prueba de tensión aplicada: Con éste ensayo se verifica el estado de los aislamientos entre los devanados primario y secundario y entre éstos a tierra.*

***Las pruebas tipo son:***

*a) Prueba del conmutador de derivaciones. (No se realiza para transformadores de distribución).*
*b) Pruebas de impulso y de frentes de onda: Simulan las descargas atmosféricas y los rayos para demostrar que el transformador tiene un aislamiento suficientemente grande como para resistirlos.*
*c) Prueba de calentamiento: Verifica que las temperaturas de trabajo normal del transformador no se pasen de las apropiadas ya que este factor es primordial en la vida del transformador. Es una prueba que puede durar 10 horas en la cual se simula el transformador con toda su carga para medir el calentamiento.*
*d) Prueba de rigidez dieléctrica del aceite: Se realiza para verificar el posible contenido de humedad en el aceite, Con éste ensayo y otros como el de acidez, tensión interfacial, viscosidad y color, puede determinarse el estado del aceite.*

***Las pruebas especiales son:***

*a) Medición de la impedancia de secuencia cero.*
*b) Medición de tangente delta o factor de potencia de los aislamientos.*

*18. ¿Cuándo se sabe si el transformador pasa o no las mencionadas pruebas?*

*Dentro del grupo de ensayos relacionados en el numeral anterior , hay pruebas de tipo destructivo y no destructivo pero que se evalúan respecto a valores de normas preestablecidos.*
*Dentro de las pruebas de tipo destructivo se encuentran:*

- *Pruebas de tensión inducida.*
- *Prueba de tensión aplicada.*
- *Prueba de impulso.*

*Una falla en una de éstas pruebas, da lugar a rechazar el transformador y aún el diseño.*
*Respecto a las pruebas de tipo destructivo, y excluyendo las pruebas anteriormente mencionadas (de tipo destructivo) en el numeral anterior, la evaluación está basada en las diferentes normas NTC., tales como la N° 818 y 819 que se refiere a los niveles de pérdidas en núcleo y devanados, corriente magnetizante y tensión de cortocircuito; las N° 801, 1058 y 2482 que tratan de los límites de calentamiento y capacidad de sobrecarga.*

*19. ¿Qué opciones anormales afectan la vida útil del transformador?*

*Diversidad de factores afectan la vida útil del transformador, la cual se espera que sea mínimo de 20 años. Entre otro factores los más relevantes son los siguientes:*

*Condiciones de alimentación: Para una misma carga, si se alimenta sobreexcitado ó sea con tensión primaria mayor a la nominal en la posición del conmutador, el núcleo además de saturarse arrojará más pérdidas y en consecuencia se presentarán temperaturas en aceite y devanados mayores a las normales. Si el transformador es alimentado a una frecuencia 5%, o más, por debajo de la nominal 60 ciclos, de igual manera se presentará calentamiento en el núcleo al incrementarse las pérdidas.*

*También deben incluirse las situaciones transitorias en la red tales como sobretensiones por maniobra, descargas atmosféricas, etc.*

***CONDICIONES AMBIENTALES:***

*Los transformadores están diseñados para operar bajo determinadas condiciones de temperatura y altura sobre el nivel del mar. Si no se tienen en cuenta estos puntos, el transformador puede sufrir sobrecalentamiento que le restará vida útil.*

***CONDICIONES DE CARGA:***

*Como un complemento a lo anotado en el numeral 6, si al sobrecargar el transformador no se tiene en cuenta la temperatura ambiente, la carga precedente y el tiempo durante el cual vamos a aplicar la sobrecarga que necesitamos, pueden presentarse sobrecalentamientos y por ende le estaremos restando vida útil al transformador.*

# *PROBLEMAS RESUELTOS*
# *CAPITULO IV*

## *TRANSFORMADORES 1ϕs y 3ϕs*

***PROBLEMA N° 4.1 :*** *Un transformador monofásico de 5 KVA, 2300/230 V , y 60 Hz fue sometido a ensayos con los siguientes resultados:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| C.A. | 230V | 1,01A | 40W |
| C.C | 142V | Inom | 110W |

*a) Calcular los parámetros del circuito equivalente referido al lado de baja tensión.*

*b) Si el voltaje y la corriente en el secundario se mantienen en sus valores nominales. Determine el f.d.p. de la carga con la que se obtiene máxima regulación. Calcular este valor.*

*SOLUCIÓN:*

*a)Para el circuito abierto:*

$V_o = 230V$

$I_o = 1{,}01A$

$P_o = 40W$

$$g_P = \frac{P_{OC}}{V_{OC}^2} = \frac{40}{230^2} = 7{,}56 \times 10^{-4}\ mhos$$

$$Y_\phi = \frac{I_{OC}}{V_{OC}} = \frac{1{,}01}{230} = 4{,}39 \times 10^{-3}\ mhos$$

$$Y_\phi{}^2 = g_P{}^2 + b_m{}^2 \qquad \Rightarrow \qquad b_m = 4{,}324 \times 10^{-3}\ mhos$$

$$\therefore g_P = 7{,}56 \times 10^{-4}\ mhos \qquad X_m = 231{,}245\Omega$$

*Para el cortocircuito:*
*Referido al lado de alta tensión:*

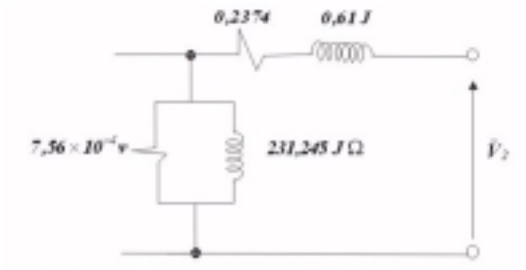
$$\Rightarrow \quad In_1 = \frac{5K}{2300} = 2{,}174A \qquad \Rightarrow \quad Z_{SC} = Zeq_1 = \frac{V_{SC}}{I_{SC}} = \frac{142}{2{,}174} = 65{,}32\Omega$$

$$R_{SC} = \frac{P_{SC}}{I_{SC}^2} = \frac{110}{2{,}174^2} = 23{,}274\Omega \qquad \Rightarrow \quad X_{SC} = \sqrt{Z_{SC}^2 - R_{SC}^2} = 61{,}03\Omega$$

$\Rightarrow$ *Reflejado al lado de baja tensión :* $a = 10$

$$R_{eq\,2} = \frac{R_{SC}}{a^2} = \frac{R_{eq\,1}}{a^2} = 0{,}2374\Omega \qquad X_{eq\,2} = \frac{X_{SC}}{a^2} = 0{,}61\Omega$$

$\Rightarrow$ *En el lado de BT, tenemos el siguiente circuito equivalente:*




$$\theta_{CC} = arctan\left(\frac{61,03}{23,274}\right)$$

$$\theta_{CC} = 69,125°$$

***Figura*** *P4.1.1*

*b)*

$$I_{2n} = \frac{5k}{230} = 21,74\,A$$

$$V_{2n} = 230V \qquad Z_{eq\,2} = \sqrt{0,2374^2 + 0,61^2} = 0,655\Omega$$

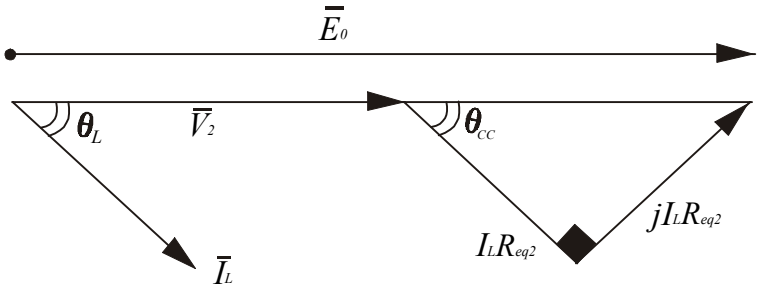



***Figura*** *P4.1.2*

$$\%r \cong \frac{I_{L2}}{V_2} \times Z_{eq\,2} \times cos(\theta_{CC} - \theta_L) \times 100$$

$$\Rightarrow r_{max} \text{ ocurre cuando } \theta_{CC} = \theta_L$$

$$\Rightarrow \theta_L = 69,1° \Rightarrow \quad f.d.p = 0,356$$

$$\therefore r_{max} = \frac{21,74}{230} \times 0,655 = 6,19\%$$

***PROBLEMA N° 4.2*** *: Un transformador monofásico de 500 KVA, 42/2,4 KV y 60Hz. Fue sometido a la prueba de vacío y cortocircuito, con los siguientes resultados:*

*Vacío: 2400 V 18,1 A*

*Cortocircuito: 955 V 5,91 A 962,5 W*

*sabiendo además que la máxima eficiencia se obtiene para* $\alpha$ *= 0,9915*

*a) Determinar los parámetros del circuito equivalente.*

*b) Determinar la tensión en la carga, cuando esta consume 500 KVA con f.d.p.= 0,8 capacitivo y alimentado el primario del transformador con 42 KV*

*c) Determinar el f.d.p. de la carga, para conseguir regulación cero cuando la carga consume 500 KVA a tensión nominal.*

*SOLUCIÓN:*

*a) Prueba de cortocircuito:*

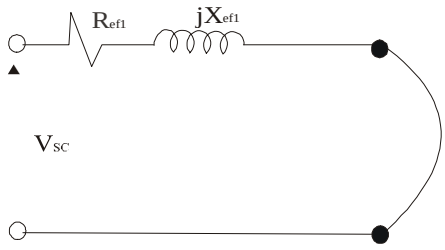
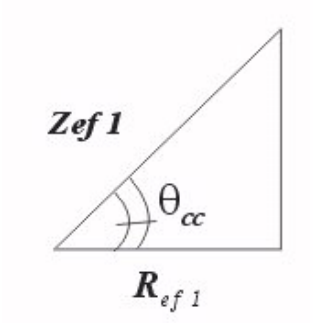



**Figura** *P4.2.1*

$$R_{eq\,1} = \frac{P_{SC}}{I_{SC}^2}$$

$$R_{eq\,1} = \frac{962{,}5W}{5{,}91^2} = 27{,}556\Omega$$

$$Z_{eq\,1} = \frac{V_{SC}}{I_{SC}} = \frac{955}{5{,}91} = 161{,}6\Omega \quad \Rightarrow \quad X_{eq\,1} = \sqrt{161{,}6^2 - 27{,}556^2} = 159{,}23\Omega$$




$$R_{eq\,1} = Z_{eq\,1} \times \cos\theta_{CC} \quad \Rightarrow \theta_{CC} = 80{,}182°$$

$$\therefore \quad Z_{eq\,1} = 161{,}6\angle 80{,}182°$$

**Figura** *P4.2.2*

*Prueba de Vacío:*

$\alpha$ *para máxima eficiencia* $\Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\dfrac{P_{h+f}}{P_{Cu\,N}}} = \sqrt{\dfrac{P_{OC}}{P_{SC}}} \quad \therefore \quad P_{Cu\,N} = \dfrac{P_{OC}}{\alpha^2}$

$$\Rightarrow \quad P_{Cu\,N} = In_1^{\,2} \times R_{eq_1} = \left(\frac{500}{42}\right)^2 \times 27{,}556 = 3{,}91\ KW$$

$$\Rightarrow \quad P_{h+f} = P_{Fe\,N} = 3{,}844\ KW = P_{OC} = \alpha^2 \times P_{Cu\,N}$$

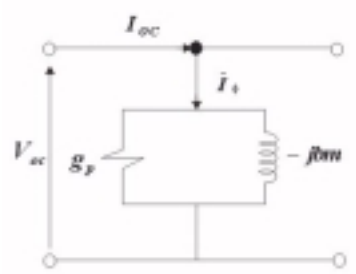


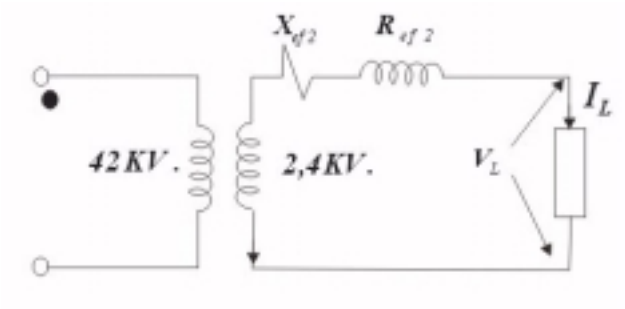

**Figura** *P4.2.3*

$$g_P = \frac{P_{OC}}{V_N^2} = \frac{3{,}844K}{2400^2} = 667\times 10^{-6}\,mhos \;\Rightarrow\; R_P = 1{,}4984K\Omega$$

$$Y_\phi = \frac{I_\phi}{V_N} = \frac{18{,}1}{2400} = 7{,}54\times 10^{-3}\,mhos$$

$$\Rightarrow\; b_m = \sqrt{Y_\phi^{\,2} - g_P^{\,2}} = 7{,}51\times 10^{-3}\,mhos \;\therefore X_m = 133{,}16\Omega$$

*b)*




$\cos\phi = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \phi = 36{,}87°$

***Figura*** *P4.2.4*

$$a = \frac{42}{2{,}4} = 17{,}5$$

$$\bar{Z}_{eq\,2} = \frac{\bar{Z}_{eq\,1}}{a^2} = \frac{161{,}6\angle 80{,}182°}{17{,}5^2} = 0{,}528\angle 80{,}182°$$

$$\bar{V}_L + \bar{Z}_{eq\,2} \times \bar{I}_L = 2400\angle\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \text{Tomando como referencia :} \quad \bar{V}_L = V_L\angle 0°$$

$$V_L \times 10^3 + \frac{500\times 10^3}{V_L \times 10^3}\angle 36{,}87° \times 0{,}528\angle 80{,}182° = 2{,}4\times 10^3\angle\alpha$$

$$V_L + \frac{264}{V_L\times 10^3}\angle 117° = 2{,}4\angle\alpha \qquad V_L \text{ está en KV}$$

$$\Rightarrow \quad \left(V_L + \frac{-0{,}12}{V_L}\right) + \frac{0{,}235}{V_L} j = 2{,}4\angle\alpha \quad \Rightarrow \quad 2{,}4^2 = \left(V_L - \frac{0{,}12}{V_L}\right)^2 + \left(\frac{0{,}235}{V_L}\right)^2$$

$$\therefore \quad V_L = 2{,}447\,KV$$

*c) Como una aproximación de la regulación tenemos:*

$$r\% = \frac{\bar{I}_{L\,2}}{V_2} \times Z_{eq\,2} \times \cos(\phi - \theta_L) \times 100 \quad \text{donde} \quad \phi = \arctan\left(\frac{X_{eq\,2}}{R_{eq\,2}}\right)$$

$$X_{eq\,2} = \frac{X_{eq\,1}}{a^2} \qquad R_{eq\,2} = \frac{R_{eq\,1}}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = 80{,}18° \quad \Rightarrow \quad \text{Para la condición } r = 0$$

$$\Rightarrow \quad \phi - \theta_L = 90°$$

$$\theta_L = -9{,}82°$$

$$\therefore \quad \cos\theta_L = 0{,}9853$$

***PROBLEMA N° 4.3 :*** *Se tiene un transformador monofásico con los siguientes datos de placa: 10KVA, 440/110V, 60Hz y tiene los siguientes parámetros:*
*$r_1$ = 0,5 ohm* *$r_2$=0,032 ohm* *$X_1$=0,9ohm* *$X_2$=0,06 ohm*

*En vacío la corriente absorvida por el bobinado de 440 V es de 0,5 A y las pérdidas en el núcleo es de 100 W.*

*a) Calcular la tensión necesaria en el primario para mantener la tensión nominal en bornes del secundario cuando entrega una corriente de sobrecarga del 25% con f.d.p. 0,8 (inductivo).*
*b) Para el régimen de operación en a) calcular la regulación y la eficiencia.*
*c) Calcular la corriente para eficiencia máxima y cual es el valor de ésta.*

*SOLUCIÓN:*
*Para la prueba en vacío, tenemos el siguiente circuito equivalente:*

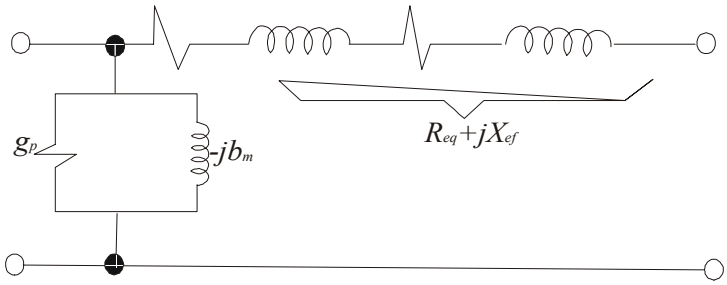



**Figura** *P4.3.1*

$$\Rightarrow \quad g_P = \frac{P_{OC}}{V_{OC}^2} = \frac{100}{440^2} = 5{,}165\times 10^{-4}\ mhos$$

$$Y_\phi = \frac{I_{OC}}{V_{OC}} = \frac{0{,}5}{440} = 1{,}136\times 10^{-3}\ mhos$$

$$\therefore \quad b_m = \sqrt{Y_\phi^2 - g_P^2} \quad = \sqrt{\left(1{,}136\times 10^{-3}\right)^2 - \left(5{,}165\times 10^{-4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow b_m = 1{,}0122\times 10^{-3}\ mhos$$

$$\Rightarrow r_P = \frac{1}{g_P} = 1{,}936\,K\Omega$$

$$X_m = \frac{1}{b_m} = 987{,}947\,\Omega \qquad\qquad r_2' = a^2\times r_2 = 16\times 0{,}032 = 0{,}512\ \Omega$$

$$X_2' = a^2\times X_2 = 0{,}96\ \Omega$$

*a) Circuito simplificado*: $I_{2N} = \dfrac{10\times 10^3}{110} = 90{,}91A$

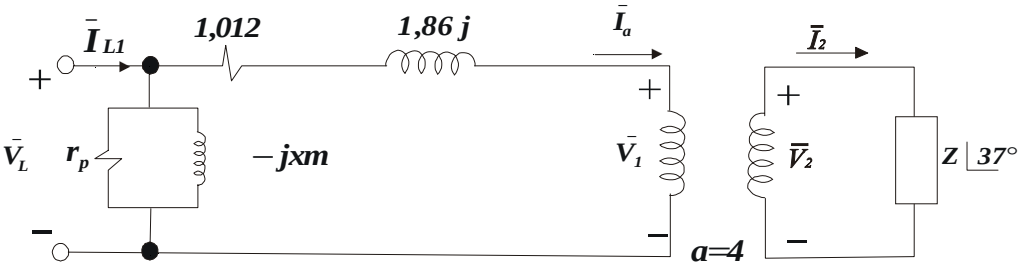



**Figura** *P4.3.2*

$$\Rightarrow \quad tomando\ \bar{V}_2 = V_2\angle 0° \qquad \Rightarrow \quad I_{2N}(sobrecarga) = 1{,}25 \times 90{,}91\angle -37°$$

$$I_{2NS} = 113{,}64\angle -37°$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{I}_a}{\bar{I}_{2NS}} = \frac{1}{4} \qquad \therefore \bar{I}_a = 28{,}41\angle -37°$$

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \qquad \Rightarrow \bar{V}_1 \cong 110\angle 0° \times 4 \cong 440\angle 0°, \qquad donde \quad \bar{V}_2 = 110\angle 0°$$

$$\bar{V}_L = \bar{V}_1 + \bar{I}_a \times (1{,}012 + 1{,}86\,j)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{V}_L = 440\angle 0° + 28{,}41\angle -37° \times 2{,}1175\angle 61{,}45° = 495{,}4\angle 2{,}88°$$

*b)*

$$r\% = \frac{I_{L2}}{V_2}\left(R_{eq2} \times \cos\theta_L + X_{eq2} \times sen\theta_L\right) \times 100$$

$$\Rightarrow R_{eq2} = r_2 + \frac{r_1}{a^2} = 0{,}032 + \frac{0{,}5}{16} = 0{,}06325\ \Omega$$

$$X_{eq2} = X_2 + \frac{X_1}{a^2} = 0{,}06 + \frac{0{,}9}{16} = 0{,}11625\ \Omega$$

$$r\% = \frac{113{,}64}{110} \times \left(0{,}06325 \times \frac{4}{5} + 0{,}11625 \times \frac{3}{5}\right) \times 100$$

$$r\% = 12{,}43$$

*Eficiencia :*

$$P_{Cu} = I_a^2 \times (r_1 + r_2') = 28{,}41^2 \times 1{,}012 = 816{,}814W$$

$$P_{FE} = V_L^2 \times g_P = 495{,}4^2 \times 5{,}165 \times 10^{-4} = 126{,}76W$$

$$P_{Sal} = V_2 \times I_{L2} \times \cos\theta_L = 110 \times 113{,}64 \times 0{,}8 = 10000{,}32W$$

$$\therefore \Delta P = P_{Cu} + P_{FE} = 943{,}574W$$

$$\therefore \quad \eta = \frac{P_S}{P_S + \Delta P} = \frac{10000{,}32}{10000{,}32 + 943{,}574} = 0{,}9137$$

*c) Eficiencia máxima:*

$$P_{CuN} = I_{aN}^2 \times 1{,}012 = \left(\frac{10 \times 10^3}{440}\right)^2 \times 1{,}012 = 522{,}72W$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_{OC}}{P_{CuN}}} = \sqrt{\frac{P_{Fe}}{P_{CuN}}} = \sqrt{\frac{100}{522{,}72}} = 0{,}4374$$

$$\frac{I_{L2}(para\ \eta_{max})}{I} = \alpha = \frac{I_{L1}(para\ \eta_{max})}{I}$$

$$P_{Sal} = V_{L2} \times I_{L2}(\text{ para } \eta_{max}) \times \cos\theta_L = 110 \times \alpha \times \frac{10 \times 10^3}{110} \times 0{,}8 = 3499{,}2W$$

$$\therefore \quad \eta_{max} = \frac{P_S}{P_S + \Delta P} = \frac{3499{,}2}{3499{,}2 + 199{,}98} = 0{,}945$$

$$\therefore \quad \eta_{max} = 94{,}5\%$$

***PROBLEMA N° 4.4 :*** *El ensayo de cortocircuito y vacío bajo corriente y tensión nominales respectivamente de un transformador monofásico de 10/2,3 KV, 60 Hz 100KVA dio los siguientes resultados:*

*Cortocircuito : 1250 W ; f.d.p.=0,65*
*Vacío : 350 W ; f.d.p.=0,24*

*El transformador es instalado mediante una línea para suministrar una carga de f.d. p. igual a 0,85 inductivo a 2,3 KV.*
*Determinar:*

*a) La tensión al inicio de la línea, si el transformador se encuentra a ¾ de plena carga. La línea tiene una reactancia igual a ½ de la reactancia equivalente del transformador y se encuentra en el lado de A.T.*
*b) Calcular el porcentaje de carga a la cual Ud. recomendaría para encontrar la máxima eficiencia del sistema línea – transformador.*
*c) Determinar la impedancia de cortocircuito y los parámetros g y b por unidad.*
*d) Si se hubiera considerado la resistencia de la línea como afectaría la respuesta c)*

*SOLUCION:*

*De la prueba de cortocircuito:*
*Secundario en corto*
*Instrumento en el lado de alta tensión*

$$S_n = V_n \times I_n = 10000 I_n = 100000$$

$$\Rightarrow \quad I_n = 10A = I_{SC}$$

$$R_{SC} = \frac{P_{SC}}{I_{SC}^2} = \frac{P_{SC}}{I_n^2} = \frac{1250}{10^2} = 12{,}5\ \Omega$$

$$P_{SC} = V_{SC} \times I_{SC} \times \cos\theta_{SC}$$

$$\Rightarrow \quad V_{SC} = \frac{1250}{10 \times 0{,}65} = 192{,}3076\ V$$

$$Z_{SC} = \frac{V_{SC}}{I_{SC}} = \frac{192{,}3076}{10} = 19{,}23076\ \Omega$$

$$\therefore \quad X_{SC} = \sqrt{Z_{SC}^2 - R_{SC}^2} = 14{,}614\ \Omega$$

*De la prueba de vacío:*
*Las mediciones sa hacen en el lado de baja tensión.*
*Los parámetros a calcular están referidos al Secundario*

$$g_{P2} = \frac{P_{OC}}{V_{OC}^2} = \frac{350}{V_N^2} = \frac{350}{2300^2}$$

$$g_{P2} = 6{,}61625 \times 10^{-5}\ mhos$$

$$P_{OC} = V_{OC} \times I_{OC} \times \cos\theta_{OC}$$

$$\Rightarrow \quad I_{OC} = \frac{350}{2300 \times 0{,}24} = 0{,}634A$$

$$Y_\phi = \sqrt{g_P^2 + b_m^2}$$

$$\Rightarrow Y_\phi = \frac{I_{OC}}{} = \frac{0{,}634}{} = 2{,}7565 \times 10^{-4}$$

*a) En el primario ( al inicio de la línea)* $\quad f.d.p. = 0{,}85 \quad \Rightarrow \varphi = 31{,}788°$

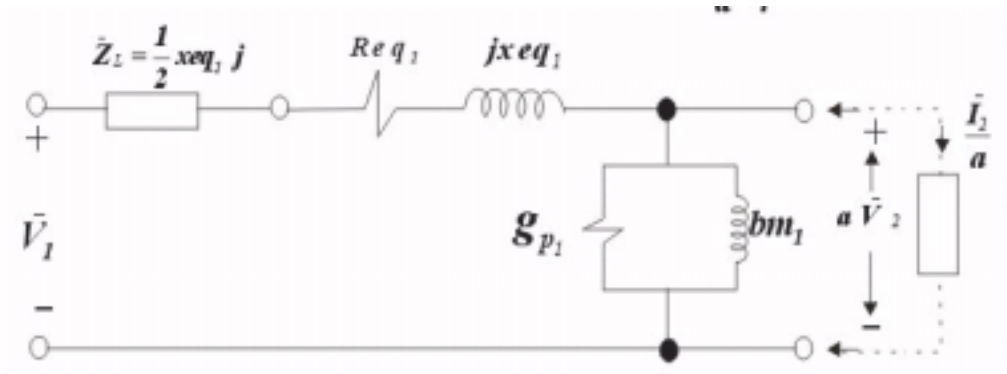



**Figura** *P4.4.1*

*Despreciando el circuito de admitancia, tenemos :* $\left(\overline{V}_2 = V_2\angle 0°\right)$

$$\bar{I}_2 = \frac{3}{4}\times\frac{S_N}{V_{2N}}\times\angle -31{,}788° = \frac{3}{4}\times\frac{100}{2{,}3}\times\angle -31{,}788° \qquad ; \qquad a = \frac{10}{2{,}3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{I}_2}{a} = 7{,}5\angle -31{,}788°$$

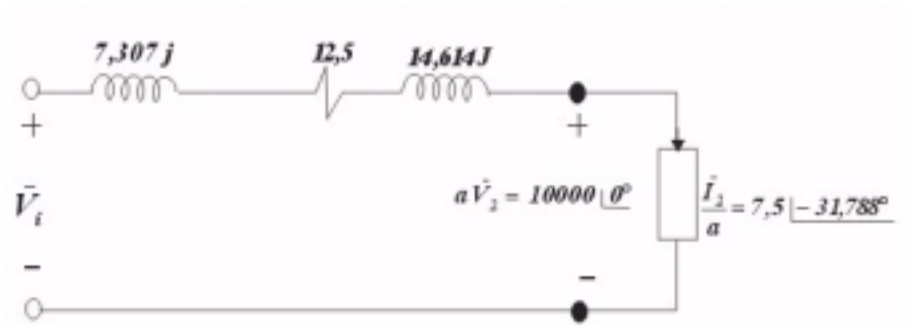



**Figura** *P4.4.2*

$$\Rightarrow \quad a\times\overline{V}_2 + 7{,}5\angle -31{,}788°\times\left(12{,}5 + 21{,}921j\right) = \overline{V}_i$$

$$\Rightarrow \quad \textit{Sumando fasores :} \quad \overline{V}_i = 10000\angle 0° + 189{,}25875\angle 28{,}519°$$

$$\therefore \quad \overline{V}_i = 10166{,}69545\angle 0{,}51°$$

*b)*

$$I_{L2}(\,para\ \eta_{max}\,) = \sqrt{\frac{P_{h+f}}{R_{eq\,2}}} \quad \Rightarrow \quad I_{L2}(\,para\ \eta_{max}\,) = \sqrt{\frac{P_{OC}}{P_{SC}}}\times I_{L2N}$$

$$I_{L2}(\,para\ \eta_{max}\,) = \sqrt{\frac{350}{1250}}\times I_{L2N} = 0{,}52915\times I_{L2N}$$

*∴ Porcentaje de carga = 52,915% del sistema línea- transformador, ya que la línea se supone puramente inductiva.*

*c) g y b por unidad:*

$$P_{h+f}(p.u.) = \frac{P_{h+f}}{P_n} = \frac{350}{100 \times 10^3} = 3{,}5 \times 10^{-3}$$

$$g(p.u.) = \frac{P_{OC}}{V_{OC}^2} = \frac{P_{OC}}{V_n^2} = \frac{\frac{P_{OC}}{S_n}}{1} = \frac{P_{OC}}{S_n}$$

$$g(p.u.) = 0{,}0035$$

$$I_\phi(p.u.) = \frac{I_{OC}}{I_{nS2}} = \frac{0{,}634}{\left(100/2{,}3\right)} = 0{,}014582$$

$$Y_\phi(p.u.) = \frac{I_{OC}(p.u.)}{V_{OC}(p.u.)} = \frac{I_\phi(p.u.)}{V_n(p.u.)} = \frac{0{,}014582}{1{,}0} = 0{,}014582$$

$$b_m(p.u.) = \sqrt{Y_\phi^{\,2}(p.u.) - g^2(p.u.)} = 0{,}014156$$

*d) Si se considera la resistencia de la línea, no habría afectado la respuesta c), ya que todo depende únicamente del circuito de admitancia.*

***PROBLEMA N° 4.5 :*** *Se tiene un transformador monofásico de 10 KVA con relación de transformación a=10/0,23 KV, en las pruebas de cortocircuito y vacío se obtuvieron:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prueba de Cortocircuito* | *: 550 V* | *1,2 A* | *600 W* |
| *Prueba de vacío* | *: 230 V* | *1,739 A* | *200 W* |

*Determinar:*

*a) El circuito equivalente exacto referido al lado de alta tensión.*

*b) El diagrama fasorial cuando se alimenta una carga con potencia nominal y con f.d.p = 0.866 capacitivo.*

*Si este mismo transformador alimenta una carga cuya potencia es el 10 % más que la potencia nominal del transformador ($P_L = 1.1P_N$) y con cos$\varphi$ = 0.809 capacitivo, manteniendo la tensión de entrada en 10 KV. Calcular:*

*c) La tensión en la carga (despreciar la rama de excitación)*

*d) La regulación para la carga mencionada.*

*Si para éste mismo transformador, se alimenta una carga nominal con cos$\varphi$ = 0.707 en atraso; calcular:*

*e) La eficiencia a plena carga*

*f) La corriente de carga ($I_L$) para obtener una eficiencia máxima.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

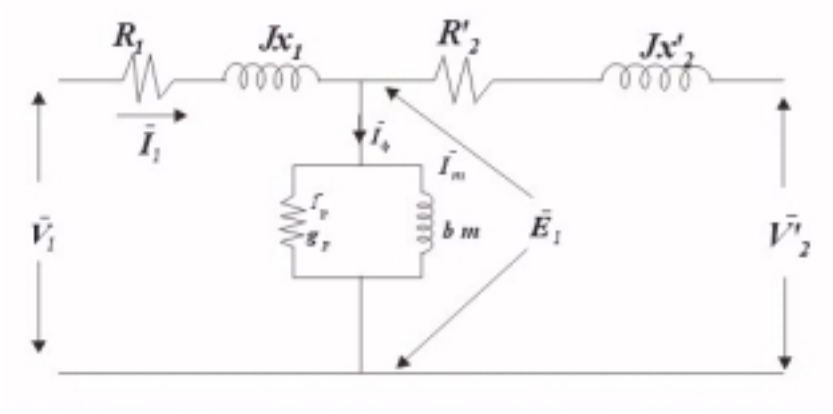



**Figura** *P4.5.1*

*PRUEBA DE CORTOCIRCUITO:*

$$R_{eq\,1} = \frac{P_{Cu}}{I_{CC}^2} = \frac{600}{(1{,}2)^2} = 416{,}667\ \Omega \qquad Z_{eq\,1} = \frac{V_{CC}}{I_{CC}} = \frac{550}{1{,}2} = 458{,}333$$

$$R_1 = R_2' = 208{,}333\Omega \qquad X_{eq\,1} = 190{,}9407\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_2'}{a^2} = 0{,}1102\ \Omega \qquad X_1 = X_2' = 95{,}4703\,\Omega$$

$$X_2 = \frac{X_2'}{a^2} = 0{,}0505\,\Omega$$

$$PRUEBA\ DEL\ VACÍO: \quad P_{FE} = P_0 - I_0^2 \times R_2 = 199{,}667\,W$$

$$g_{o2} = \frac{P_{FE}}{E_2^2} = \frac{199{,}667}{(230)^2} = 3{,}7801\times 10^{-3}\ mhos$$

$$g_{o1} = \frac{g_{02}}{a^2} = 2\times 10^{-6}\ mhos$$

$$I_P = E_2 \times g_{o2} = 0{,}8688\,Amps \quad \rightarrow \quad I_m = \sqrt{I_o^2 - I_P^2} = 1{,}5064\ Amps$$

$$b_{m2} = \frac{I_m}{E_2} = 6{,}55\times 10^{-3}\ mhos$$

$$b_{m1} = 3{,}467\times 10^{-6}\ mhos$$

$$\therefore R_1 = 208{,}333\Omega \qquad X_1 = 95{,}4703\Omega$$

$$R_2 = 0{,}1102\Omega \qquad X_2 = 0{,}0505\Omega$$

$$g_{P1} = 2\times 10^{-6}\ mhos \qquad b_{m1} = 3{,}467\times 10^{-6}\ mhos$$

*b)*

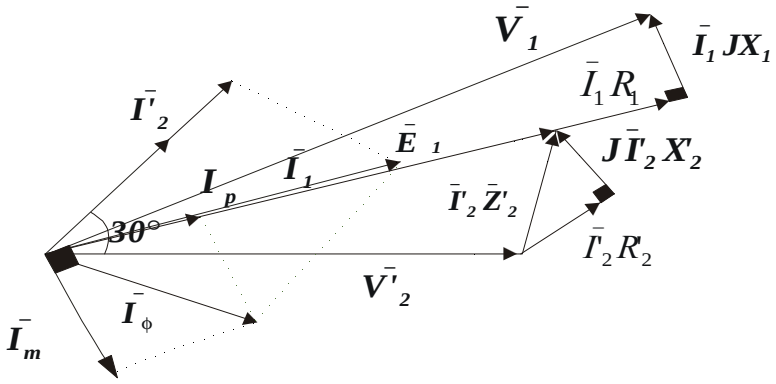



**Figura** *P4.5.2*

*c)*

$S_L = 1{,}1 \times S_N = 11KVA$

$\cos\varphi = 0{,}809\ (capacitivo) \quad \varphi = 36° \qquad \rightarrow \bar{I}_2' = I_2' \angle 36°$

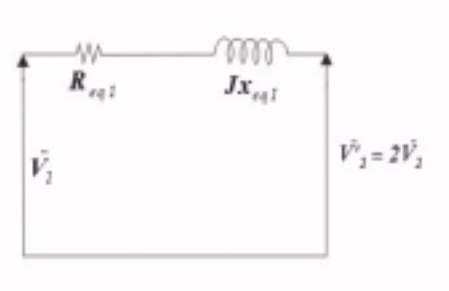



**Figura** *P4.5.3*

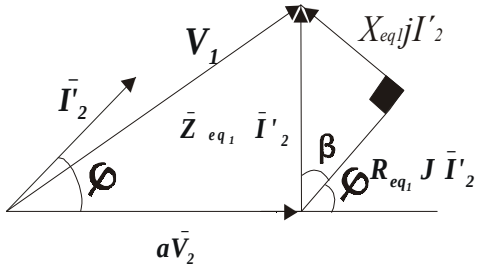



**Figura** *P4.5.4*

$$V_1^2 = (a \times V_2)^2 + (Z_{eq} \times I_2')^2 - 2a \times V_2 \times I_2' \times Z_{eq\,1} \times \cos(\varphi + \beta)$$

$$I_2' = \frac{S_L}{a \times V_2}$$

$$V_1^2 = (a \times V_2)^2 + \left(\frac{S_L \times Z_{eq\,1}}{a \times V_2}\right)^2 - 2 \times Z_{eq\,1} \times S_L \times \cos(\varphi + \beta)$$

$Z_{eq\,1} = 458{,}333\Omega \qquad S_L = 11KVA$

$\varphi = 36° \qquad \beta = \arctan\left(\frac{X_{eq\,1}}{R_{eq\,1}}\right) = 24{,}62°$

$a \times V_2 = 10232{,}5$

$V_2 = 235{,}3475V$

*d) Cálculo de regulación:*

$$\%r = \frac{|V_{vacio} - V_{carga}|}{V_{carga}} \times 100\% = \frac{|230 - 235{,}3475|}{235{,}3475} \times 100\%$$

$\%r = 2{,}27$

*e) Cálculo de la eficiencia a plena carga:*

*A plena carga:* $S_L = S_N = 10KVA$

$$\eta = \frac{10000 \times 0{,}707}{10000 \times 0{,}707 + 200 + 600} = 0{,}898$$

$$\eta = 89{,}8\%$$

*f)* $I_L = \sqrt{\frac{P_{FE}}{P_{Cu}}} \times I_N = \sqrt{\frac{200}{600}} \times \frac{10000}{230} = 25{,}1A$

***PROBLEMA N° 4.6 :*** *En el laboratorio se dispone de seis (06) transformadores idénticos de 5KVA, 440/220 V , 60 Hz, monofásicos, los cuales han sido sometidos al ensayo de cortocircuito y vacío.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Vacío* | *220 V* | *3A* | *100W* |
| *Cortocircuito* | *50V* | *11,36A* | *280W* |

*Determinar para un transformador:*

*a) Los parámetros del circuito T equivalente , reducido al lado de Alta tensión.*
*b) La regulación al 90% de plena carga y la tensión en el lado de baja tensión si se alimenta con 440V.*
*c) La eficiencia máxima y el porcentaje de carga para este caso.*
*d) Las pérdidas en el cobre y la tensión aplicada en el lado de Alta Tensión si el ensayo se realiza al 50% de corriente nominal.*
*e) La potencia nominal como autotransformador.*
*f) Las posibles conexiones como autotransformador, ¿Las potencias en estos casos son iguales?*

*SOLUCIÓN:*

*De la prueba de vacío : (Referido al secundario)*
*a)*

$$g_P = \frac{P_{OC}}{V_N^{\ 2}} = \frac{100}{220^2} = 2{,}066 \times 10^{-3}\, mhos \quad \Rightarrow \quad R_P = 484{,}03\Omega$$

$$Y_\phi = \frac{I_{OC}}{V_{OC}} = \frac{3}{220} = 0{,}0136 mhos$$

$$\therefore \quad b_m = \sqrt{Y_\phi^{\ 2} - g_p^{\ 2}} = 0{,}01347 mhos$$

$$\Rightarrow \quad X_m = 74{,}1898\Omega$$

*Refiriendo al lado primario (a=2) (LADO DE ALTA TENSIÓN)*

$$g_P' = \frac{g_P}{a^2} = \frac{2{,}066\times 10^{-3}}{4} = 5{,}165\times 10^{-4}\ mhos \quad \Rightarrow \quad r_P' = 1936{,}1\Omega$$

$$b_m' = \frac{b_m}{a^2} = \frac{0{,}01347}{4} = 3{,}3675\times 10^{-3}\ mhos \quad \Rightarrow \quad X_m' = 296{,}956\Omega$$

*Prueba de Cortocircuito:*

$$R_{eq\,1} = r_1 + a^2\times r_2 = \frac{P_{SC}}{I_{SC}^{\ 2}} = \frac{280}{11{,}36^2} = 2{,}1697\Omega$$

$$Z_{SC} = \frac{V_{SC}}{I_{SC}} = \frac{50}{11{,}36} = 4{,}4\Omega \quad \therefore X_{eq\,1} = \sqrt{Z_{SC}^{\ 2} - R_{eq\,1}^{\ 2}} = 3{,}8295\Omega$$

$$r_1 = r_2' = \frac{2{,}1697}{2} = 1{,}08485\Omega \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{r_2'}{4} = 0{,}2712\Omega$$

$$X_1 = X_2' = \frac{3{,}8295}{2} = 1{,}91475\Omega \quad \Rightarrow \quad X_2 = \frac{X_2'}{4} = 0{,}47868\Omega$$

$$\Rightarrow \quad R_{eq\,2} = 0{,}542425\Omega$$

$$X_{eq\,2} = 0{,}957375\Omega \quad \rightarrow \quad Z_{eq\,2} = 1{,}1\Omega$$

*b) r% al 90% de plena carga*

$$r\% = \frac{I_{L2}}{V_2}\times Z_{eq\,2}\times cos(\phi - \theta_L)\times 100$$

$$\phi = arctan\left(\frac{X_{eq\,2}}{R_{eq\,2}}\right) = 60{,}465° \quad Tomando\ un\ \theta_L = 0°$$

$$\Rightarrow \quad r\% = \frac{0{,}9\times\frac{5000}{220}\times cos\,60{,}465°\times 1{,}1}{220}\times 100 = 5{,}042$$

$$\frac{\overline{V}_1}{a} = \overline{V}_L + \overline{I}_L\times(R_{eq\,2} + jX_{eq\,2})$$

$$\overline{V}_L = \frac{\overline{V}_1}{a} - \overline{I}_L\times(R_{eq\,2} + jX_{eq\,2})$$

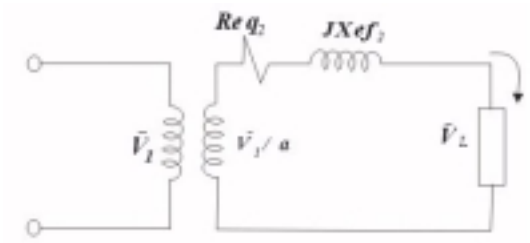



**Figura** *P4.6.1*

$$\overline{V}_L = \frac{440\angle 0°}{2} - 0{,}9\times\frac{5000}{220}\angle\theta_L\times(0{,}542 + j0{,}957)$$

$$Si\ \theta_L = 0° \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_L = 209{,}828\angle -5{,}35°$$

$$r\% = \frac{\left|\frac{\overline{V}_1}{a}\right| - \left|\overline{V}_L\right|}{\left|\overline{V}_L\right|}\times 100 = \frac{220 - 209{,}828}{209{,}828}\times 100 = 4{,}8478$$

*c) Eficiencia máxima:*

$$P_{FE\,nom} = P_{Cu}$$

$$100 = I_2^{\,2} \times R_{eq\,2} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \sqrt{\frac{100}{0{,}542425}}$$

$$\therefore \quad I_2 = 13{,}578\,A$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_{OC}}{P_{SC}}} = \sqrt{\frac{100}{280}} = 0{,}5976 \quad \Rightarrow \quad I_2(\,para\ \eta_{max}\,) = \alpha \times I_{2\,N}$$

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{sal} + \Delta P} = \frac{V_L \times I_L \times cos\,\theta_L}{P_{sal} + \Delta P}$$

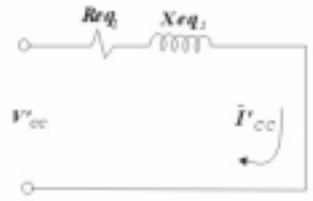
$$\Delta P = P_{Cu} + P_{FE} = 100 + 100 = 200W$$

$$\eta = \frac{220 \times \alpha \times \dfrac{5000}{220} \times 1}{220 \times \alpha \times \dfrac{5000}{220} + 200}$$

$$\eta_{max} = \frac{2988}{2988 + 200} = 0{,}9372 \equiv 93{,}72\%$$

$$\%carga = \alpha \times 100 = 59{,}76\%$$

*d) Si el ensayo de cortocircuito se realizó al 50% de plena carga, entonces:*




$$\boldsymbol{I_{SC}' = 0{,}5 \times \frac{I_{2N}}{a} = \frac{0{,}5 \times \dfrac{5000}{220}}{2} = 5{,}6818A}$$

**Figura** *P4.6.2*

$$\overline{V}_{CC}' = \overline{I}_{SC}' \times (R_{eq\,1} + jX_{eq\,1}) = 5{,}6818\angle 0° \times 4{,}4\angle 60{,}465°$$

$$\therefore \overline{V}_{CC}' = 25\angle 60{,}465°$$

$$P_{Cu} = ?$$

$$\therefore \quad \frac{P_{Cu}}{280} = \left(\frac{I_{SC}'}{I_{SC}}\right)^2 = \left(\frac{5{,}6818}{11{,}36}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad P_{Cu} = 70W$$

*e) y f)*

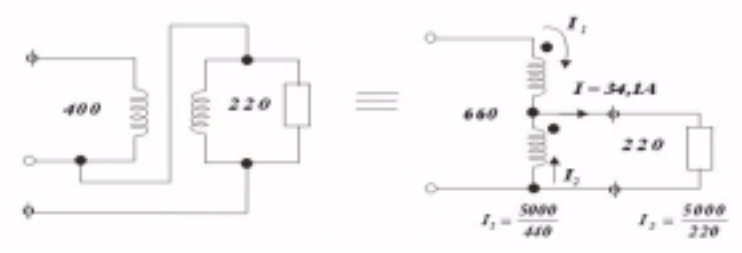



**Figura** *P4.6.3*

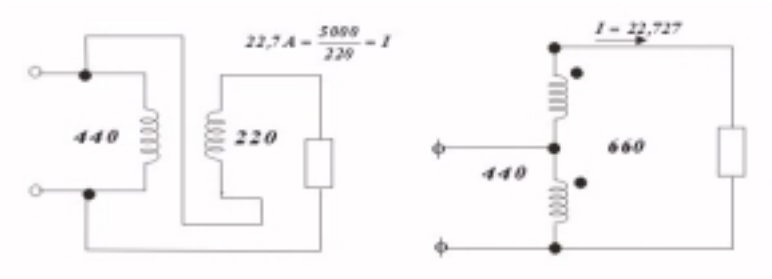



***Figura*** *P4.6.4*

***PROBLEMA N° 4.7 :*** *Un transformador monofásico está en capacidad de entregar su corriente secundaria de plena carga de 300 A a f.d.p. 0,8 inductivo y una tensión de 600 V.*
*El transformador tiene una relación de transformación en vacío 6600/600 V y está provisto de taps en el lado de alta tensión para poder variar dicha relación de transformación.*
*Si el transformador es alimentado por una fuente de 6600 V constante a través de un alimentador , calcular:*

*a) La relación de transformación a la que habría que ajustar el tap del transformador para que entregue 600V en el secundario a plena carga, siendo las impedancias del sistema las siguientes:*
*Alimentador (total): $Z_F$=1+j4 Ohmios*
*Primario del transformador: $Z_P$=1,4+j5,2 Ohmios*
*Secundario del transformador: $Z_S$=0,012+j0,047 Ohmios*

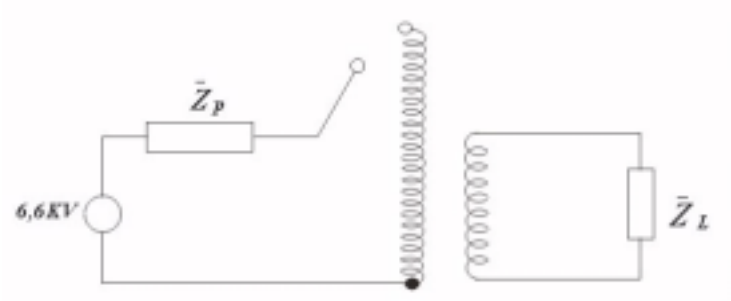



***Figura*** *P4.7.1*

*SOLUCIÓN:*

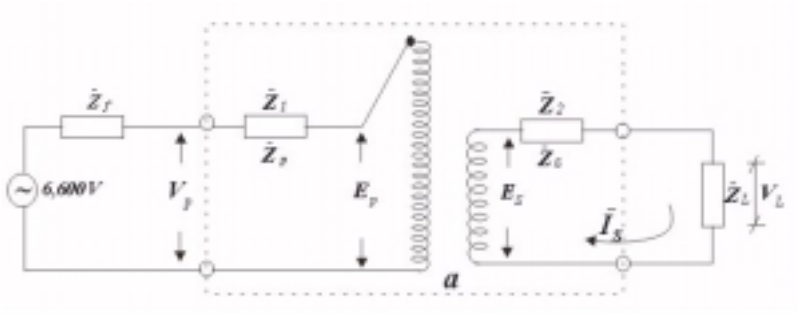



***Figura*** *P4.7.2*

$$\overline{E}_S = \overline{V}_L + \overline{Z}_2 \times \overline{I}_S = 600\angle 0° + \overline{Z}_2 \times \overline{I}_S \qquad I_S = 300\,A$$

$$\cos\phi = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \phi = 36{,}87° \qquad \overline{Z}_2 = 0{,}012 + 0{,}047\,j = 0{,}0485\angle 75{,}67°$$

$$\therefore \quad \overline{E}_S = 600\angle 0° + 0{,}0485\angle 75{,}67° \times 300\angle -36{,}87° = 611{,}41\angle 0{,}854°$$

$$\overline{Z}_{TP} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_F + a^2 \times \overline{Z}_2 + a^2 \times \overline{Z}_L \qquad ; \qquad a = \frac{6600}{600} = 11$$

$$\overline{Z}_{TP} = (1{,}4 + 5{,}2\,j) + (1 + 4\,j) + 11^2 \times (0{,}012 + 0{,}047\,j) + 11^2 \times 2\angle 36{,}87°$$

$$\overline{Z}_{TP} = 197{,}452 + 160{,}087\,j = 254{,}195\angle 39°$$

$$\Rightarrow \quad \overline{I}_P = \frac{6600\angle 0°}{254{,}195\angle 39°} = 25{,}964\angle -39°$$

$$\overline{E}_P = \overline{I}_P \times \left(a^2 \times \overline{Z}_2 + a^2 \times \overline{Z}_L\right) = 25{,}964\angle -39° \times 11^2 \times (0{,}0485\angle 75{,}67° + 2\angle 36{,}87°)$$

$$\overline{E}_P = 6402{,}67\angle -1{,}276°$$

$$\therefore \quad a' = \frac{E_P}{E_S} = \frac{6402{,}67}{611{,}41} = 10{,}472$$

***PROBLEMA N° 4.8 :*** *Se tiene un transformador, monofásico de 150 KVA, 60 Hz, 4800 / 230V. Dicho transformador tiene un circuito equivalente cuyos parámetros son :*

| | | |
|---|---|---|
| $R_1 = 0{,}705\Omega$ | $X_1 = 1{,}950\Omega$ | $R_p = 72{,}05\Omega$ |
| $R_2 = 0{,}002\Omega$ | $X_2 = 0{,}005\Omega$ | $X_m = 4{,}95\Omega$ |

*Se conecta una carga en el lado B.T. que absorbe una corriente de 90% de $i_n$ a voltaje nominal, y factor de potencia 0.5 en adelanto;*
*Determinar:*

*a) La corriente que absorbe el transformador y su f.d.p.*
*b) El voltaje aplicado al lado de A. T.*
*c) Las pérdidas en el núcleo y el cobre a condiciones nominales.*

***SOLUCIÓN:***

*Datos del transformador monofásico:*
$S_N$=150KVA
$f_N$=60Hz
a=4800/230=20,87

*Parámetros:*
$R_1$=0,705Ω  $X_1$=1,950Ω  $R_P$=72,05Ω

$R_2$ =0,002Ω  $X_2$=0,005Ω  $X_m$=4,95Ω

$$I_{N2} = \frac{S_N}{V_{N2}} = \frac{150000}{230} = 652{,}18\,A$$

$$I_L = 0{,}9 \times I_{N2} = 586{,}96\,A$$

$$\cos\theta_L = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \theta_L = 60°$$

*Se tiene el circuito equivalente exacto, referido al lado de A.T.*

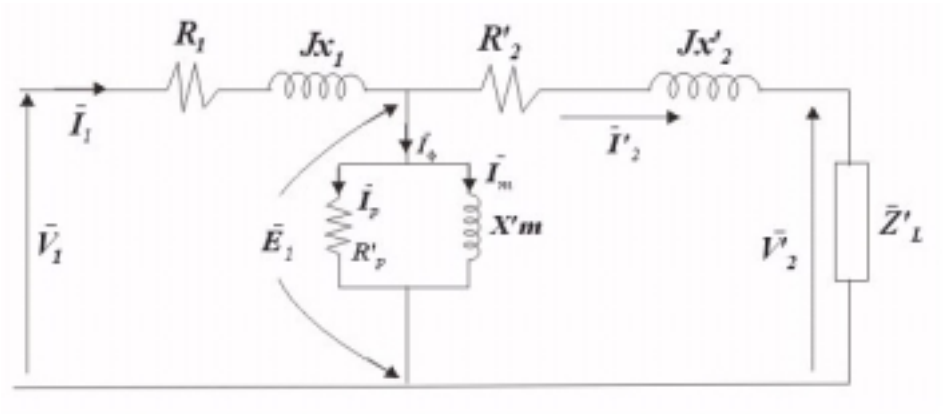



**Figura** *P4.8.1*

*Del circuito se tiene:*

$$\bar{V}_1 = \bar{E}_1 + \bar{Z}_1 \times \bar{I}_1 \quad ; \quad \bar{E}_1 = \bar{V}_2' + \bar{I}_2' \times \bar{Z}_2'$$

$$\bar{I}_2' = \frac{\bar{I}_2}{a} \quad ; \quad \bar{V}_2' = a \times \bar{V}_2 \qquad \bar{S}_L = \bar{V}_L \times \bar{I}_L^* \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_L^* = \frac{\bar{S}_L}{\bar{V}_L} = \frac{S}{V_L} \angle \phi_L$$

$$R_P' = a^2 \times R_P \quad ; \quad X_m' = 4{,}95 \times a^2 = a^2 \times X_m$$

$$\bar{Z}_2' = R_2' + jX_2' = a^2 \times R_2 + ja^2 \times X_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{Z}_2' = 0{,}871 + j2{,}1778$$

$$\bar{Z}_2' = 2{,}345 \angle 68{,}2°$$

$$\bar{I}_2' = \frac{I_L'}{a} \angle 60° = \frac{586{,}96}{20{,}87} \angle 60° = 28{,}12458 \angle 60°$$

*Luego :*

$$\bar{E}_1 = 4800 \angle 0° + 2{,}345 \angle 68{,}2° \times 28{,}12458 \angle 60°$$

$$\bar{E}_1 = 4759{,}468 \angle 0{,}6239°$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_\phi + \bar{I}_2' \quad ;$$

$$\bar{I}_\phi = \frac{\bar{E}_1}{R_P} + \frac{\bar{E}_1}{jX_m} = \frac{\bar{E}_1 \times (R_P' + jX_m')}{R_P' \times X_m' \angle 90°} = \frac{\bar{E}_1 \times (R_P + jX_m)}{a^2 \times R_P \times X_m \angle 90°}$$

$$\bar{I}_\phi = 2{,}213 \angle -85{,}446°$$

*además :*

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_\phi + \bar{I}_2' = 26{,}332 \angle 57{,}2678°$$

*a)*

$I_1 = 26{,}332 A$ $\qquad$ $\cos\theta_1 = 0{,}5498$ *en adelanto*

*b)*

$$\bar{V}_1 = \bar{E}_1 + (R_1 + jX_1) \times \bar{I}_1$$

$$\bar{V}_1 = 4759{,}468 \angle 0{,}6239° + 26{,}332 \angle 57{,}2678° \times (0{,}705 + j1{,}950)$$

$$\bar{V}_1 = 4727 \angle 1{,}154°$$

*c)*

$$P_{FE\,N} = \frac{V_{2N}^{\;2}}{R_p} = \frac{230^2}{72{,}05} = 734{,}212W$$

$$P_{Cu\,N} = I_{1N}^{\;2} \times R_1 + I_{2N}^{\;2} \times R_2 = \left(\frac{S_N}{V_{1N}}\right)^2 \times R_1 + \left(\frac{S_N}{V_{2N}}\right)^2 \times R_2$$

$$P_{Cu\,N} = 150000^2 \times \left(\frac{0{,}705}{4800^2} + \frac{0{,}002}{230^2}\right) = 1539{,}138W$$

***PROBLEMA N° 4.9 :*** *Se tiene un transformador monofásico de 10 KVA, 10/0,23 KV, 60 Hz, cuyos datos de prueba son:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prueba de vacío :* | *230 V* | *1,3043A* | *150 W* |
| *Prueba de cortocircuito :* | *600 V* | *1,5A* | *815 W* |

*Determinar:*

*a) El circuito equivalente exacto referido al lado de A.T.*

*b) El diagrama fasorial cuando se alimenta una carga nominal y f.d.p. 0.866 capacitivo.*

*SOLUCIÓN:*

*a) Analizando por donde se hicieron las pruebas:*
*Tenemos :*

$$S_N = 10KVA \quad \Rightarrow \quad I_{N1} = \frac{10000}{10000} = 1A$$

$$\Rightarrow \quad I_{N2} = \frac{10000}{230} = 43{,}478A$$

*La prueba de cortocircuito se hizo por el lado de A.T.*
*La prueba de circuito abierto se hizo por el lado de B.T.*

*El circuito equivalente exacto esta dado así (referido al lado de A.T.)*

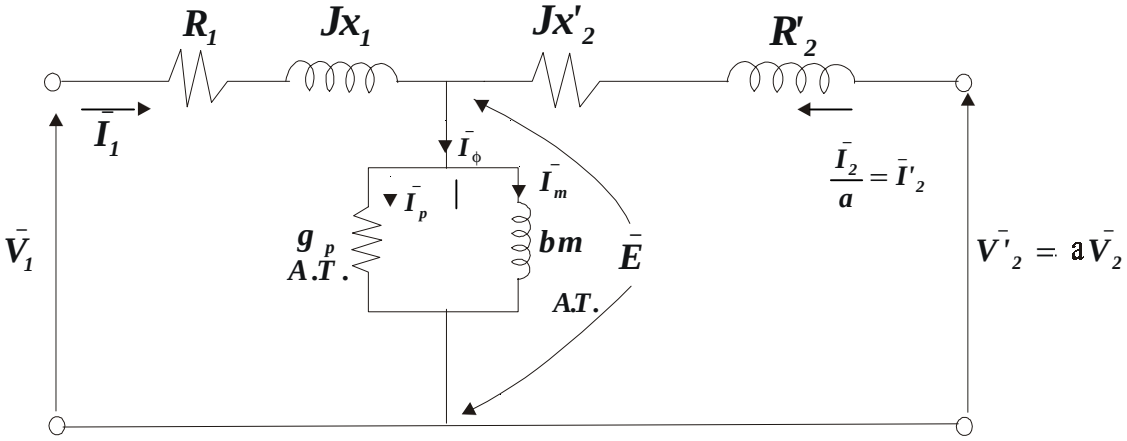



**Figura** *P4.9.1*

$$De\ la\ prueba\ de\ C.C.:\ Z_{eq\,A.T.} = \frac{V_{CC}}{I_{CC}} = \frac{600}{1,5} = 400\Omega$$

$$P_{CC} = I_{CC}^{\ 2} \times R_{eq\,A.T.} \quad \Rightarrow \quad R_{eq\,A.T.} = \frac{P_{Cu\,N}}{I_{CC\,N}^{\ 2}} = \frac{815}{1,5^2} = 362,22\Omega$$

$$X_{eq\,A.T.} = \sqrt{Z_{eq\,A.T:}^{\ 2} - R_{eq\,A.T.}^{\ 2}} = \sqrt{400^2 - 362,22^2} = 169,692\Omega$$

$$R_1 = R_2' = a^2 \times R_2 = \frac{R_{eq\,A.T.}}{2}$$

$$X_1 = X_2' = a^2 \times X_2 = \frac{X_{eq\,A.T.}}{2} \quad donde\ a = 10/0,23 = 43,48$$

*Entonces :*

$$R_1 = 181,111\Omega = R_2'$$

$$X_1 = 84,846\Omega = X_2'$$

$$R_2 = 0,0958\Omega$$

$$X_2 = 0,04488\Omega$$

*Prueba de Vacío:*

$$Y_{eq\,B.T.} = \frac{I_{OC}}{V_N} = \frac{1,3043}{230} = 5,6708 \times 10^{-3}\ mhos$$

$$g_{P\,B.T.} = \frac{P_{OC}}{V_N^{\ 2}} = \frac{150}{230^2} = 2,8355 \times 10^{-3}\ mhos$$

$$b_{m\,B.T.} = \sqrt{Y_{eq\,B.T.}^{\ 2} - g_{P\,B.T.}^{\ 2}} = 4,911 \times 10^{-3}\ mhos$$

*Como:*

$$Z_{eq\,B.T.} = \frac{Z_{eq\,A.T.}}{a^2} \quad \Rightarrow \quad Y_{eq\,A.T.} = \frac{Y_{eq\,B.T.}}{a^2}$$

$$g_{P\,A.T.} = \frac{g_{P\,B.T.}}{a^2} = 1,5 \times 10^{-6}\ mhos$$

$$b_{m\,A.T.} = \frac{b_{m\,B.T.}}{a^2} = 2,598 \times 10^{-6}\ mhos$$

$$\therefore \quad R_{P\,A.T.} = 666666,6667\Omega$$

$$X_{m\,A.T.} = 384911,47\Omega$$

b) *Diagrama Fasorial:*

$$\cos\theta_L = 0,866$$
$$\theta_L = 30°$$

*La gráfica del diagrama fasorial se muestra en la Figura P4.9.2.*

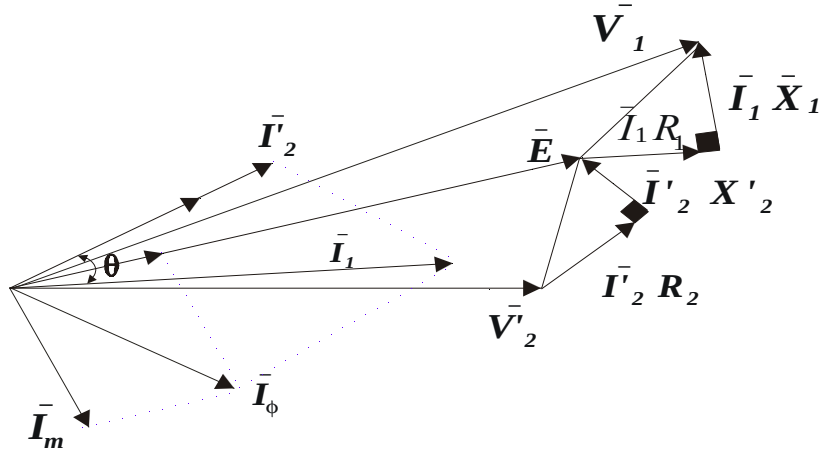



**Figura** *P4.9.2*

***PROBLEMA N° 4.10 :*** *En las pruebas de vacío y cortocircuito de un transformador monofásico de 20KVA, 2400 / 240 V, 60 Hz se obtuvieron:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prueba de vacío* | *240 volts* | *1,066A* | *126,6 watts* |
| *Prueba de C.C* | *57,4 volts* | *8,33 A* | *284 watts* |

*Terminada la prueba de corto se observó que un termómetro marcaba 24° C. Despreciando el efecto superficial y considerando que el transformador esta alimentado constantemente a 2400 volts se pide:*

*a) Los parámetros del transformador a 75° C.*
*b) La regulación y eficiencia a plena carga si el transformador va a servir para alimentar una carga resistiva.*
*c) La eficiencia, si el transformador opera con el 25% de su corriente de plena carga. Determinar la eficiencia máxima del transformador para ambos casos considerar un f.d.p. = 0,8 en atrazo.*
*d) Asumiendo conexión como autotransformador elevador (carga $\bar{Z}_L$ en el lado de alta ).*
*d.1) Calcular los nuevos valores nominales e ilustrar los circuitos equivalentes referidos a cada lado del autotransformador.*
*d.2) Calcular la regulación y eficiencia a plena carga para un factor de potencia unitario.*

*SOLUCIÓN:*

*a) Cálculo de los parámetros a 24 ° C.*
*De la prueba de vacío : Lado de Baja Tensión*

$$g_{o2} = \frac{P_{OC}}{V_{OC}^{\ 2}} = \frac{126,6}{240^2} = 2,198 \times 10^{-3}\ mhos$$

$$Y_{o2} = \frac{I_{OC}}{V_{OC}} = \frac{1,066}{240} = 4,442 \times 10^{-3}\ mhos$$

$$b_{m2} = \sqrt{Y_{o2}^{\ 2} - g_{o2}^{\ 2}} = 3,86 \times 10^{-3}\ mhos$$

*De la prueba de Cortocircuito:*

$$Z_{eq\,1} = \frac{V_{SC}}{I_{SC}} = \frac{57,4}{8,33} = 6,891\Omega$$

$$R_{eq\,1} = \frac{P_{SC}}{I_{SC}^{\;2}} = \frac{284}{8,33^2} = 4,093\Omega$$

$$X_{eq\,1} = \sqrt{Z_{eq\,1}^{\;2} - R_{eq\,1}^{\;2}} = 5,544\Omega$$

$g_P, b_m, X_{eq1}$, *se consideran inalterables respecto a una variación de temperatura.*

$$R_{eq\,1}(75°C) = \frac{(234,5+75)}{(234,5+24)} \times R_{eq\,1}(24°C)$$

$$R_{eq\,1}(75°C) = 4,9\Omega$$

*b)*

$$S_N = 20000VA \qquad f.d.p. = 1$$

$$I_{N\,1} = \frac{20000}{2400} = 8,33A$$

$$P_{Cu}(75°C) = R_{eq\,1}(75°C) \times I_{N\,1}^{\;2} = 4,9 \times 8,33^2 = 340,28W$$

$$P_S = S_N \times cos\theta_L = 20000$$

$$\eta = \frac{20000}{20000 + 340,28 + 126,6} = 0,9772 \equiv 97,72\%$$

$$\%r = \left[ \frac{I_{L\,2} \times R_{eq\,2}}{V_2} + \frac{1}{2} \times \left( \frac{I_{L\,2} \times X_{eq\,2}}{V_2} \right)^2 \right] \times 100$$

$$I_{L\,2} = \frac{20000}{240} = 83,33A \quad ; \quad R_{eq\,2} = \frac{R_{eq\,1}}{a^2} = \frac{4,9}{100} = 0,049\Omega$$

$$X_{eq\,2} = \frac{5,544}{100} = 0,05544 \quad ; \quad V_2 = V_{2\,N} = 240V$$

$$\%r = \left[ \frac{83,33 \times 0,049}{240} + \frac{1}{2} \times \left( \frac{83,33 \times 0,05544}{240} \right)^2 \right] \times 100$$

$$\%r = 1,72$$

*c)*

$$I_2 = \frac{0,25 \times 20000}{240} = 20,833A \qquad I_2 = \frac{I_{2\,N}}{4}$$

$$P_S = V_2 \times I_2 \times cos\theta_L = V_2 \times \frac{I_{2\,N}}{4} \times cos\theta_L = \frac{S_N}{4} \times cos\theta_L$$

$$P_S = \frac{20000}{4} \times 0,8 = 4000W$$

$$P_{h+f} = 126,6W$$

$$P_{Cu} = I_2^{\,2} \times R_{eq\,2}(75°C) = \frac{I_{2N}^{\,2} \times R_{eq\,2}(75°C)}{16} = \frac{340,28}{16} = 21,267W$$

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_{h+f} + P_{Cu}} = \frac{4000}{4000 + 126,6 + 21,267} = 0,9644 \equiv 96,44\%$$

$$\eta_{max} = ? \quad \Rightarrow \quad P_{Cu} = P_{h+f} = I_2^{\,2} \times R_{eq\,2}$$

$$I_2(\,para\ \eta_{max}) = \sqrt{\frac{P_{h+f}}{R_{eq\,2}}} = \sqrt{\frac{126,6}{0,049}} = 50,83A$$

$$P_S = V_2 \times I_2 \times cos\,\theta_L \quad ; \quad P_{SN} = V_{2N} \times I_{2N} \times cos\,\theta_L$$

$$P_S = \left(\frac{V_2 \times I_2}{V_{2N} \times I_{2N}}\right) \times P_{SN} = \frac{I_2}{I_{2N}} \times P_{SN} = \frac{50,83}{83,33} \times 16000 = 9759,75W$$

$$\eta_{max} = \frac{9759,75}{9759,75 + 2 \times 126,6} = 0,9747 \equiv 97,47\%$$

***PROBLEMA N° 4.11 :*** *La placa de un transformador monofásico de 50MVA de 60 Hz indica que tiene relación de voltaje igual a 8 KV: 78KV. Se lleva a cabo una prueba en circuito abierto desde el lado de bajo voltaje, y las lecturas de los instrumentos correspondientes son 8 KV, 61,9A y 136 KW. En forma semejante, una prueba en cortocircuito desde el lado de bajo voltaje se obtienen lecturas de 650V, 6,25 KA y 103 KW.*

*a) Calcule la impedancia equivalente en serie, resistencia y reactancia del transformador, referidas a las terminales de bajo voltaje.*
*b) Calcule la impedancia equivalente en serie del transformador, referida a las terminales de alto voltaje.*
*c) Haga las aproximaciones adecuadas y dibuje un circuito **T** equivalente del transformador.*
*d) Calcule la eficiencia y la regulación de voltaje si el transformador opera a voltaje y carga nominales. El factor de potencia es la unidad .*
*e) Repita en inciso d) suponiendo que la carga tenga un factor de potencia igual a 0,9 en adelanto.*

*SOLUCIÓN:*

*Prueba de Circuito Abierto. Lado de Bajo Voltaje : 8KV; 61,9A; 136KW*

$$g_{P2} = \frac{136000}{8000^2} = 2,125 \times 10^{-3}\,mhos$$

$$Y_{\phi 2} = \frac{61,9}{8000} = 7,7375 \times 10^{-3}\,mhos$$

$$b_{m2} = \sqrt{Y_{\phi 2}^{\,2} - g_{P2}^{\,2}} = 7,44 \times 10^{-3}\,mhos$$

*Prueba de Cortocircuito. Lado de Bajo Voltaje: 650V; 6,25 KA; 103 KW*

$$Z_{eq\,2} = \frac{650}{6250} = 0{,}104\Omega$$

$$R_{eq\,2} = \frac{103000}{6250^2} = 2{,}6368\times 10^{-3}\,\Omega$$

$$X_{eq\,2} = \sqrt{Z_{eq\,2}{}^2 - R_{eq\,2}{}^2} = 0{,}10397\Omega$$

*a)*

$$\overline{Z}_{eq\,2} = (0{,}0026368 + 0{,}10397\,j)\Omega$$

$$R_{P\,2} = 470{,}588\Omega$$

$$X_{m\,2} = 134{,}41\Omega$$

*b)*

$$\overline{Z}_{eq\,1} = a^2 \times \overline{Z}_{eq\,2}$$

$$\overline{Z}_{eq\,1} = (0{,}251 + 9{,}884\,j)\Omega$$

*c)*

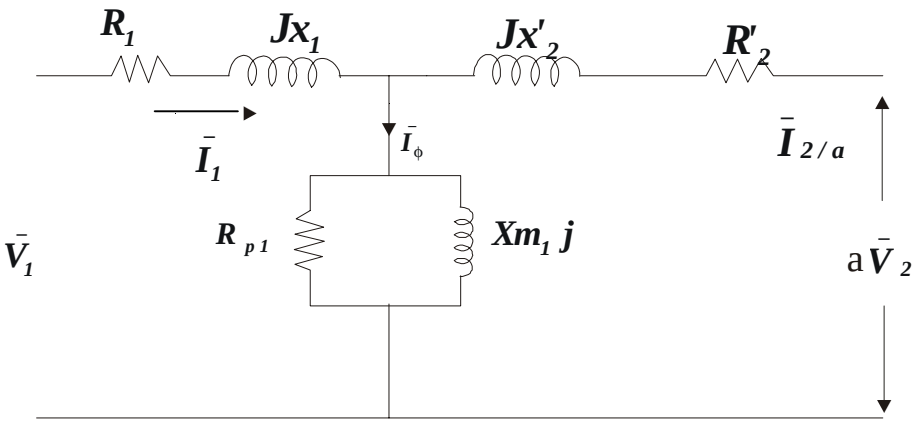



**Figura** *P4.11.1*

$$R_1 = R_2' = \frac{0{,}251}{2} = 0{,}1255\Omega$$

$$X_1 = X_2' = \frac{9{,}884}{2} = 4{,}942\Omega$$

$$R_{P\,1} = 44{,}7353K\Omega$$

$$X_{m\,1} = 12{,}7774K\Omega$$

*d)*

$$P_L = S_N \times \cos\theta_L = S_N = 50MW$$

$$P_1 = P_L + 136KW + 103KW = 50{,}239MW$$

$$\eta = \frac{P_L}{P_L + P_{perd.}} = \frac{P_L}{P_1} = \frac{50MW}{50{,}239MW} = 0{,}9952 \equiv 99{,}52\%$$

$$Voltaje\ V_1 = ¿?$$

$$\overline{V}_1 = a \times \overline{V}_2 + \overline{Z}_{eq1} \times \frac{\overline{I}_2}{a} \quad ; \quad Despreciando\ la\ rama\ de\ R_{P1} \,//\, jX_{m1}$$

$$\overline{V}_1 = \frac{78}{8} \times 8000\angle 0° + (0{,}251 + 9{,}884\,j) \times \frac{50 \times 10^6}{8000 \times \frac{78}{8}} = 78417{,}27797\angle 4{,}63°$$

$$r\% = \frac{78417{,}27797 - 78000}{78000} \times 100 = 0{,}535$$

*e)*

$$P_L = S_N \times \cos\theta_L = 50 \times 10^6 \times 0{,}9 = 45MW$$

$$P_1 = 45MW + 136KW + 103KW = 45{,}239MW$$

$$\eta = \frac{P_L}{P_1} = 0{,}9947 \equiv 99{,}47\%$$

$$\overline{V}_1 = a \times \overline{V}_2 + \overline{Z}_{eq1} \times \frac{\overline{I}_2}{a}$$

$$\overline{V}_1 = 78000\angle 0° + (0{,}251 + 9{,}884\,j) \times \frac{50 \times 10^6}{78000} \angle \arccos 0{,}9$$

$$\overline{V}_1 = 75603{,}74272\angle 4{,}38°$$

$$r = \frac{78000 - 75603{,}74272}{78000} = 0{,}0307 \equiv 3{,}07\%$$

***PROBLEMA N° 4.12 :*** *Los siguientes datos de prueba son de un transformador monofásico de 50KVA, 2500 / 250 V , 60 Hz.*

| *Prueba* | *Voltaje (V)* | *Corriente(A)* | *Potencia (W)* |
|---|---|---|---|
| *Circuito Abierto* | *250* | *?* | *288 W* |
| *Cortocircuito* | *100* | *In* | *?* |

*Sabiendo que la eficiencia máxima del transformador a f.d.p. unitario ocurre cuando el transformador está entregando 30 KVA a la carga . Calcular:*

*a) La eficiencia del transformador cuando entregue 40 KVA a tensión nominal y a f.d.p. 0,8.*
*b) La reactancia de dispersión y la resistencia equivalente referidas al lado de baja tensión* $\left(X_{eq2}\ y\ R_{eq2}\right)$.
*c) La regulación de voltaje del transformador cuando entregue 40 KW a* $V_{nominal}$ *y a f.d.p. 0,8 inductivo.*

*SOLUCIÓN :*

*a)*

$$I_{L2}(\,para\ \eta_{max}\,) = I_{L2N} \times \sqrt{\frac{P_{FE\,N}}{P_{Cu\,N}}} \quad \Rightarrow$$

$$V_L \times I_{L2}(\,para\ \eta_{max}\,) = V_L \times I_{L2N} \times \sqrt{\frac{P_{FE\,N}}{P_{Cu\,N}}}$$

$$\therefore \quad 30\times 10^3 = 50\times 10^3 \times \sqrt{\frac{288}{P_{Cu\,N}}} \quad \Rightarrow \quad P_{Cu\,N} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \times 288 = 800W$$

$$I_{1N} = \frac{50\times 10^3}{2500} = 20A$$

$$\eta = \frac{V_L \times I_L \times cos\,\theta}{V_L \times I_L \times cos\,\theta + P_{FE} + P_{Cu}} = \frac{40\times 10^3 \times 0{,}8}{40\times 10^3 \times 0{,}8 + 288 + 800} = 0{,}96712$$

$$\therefore \quad \eta \equiv 96{,}712\%$$

*b)*

$$R_{eq\,1} = \frac{P_{SC}}{I_{1N}{}^2} = \frac{P_{Cu\,N}}{In^2} = \frac{800}{20^2} = 2\Omega \quad ; \quad R_{eq\,2} = \frac{R_{eq\,1}}{a^2} = 0{,}02\Omega$$

$$Z_{eq\,1} = \frac{V_{SC}}{I_{SC}} = \frac{100}{20} = 5\Omega \qquad \therefore \quad X_{eq\,1} = \sqrt{Z_{eq\,1}{}^2 - R_{eq\,1}{}^2} = 4{,}5825\Omega$$

$$\Rightarrow \quad X_{eq\,2} = \frac{X_{eq\,1}}{a^2} = 0{,}045825\Omega$$

*c)*

$$P_L = V_N \times I_{L2} \times cos\,\theta_L \quad \Rightarrow \quad I_{L2} = \frac{P_L}{V_N \times cos\,\theta_L} = \frac{40\times 10^3}{250\times 0{,}8} = 200A$$

*Por ser una carga inductiva:*

$$r = \frac{I_{L2}}{V_2} \times Z_{eq\,2} \times cos(\phi - \theta_L)$$

$$\phi = arctan\left(\frac{X_{eq\,2}}{R_{eq\,2}}\right) = 66{,}42° \quad \Rightarrow \quad r = \frac{200}{250} \times \frac{5}{100} \times cos(66{,}42° - 37°) = 0{,}03485$$

$$\therefore \quad r = 3{,}485\%$$

***PROBLEMA N° 4.13 :*** *Un transformador monofásico de 10KVA, 1200 / 120 V es conectado como autotransformador con polaridad aditiva como se muestra en la figura se pide:*

*a) Calcular la potencia máxima en KVA que puede entregar el autotransformador sin sobrecargar el arrollamiento de 120V.*
*b) Calcular el incremento porcentual de la potencia en KVA del autotransformador respecto a la del transformador primitivo.*
*c) Calcular el porcentaje de sobrecarga del arrollamiento de 1200 V.*
*d) Calcular las corrientes $I_1$ e $I_C$.*

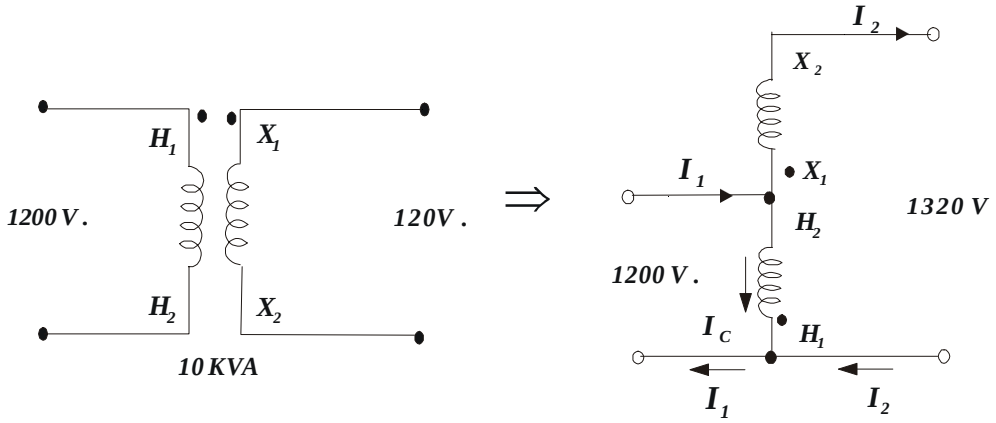



**Figura** *P4.13.1*

***SOLUCIÓN:***

*a) Para el transformador:*

$$I_{BAJA} = \frac{10\times 10^3}{120} = 83{,}33A \qquad I_{ALTA} = \frac{10\times 10^3}{1200} = 8{,}33A$$

*Por lo tanto la potencia máxima que puede entregar el autotransformador será:*

$$P_{max} = V_2 \times I_2 = 1{,}32\times 83{,}33 = 110KVA$$

*b)*

$$\frac{S_{autotransformador}}{S_{transformador}} = \frac{110KVA}{10KVA} = 11 \equiv 1100\%$$

*d)*

$$I_1 = \frac{S_1}{V_1} = \frac{110\times 10^3}{1200} = 91{,}67A$$

$$I_C = I_1 - I_2 = 91{,}67 - 83{,}33 = 8{,}34A$$

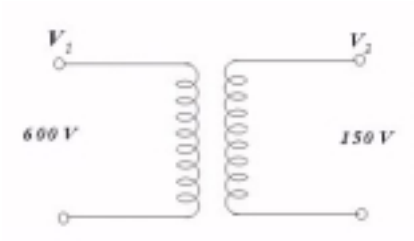
*c)*

$$\%Sobrecarga = \frac{I_C}{I_{ALTA}}\times 100 = \frac{8{,}34}{8{,}33}\times 100 = 100{,}12$$

***PROBLEMA N° 4.14 :*** *Se tiene un transformador monofásico de 10KVA, 600/150 V el cual se desea usar como autotransformador para las siguientes relaciones de transformación : 750 / 150 V y 750 / 600 V.*
*Sabiendo que la eficiencia nominal del transformador es 95% a un cos$\theta$ =1.*
*Se pide calcular para ambos casos (a cos$\theta$ =1 )*

*a) La potencia entregada por acción del transformador sin sobrecargar los arrollamientos.*
*b) La potencia entregada por conducción directa.*
*c) La eficiencia nominal.*
*d) Trazar el diagrama fasorial.*

*SOLUCIÓN:*

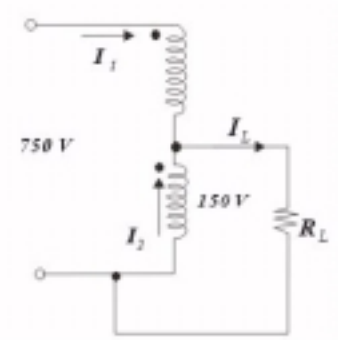



$$\eta_{nom} = 95\% \qquad a_T = \frac{600}{150} = 4$$

$$S = 10KVA$$

***Figura** P4.14.1*

***CASO #1:***




$$I_{1N} = \frac{S}{V_1} = \frac{10\times10^3}{600} = 16{,}67\,A$$

$$I_{2N} = \frac{S}{V_2} = \frac{10\times10^3}{150} = 66{,}67\,A$$

$$V_L = 150V$$

***Figura** P4.14.2*

*a)*

$$P_{TRANSF.} = I_2 \times V_L = \frac{10000}{150} \times 150 = 10KW$$

*b)*

$$P_{COND.} = I_1 \times V_L = \frac{10000}{600} \times 150 = 2{,}5KW$$

$$P_{CARGA} = I_L \times V_L = 83{,}33 \times 150 = 12{,}5KW$$

*c)*

$$e_T = 1 - \frac{\Delta W}{W_2 + \Delta W} = 0{,}95 \quad ya\ que\ W_2 = 10KW \Rightarrow \Delta W = 526{,}316W$$

$$e_A = 1 - \frac{526{,}316}{12500 + 526{,}316} = 0{,}9596 \equiv 95{,}96\%$$

*d)*

$Z_{eq_1}$ *:Impedancia del transformador referido al lado de alto voltaje.*

$\therefore Z_{eq\,A} = \dfrac{Z_{eq_1}}{a_A^{\,2}}$*;Impedancia del autotransformador referido al lado de baja tensión.*

*Donde* $a_A = \dfrac{750}{150} = 5$

$$\therefore \quad Z_{eq\,A} = R_{eq\,A} + jX_{eq\,A}$$

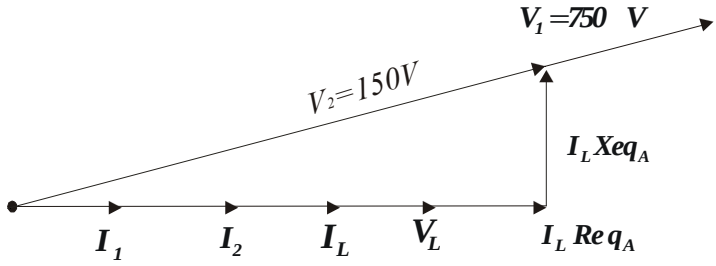
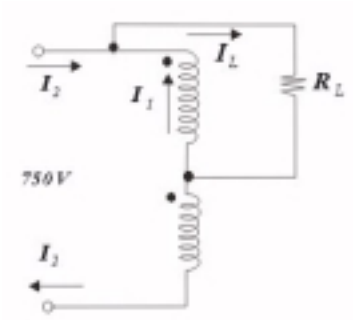



***Figura*** *P4.14.3*

***CASO #2***




$$V_L = 600V$$

$$a_T = \frac{150}{600} = 0{,}25$$

***Figura*** *P4.14.4*

*a)*

$$P_{TRANSF.} = I_1 \times V_L = \frac{10000}{600} \times 600 = 10KVA$$

*b)*

$$P_{COND.} = I_2 \times V_L = \frac{10000}{150} \times 600 = 40KVA$$

*c)*

$$e_A = 1 - \frac{\Delta W}{\Delta W + W_2} \quad donde\ P_A = P_T \times \left(\frac{a_T + 1}{a_T}\right) = 10000 \times \left(\frac{0{,}25 + 1}{0{,}25}\right) = W_2 = 50KVA$$

$$e_A = 1 - \frac{526{,}316}{526{,}316 + 50000} = 0{,}9896 \equiv 98{,}96\%$$

*d)*

$$Z_{eq\,A} = \frac{Z_{eq\,1}}{a_A^{\,2}} \quad donde \quad a_A = \frac{750}{600} = 1{,}25$$

$$Z_{eq\,A} = R_{eq\,A} + jX_{eq\,A}$$

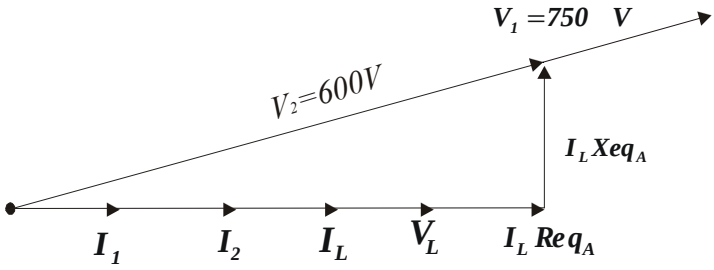



***Figura*** *P4.14.5*

***PROBLEMA N° 4.15 :*** *Un transformador de dos devanados de 500 KVA y 60Hz, proyectado para 13200 / 2500 voltios, se vuelve a conectar para proporcionar 13200 voltios desde una línea de 15700V. Los ensayos en circuito abierto y cortocircuito del transformador dieron los siguientes resultados:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Circuito abierto* | *2500 voltios* | *6,5 A* | *2190 watts* |
| *Cortocircuito* | *600 voltios* | *37,9 A* | *4320 watts* |

*a) ¿Cuál es la potencia máxima con la que puede trabajar el autotransformador con f.d.p = 0,8*
*b) ¿Cuáles serán el rendimiento y la regulación de la tensión con un flujo de potencia a plena carga y f.d.p= 0,8 desde la parte de 15700 voltios hasta la de 13, 200 voltios?*
*c) Si se produce un cortocircuito cerca de los bornes del transfomador en la parte de 13,200 voltios ¿Cuál será la corriente de cortocircuito en régimen permanente que fluye en el transformador desde la línea de 15700 voltios despreciando la corriente de excitación.*

*SOLUCIÓN:*

*Transformador monofásico:*

$S_N = 500KVA$

$f_N = 60Hz$

$a = 13200 / 2500 = 5,28$

*De la prueba de circuito abierto (Lado de baja tensión)*

$V_{OC} = V_N = 2500V$

$I_{OC} = I_\phi = 6,5A$

$P_{OC} = P_{FE\,N} = 2190W$

$$Y_{\phi\,B.T.} = \frac{I_{OC}}{V_{OC}} = \frac{6,5}{2500} = 2,6\times 10^{-3}\,mhos$$

$$g_{P\,B.T.} = \frac{P_{OC}}{V_{OC}^{\;2}} = \frac{2190}{2500^2} = 3,504\times 10^{-4}\,mhos$$

$b_{m\,B.T.} = 2,5763\times 10^{-3}\,mhos$

*a)*

$$S_{N\,max} = S_T \times \left(\frac{a+1}{a}\right) = 500K \times \left(\frac{5,28+1}{5,28}\right) = 595KVA$$

$$S_{N\,max}' = S_T \times \left(\frac{a'+1}{a'}\right) = S_T \times (1+a) = 500K \times (1+5,28) = 3140KVA$$

$$\therefore \quad S_{N\,max} = 3140KVA \quad y \quad P_L = S_{N\,max} \times f.d.p = 3140K \times 0,8 = 2512KW$$

*b)*

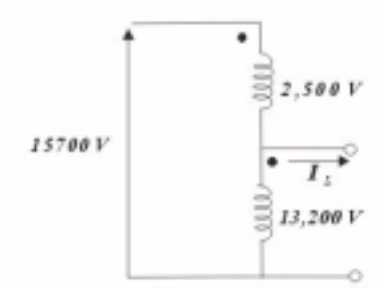



**Figura** *P4.15.1*

$$\eta_A = \frac{P_{2A}}{P_{2A} + \Delta P}$$

*A plena carga:*

$$\Delta P = P_{Cu\,N} + P_{FE\,N} = 6510W$$

$$\eta_A = \frac{2512}{2512 + 6{,}51} = 0{,}9974 \equiv 99{,}74\%$$

$$r\% = \frac{I_L}{V_2} \times Z_{eq\,2} \times \cos(\phi - \theta_L)$$

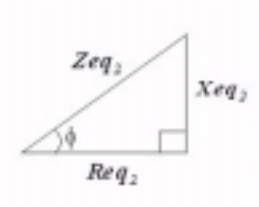



**Figura** *P4.15.2*

*De la prueba de cortocircuito. (Lado de alta tensión)*

$$V_{SC} = 600V$$

$$I_{SC} = I_{1N} = 37{,}9A$$

$$P_{SC} = P_{Cu\,N} = 4320W$$

$$Z_{eq\,1} = \frac{V_{SC}}{I_{SC}} = \frac{600}{37{,}9} = 15{,}831\Omega$$

$$R_{eq\,1} = \frac{P_{SC}}{I_{1N}^{\;2}} = \frac{4320}{37{,}9^2} = 3\Omega$$

$$X_{eq\,1} = 15{,}543\Omega$$

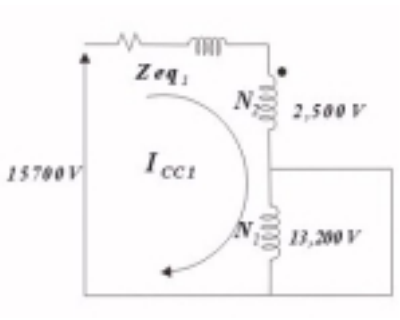
$$\phi = arctan\left(\frac{X_{eq\,2}}{R_{eq\,2}}\right) = arctan\left(\frac{X_{eq\,1}}{R_{eq\,1}}\right) = 79{,}076°$$

$$\theta_L = 36{,}8699°$$

$$I_L = I_{1N} + I_{2N} = \frac{S_N}{V_{1N}} + \frac{S_N}{V_{2N}} = 59{,}155A$$

$$r\% = \frac{I_L}{V_2} \times \frac{Z_{eq\,1}}{a^2} \times cos(\phi - \theta_L) = 16{,}72$$

*c)*




$$I_{CC1} = \frac{15700}{Z_{eq\,1}} = \frac{15700}{15{,}831} = 991{,}725A$$

**Figura** *P4.15.3*

***PROBLEMA N° 4.16 :*** *Se dispone de 3 transformadores monofásicos de 220/110 V, 1 KVA , 60Hz. Se desea alimentar una carga trifásica a 380 V desde una red (trifásica) de 570V.*

*a) Dibujar el nuevo esquema de conexiones y hallar la nueva potencia nominal del sistema.*

*SOLUCIÓN:*

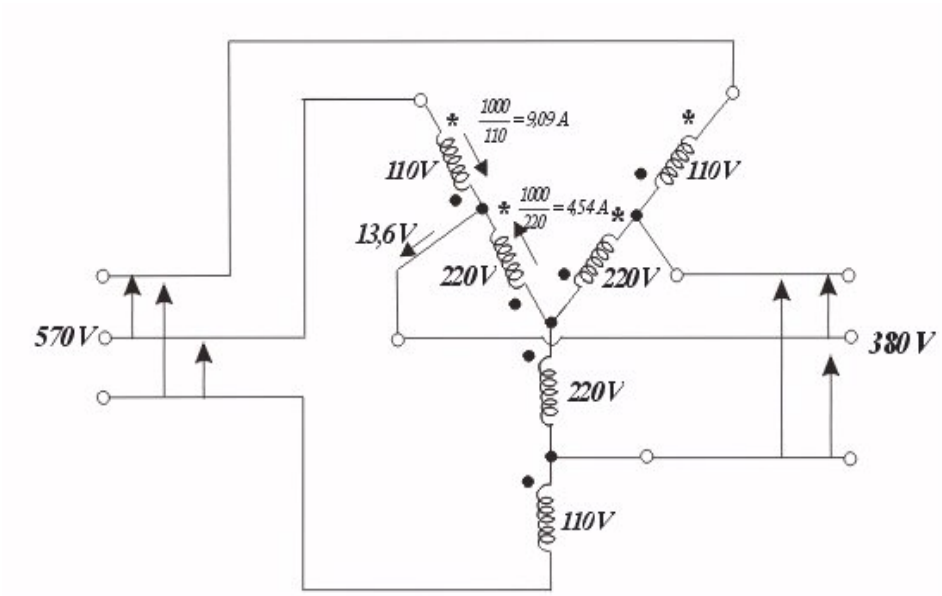



**Figura** *P4.16.1*

$$\therefore \quad S_{N\,sistema} = \sqrt{3} \times V_L \times I_L = \sqrt{3} \times 570 \times 9{,}09 = 8974{,}28VA$$

***PROBLEMA N° 4.17 :*** *Un transformador de 100 KVA, 4400/2200 V, 60Hz fue sometido a prueba de vacío y cortocircuito con los siguientes resultados:*

| *PRUEBA* | *VOLTAJE* | *CORRIENTE* | *POTENCIA* |
|---|---|---|---|
| *Circuito Abierto* | $V_{2N}$ | *1,08 A* | *525 W* |
| *Cortocircuito* | *228V* | $I_N$ | *1300W* |

*Si el transformador se conecta como autotransformador de 6600 / 4400 V, se pide :*

*a) Determinar su potencia nominal (por Inducción y Conducción ) y trace su diagrama fasorial.*
*b) Calcular la tensión a aplicar al autotransformador para mantener la tensión nominal del secundario con una carga de 250 KVA y un f.d.p. 0,85 Inductivo.*

*SOLUCIÓN:*

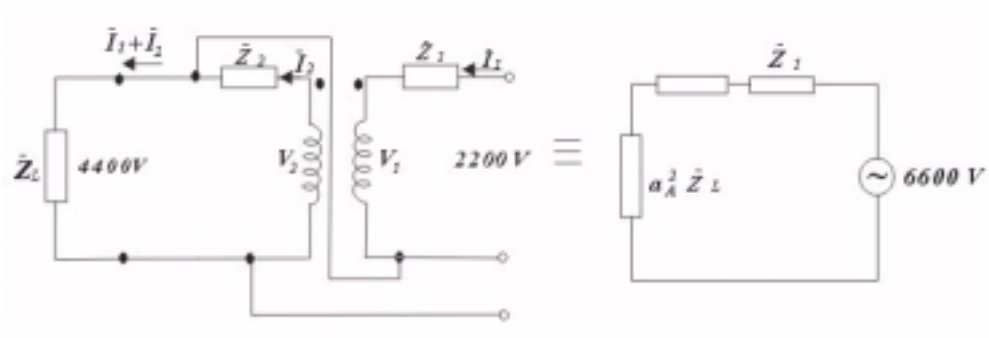



***Figura*** *P4.17.1*

*a)*

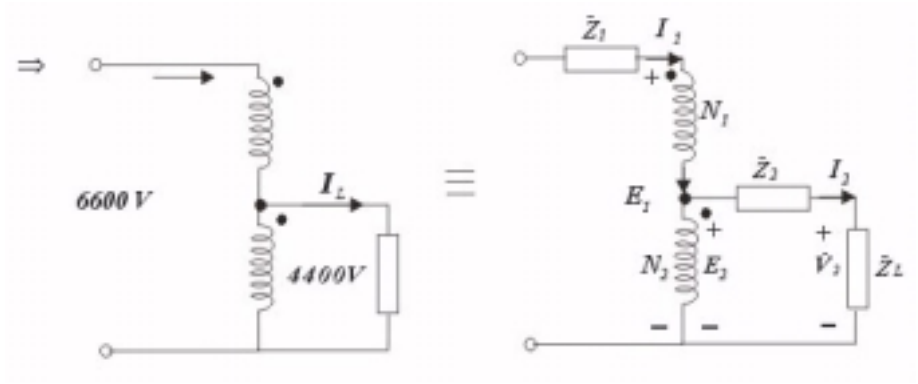



***Figura*** *P4.17.2*

$$S_L = V_2 \times (I_1 + I_2) = 4400 \times \left( \frac{100 \times 10^3}{2200} + \frac{100 \times 10^3}{4400} \right)$$

$$S_L = 4400 \times \frac{100 \times 10^3}{2200} + 4400 \times \frac{100 \times 10^3}{4400} = S_{CONDUCCIÓN} + S_{INDUCCIÓN}$$

$$S_L = 200KVA + 100KVA = 300KVA$$

***DIAGRAMA FASORIAL:***

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2}$$

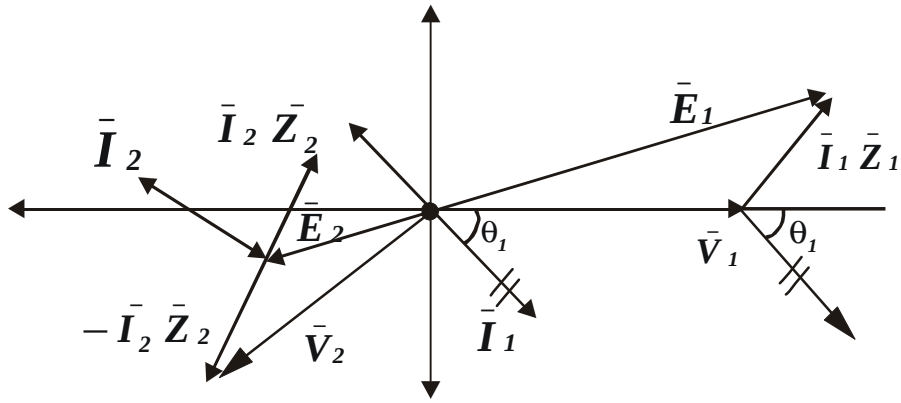


***Figura*** *P4.17.3*

*b) De la prueba de cortocircuito:*

$$V_{CC} = 228V$$
$$I_{2N} = \frac{100\times 10^3}{4400} = 22{,}727\,A$$
$$P_{CC} = 1300W$$

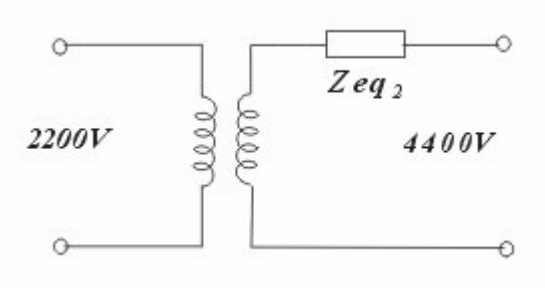



**Figura** *P4.17.4*

$$a_T = \frac{2200}{4400} = 1/2$$

$$Z_{CC} = \frac{V_{CC}}{I_{2N}} = \frac{228}{22{,}727} = 10\Omega$$

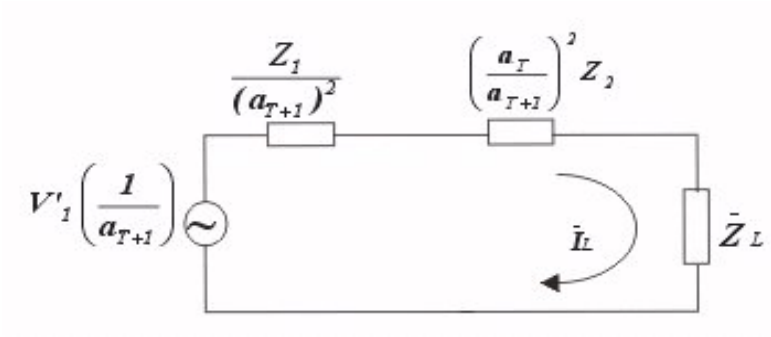
$$R_{CC} = \frac{P_{CC}}{I_{2N}^{\ 2}} = \frac{1300}{22{,}727^2} = 2{,}5168\Omega \quad \Rightarrow \quad X_{CC} = \sqrt{Z_{CC}^{\ 2} - R_{CC}^{\ 2}} = 9{,}678\Omega$$

$$\therefore \quad \overline{Z}_{CC} = 2{,}5168 + j9{,}678 = 10\angle 75{,}42°$$

$$\overline{Z}_{eq\,2} = \overline{Z}_1{}' + \overline{Z}_2 = \overline{Z}_{CC}$$

$$\text{Tomando: } Z_1{}' = Z_2 = \frac{Z_{eq\,2}}{2} \quad \Rightarrow \quad Z_2 = (1{,}2584 + 4{,}839\,j)\Omega$$

$$Z_1{}' = \frac{Z_1}{a_T^{\ 2}} = 4Z_1 \quad \Rightarrow \quad Z_1 = \frac{Z_1{}'}{4} = 0{,}3146 + 1{,}20975\,j$$




*CIRCUITO EQUIVALENTE DEL AUTOTRANSFORMADOR REDUCTOR REFERIDO A LA CARGA*

**Figura** *P4.17.5*

$$\frac{Z_1}{(a_T+1)^2} = 0{,}1398 + 0{,}5376\,j \quad ; \quad \left(\frac{a_T}{a_T+1}\right)^2 \times Z_2 = 0{,}1398 + 0{,}5376\,j$$

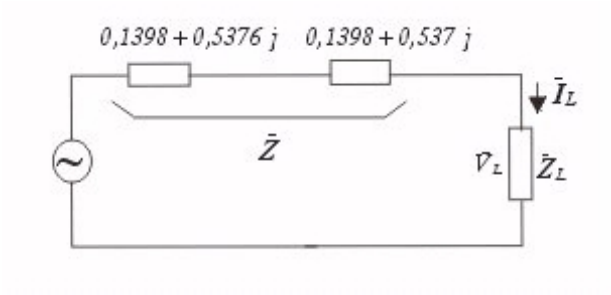



***Figura*** *P4.17.6*

$$V_L = 4400V \qquad \cos\theta_L = 0{,}85$$
$$S_L = 250KVA \qquad \theta_L = 31{,}788° \text{ Inductivo}$$

$$I_L = \frac{S_L}{V_L} = \frac{250\times 10^3}{4400} = 56{,}818A \qquad \bar{Z} = 0{,}279 + 1{,}0752j = 1{,}11\angle 75{,}45°$$

$$\Rightarrow \quad \bar{V}_1{}'\times\left(\frac{1}{a_T+1}\right) = 4400\angle 0° + 56{,}818\angle -31{,}788°\times 1{,}11\angle 75{,}45°$$

$$\therefore \quad \bar{V}_1{}'\times\left(\frac{1}{1/2+1}\right) = \frac{2}{3}\times\bar{V}_1{}' = 4445{,}838\angle 0{,}56°$$

$$\Rightarrow \quad \bar{V}_1{}' = 6668{,}757\angle 0{,}56°$$

*Por lo tanto el porcentaje en que aumenta la tensión es:*

$$\frac{6668{,}757 - 6600}{6600}\times 100 = 1{,}042\%$$

***PROBLEMA N° 4.18 :*** *Un transformador monofásico de 15 MVA , 60Hz* $(66\pm 10\times 1{,}0\%)/13{,}2KV$ *, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente exacto (en ohmios) :*

$$R_1 = 0{,}714 \qquad X_1 = 12{,}199 \qquad R_2 = 0{,}028 \qquad X_2 = 0{,}488$$
$$R_P = 3004{,}81 \qquad X_m = 663{,}13$$

*El transformador alimenta una carga que consume una corriente de valor* $1{,}15I_n$ *, y un factor de potencia tal que el valor de la regulación sea nula . (Utilizar relación de transformación nominal 66/13,2KV)*

*Calcular:*

*a) La tensión en al carga, si la tensión primaria es la nominal.*
*b) La potencia absorvida por la carga .*
*c) La posición del TAP, si la tensión de alimentación del primario es de 62,7KV*

*SOLUCIÓN:*

*a) La carga consume:*

$$I_n = \frac{S}{V} = \frac{15\times 10^6}{13{,}2\times 10^3} = 1136{,}36A$$

$$\Rightarrow \quad \left|I_{L2}{}'\right| = 1{,}15I_n = 1{,}15\times 1136{,}36 = 1306{,}814A$$

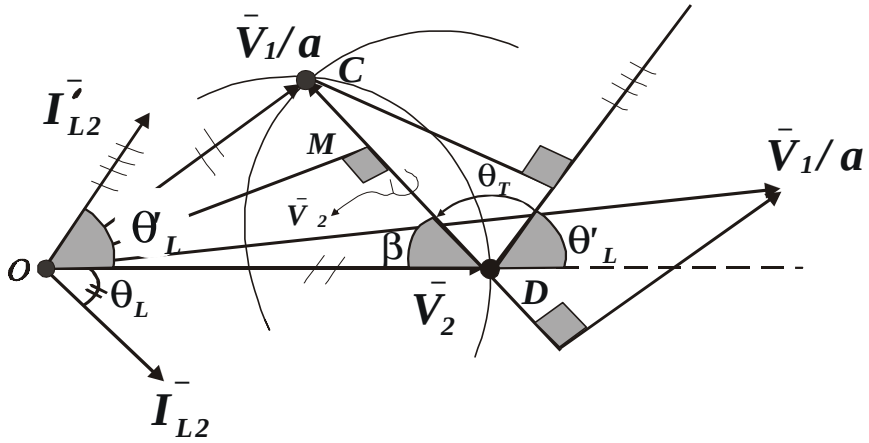
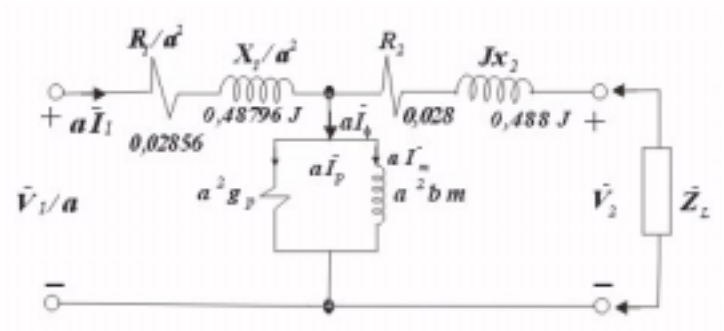



**Figura** *P4.18.1*

$$r\% = \frac{|\bar{V}_1 / a| - |\bar{V}_2|}{|\bar{V}_2|} \times 100 \quad Como \quad r = 0 \quad \Rightarrow \quad |\bar{V}_1 / a| = |\bar{V}_2|$$

*En la figura, hemos determinado el lugar geométrico para que* $|\bar{V}_1 / a| = |\bar{V}_2|$, *lo cual implica tener una carga capacitiva, entonces todo el problema se reduce en hallar los ángulos respectivos.*

*Trabajando en el circuito equivalente referido al lado de baja tensión:*




$$a = \frac{66}{13{,}2} = 5$$

**Figura** *P4.18.2*

*Cuando se quiere hallar la regulación, normalmente se desprecia la admitancia de excitación:*

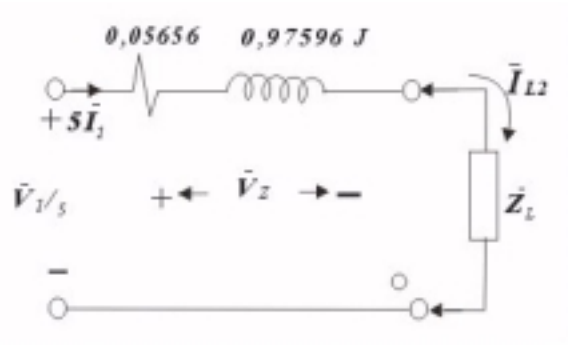



**Figura** *P4.18.3*

*Hallando el* $Z_{eq}$ :

$\overline{Z}_{eq} = 0{,}05656 + 0{,}97596\,j = 0{,}978\angle 86{,}68°$

$\theta_T$ = *ángulo entre* $\overline{V}_Z$ *y* $\overline{I}_{L2}' = 86{,}68°$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{\overline{DM}}{\overline{OD}} = \frac{\left|\overline{I}_{L2}' \times \frac{\left|\overline{Z}_{eq\,2}\right|}{2}\right|}{\left|\overline{V}_2\right|} = \frac{1306{,}814 \times 0{,}978}{2 \times 13{,}2 \times 10^3} = 0{,}0484$$

$$\beta = 87{,}225° \quad \Rightarrow \quad \theta_L' = 180° - 86{,}68° - 87{,}225° = 6{,}095°$$

*Por lo tanto si la tensión primaria es la nominal, la tensión en la carga también será la nominal* $\Rightarrow \quad \left|\overline{V}_1 / a\right| = \left|\overline{V}_2\right| = 13{,}2KV$

b) *La potencia absorbida por la carga:*

$\overline{S}_L = \overline{V}_L \times \overline{I}_L{}^* = 13{,}2 \times 10^3 \angle 0° \times (1306{,}814\angle 6{,}095°)^*$

$\overline{S}_L = 17{,}25 \times 10^6 \angle -6{,}095°$

*Por lo tanto:*

$$P_{ABSORVIDA} = 17{,}25 \times 10^6 \times \cos(-6{,}025°) = 17{,}155MW$$

c) *Posición del TAP:* $V_{PRIMARIO} = 62{,}7KV$

$(66 \pm 10 \times 1\%)KV$

$$\frac{1}{100} \times 66 = 0{,}66 \quad \Rightarrow \quad 66 + x \times 0{,}66 = 62{,}7 \quad \Rightarrow \quad x = -5$$

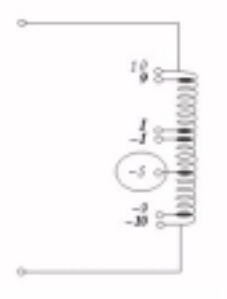


**Figura** *P4.18.4*

**PROBLEMA N° 4.19 :** *Un transformador trifásico conectado en* $(\Delta / Y)$ *está formado por 3 transformadores monofásicos de 100 KVA , 2400/120 V y 60Hz cada uno. El transformador trifásico es alimentado a través de un alimentador cuya impedancia es* $Z_f = 0{,}3 + j0{,}8\Omega / fase$. *El voltaje en el lado de envío del alimentador es mantenido constante en 2400V de línea.*

*Si se sabe que el resultado de la prueba de cortocircuito a uno de los transformadores fue V=57,5 V, I=41,6 A, P=875W. Calcular la tensión en la carga, cuando el transformador trifásico entrega su corriente nominal a una carga de f.d.p.=1.*

*SOLUCIÓN:*

*Prueba de cortocircuito: V=57,5 V, I=41,6 A, P=875W.*

$$r_1 + a^2 \times r_2 = r_1 + r_2' = R_{eq\,1} = \frac{875}{41{,}6^2} = 0{,}506\,\Omega$$

$$Z_{eq\,1} = \frac{57{,}5}{41{,}6} = 1{,}382\,\Omega \quad \Rightarrow \quad X_{eq\,1} = \sqrt{Z_{eq\,1}^{\;2} - R_{eq\,1}^{\;2}} = 1{,}286\,\Omega$$

$$\overline{Z}_{eq\,1} = 1{,}382\angle 68{,}52° \quad ; \quad \overline{Z}_f = 0{,}854\angle 69{,}44°$$

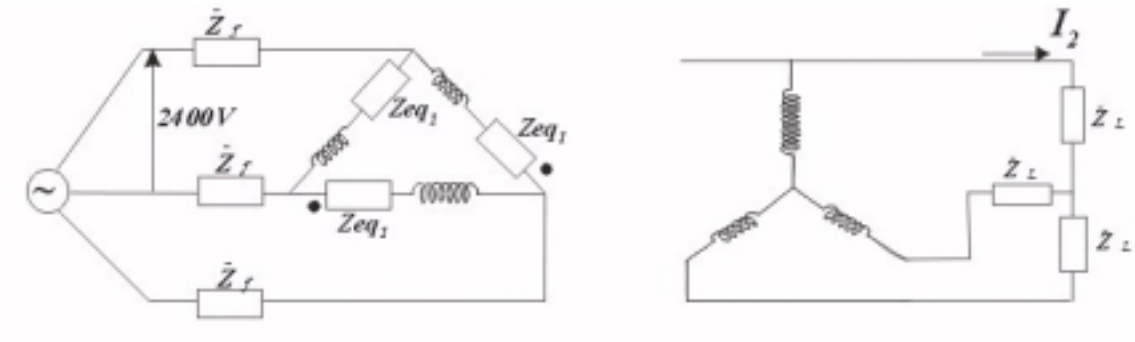



**Figura** *P4.19.1*

*La corriente nominal del transformador trifásico es igual a la corriente nominal del transformador monofásico.*

$$I_{2N} = \frac{S_N}{V_{2N}} = \frac{100000}{120} = 833{,}33 \quad ; \quad a = \frac{2400}{120} = 20$$

*f.d.p=1 (carga resistiva)*

*Reemplazando el primario del transformador trifásico por su equivalente en estrella:*

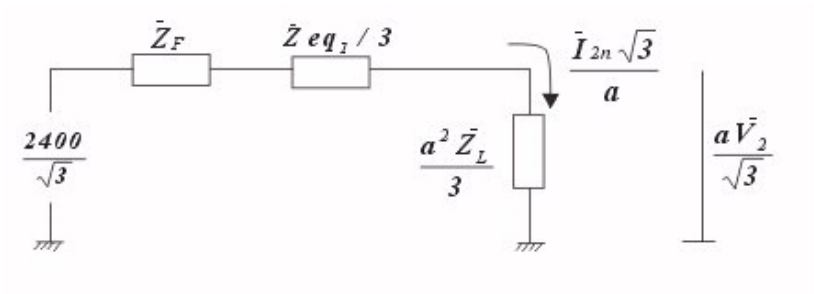



**Figura** *P4.19.2*

$$\overline{Z} = \overline{Z}_f + \overline{Z}_{eq\,1}/3 = 1{,}314\angle 69{,}137° = 1{,}314\angle\beta$$

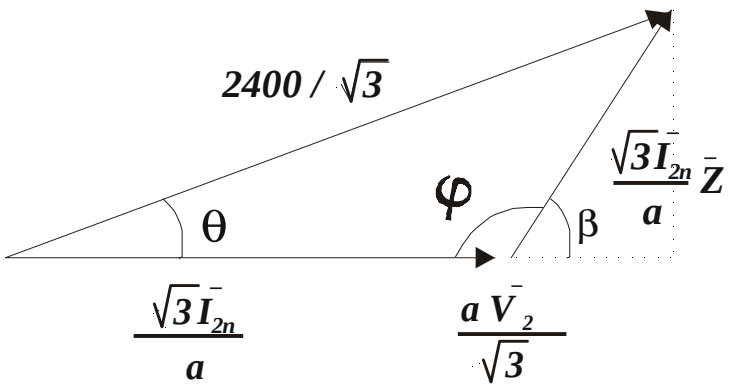



**Figura** *P4.19.3*

*Aplicando la ley de cosenos:*

$$\left(\frac{2400}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{a \times V_2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \times I_{2N} \times Z}{a}\right)^2 - 2 \times Z \times V_2 \times I_{2N} \times \cos\psi$$

$$\frac{a^2}{3} \times V_2^{\,2} - 2 \times Z \times V_2 \times I_{2N} \times \cos\psi + \left(\frac{\sqrt{3} \times I_{2N} \times Z}{a}\right)^2 - \left(\frac{2400}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$$

$$V_2 = 116{,}8296V\,(\,fase\,)$$

***PROBLEMA N° 4.20 :*** *Un banco de tres transformadores idénticos de 100KVA, 2400/120 V, 60Hz, conectadas en delta-estrella, es suministrado con energía mediante un alimentador cuya impedancia es igual a 0,3+j0,8Ω por fase. El voltaje en el extremo de transmisión del alimentador se mantiene constante a 2400V entre líneas; se hace una prueba de cortocircuito a uno de los transformadores, y sus resultados, cuando las terminales de bajo voltaje están en corto, son:*

$$V_H = 57{,}5V \qquad f = 60Hz \qquad I_H = 41{,}6\,A \qquad P = 875W$$

*a) Calcule el voltaje línea a línea en el secundario cuando el banco suministra la corriente nominal a un sistema trifásico con f.d.p. unitario.*
*b) Calcule las corrientes en los devanados primario y secundario del transformador y en los conductores del alimentador si se presenta un cortocircuito trifásico en los terminales de la línea en los secundarios.*

*SOLUCIÓN:*

*Prueba de Cortocircuito:*

$$\overline{Z}_{eq\,1} = \frac{57{,}5}{41{,}6} = 1{,}3822\Omega$$

$$R_{eq\,1} = \frac{875}{41{,}6^2} = 0{,}50562\Omega \qquad\qquad a = \frac{2400}{120} = 20$$

$$X_{eq\,1} = \sqrt{Z_{eq\,1}^{\;2} - R_{eq\,1}^{\;2}} = 1{,}2864\Omega$$

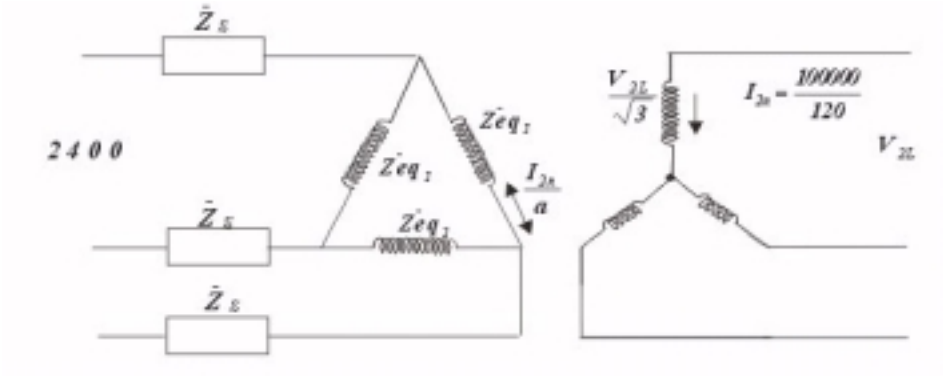



***Figura*** *P4.20.1*

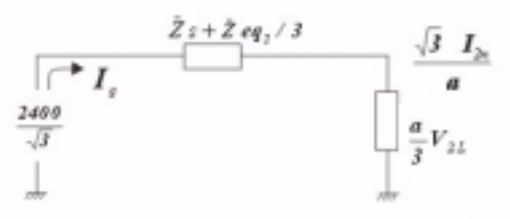



***Figura*** *P4.20.2*

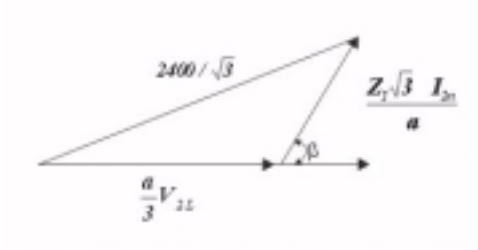



***Figura*** *P4.20.3*

$$\left(\frac{2400}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{a \times V_{2L}}{3}\right)^2 + \left(\frac{Z_1 \times \sqrt{3} \times I_{2N}}{a}\right)^2 - 2 \times \frac{Z_1 \times I_{2N} \times V_{2L}}{\sqrt{3}} \times cos(180° - \beta)$$

$$\overline{Z}_1 = \overline{Z}_S + \frac{\overline{Z}_{eq1}}{3}$$

$$\overline{Z}_1 = 1{,}3151\angle 69{,}13°$$

$$\left(\frac{2400}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{20 \times V_{2L}}{3}\right)^2 + 94{,}9091674^2 + 450{,}8170292 \times V_{2L}$$

$$V_{2L} = 202{,}35V$$

$$V_{2\phi} = 116{,}83V$$

*b)*

$$\frac{\sqrt{3} \times I_{2L}}{a} = \frac{2400/\sqrt{3}}{Z_1} = I_S$$

$$I_{2L} = 12{,}1664KA \qquad I_1 = \frac{I_{2L}}{a} = 608{,}32A$$

$$I_S = 1{,}0536KA$$

***PROBLEMA N° 4.21 :*** *Un transformador trifásico para elevar el voltaje de un generador tiene capacidad nominal igual a 26/345 KV, 1000MVA y tiene una impedancia en serie igual a 0,004+j0,085 por unidad en esta base. Se conecta a un generador de 26KV, 800MVA, que se puede representar mediante una fuente de voltaje en serie con una reactancia igual a 1,65j por unidad en la base del generador.*

a) *Convierta la reactancia por unidad del generador a la base del transformador elevador.*
b) *La unidad suministra 500MW, a factor de potencia unitario y 345V al sistema en los terminales del transformador. Trace un diagrama fasorial para esta condición, usando el voltaje del lado de alta del transformador como fasor de referencia.*
c) *Calcule el voltaje de baja del transformador y el voltaje interno del generador atrás de su reactancia en KV, para las condiciones de b), además calcule la potencia de salida del generador en MW y el factor de potencia.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$X_{GEN} = 1{,}65 \times \frac{S_{NT}}{S_{N\,GEN}} = 1{,}65 \times \frac{1000}{800} = 2{,}0625\,p.u.$$

*b)*

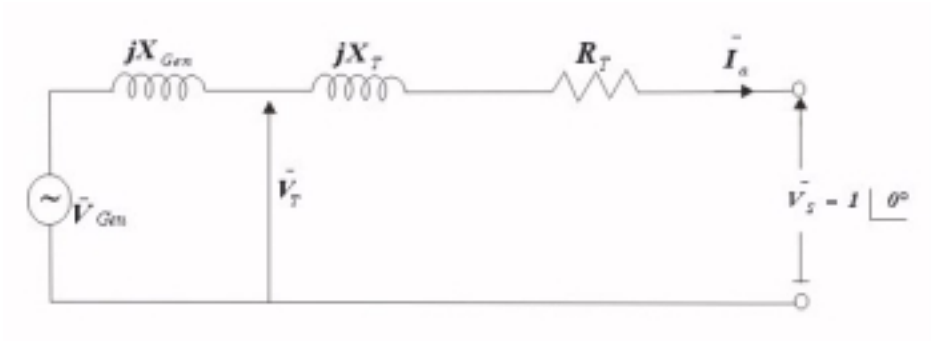



**Figura** *P4.21.1*

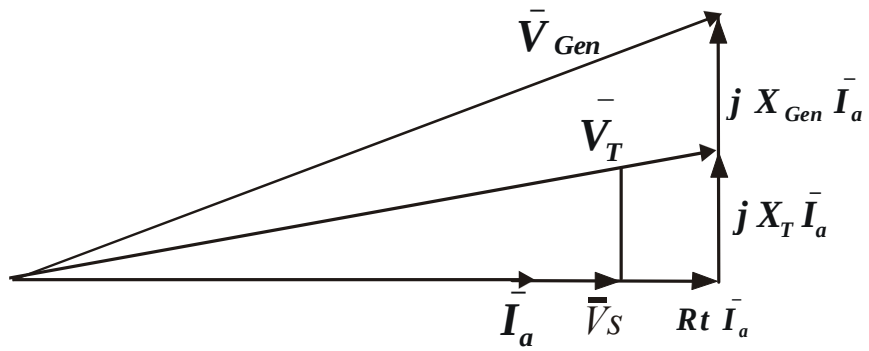



**Figura** *P4.21.2*

*c)*

$$\overline{V}_T = 1 + (R_T + jX_T) \times \overline{I}_a = 1 + (0{,}004 + 0{,}085\,j) \times 0{,}5$$
$$\overline{V}_T = 1{,}003\,p.u. \angle 2{,}43° \quad \Rightarrow \quad V_T = 1{,}003 \times 26\,KV = 26{,}078\,KV$$
$$\overline{V}_{GEN} = 1 + (0{,}004 + 2{,}1475\,j) \times 0{,}5$$
$$\overline{V}_{GEN} = 1{,}469\,p.u. \angle 46{,}98°$$
$$V_{GEN} = 1{,}469 \times 26\,KV = 38{,}194\,KV$$

$$P = 1{,}003 \times 0{,}5 \times \cos 2{,}43° = 0{,}501 p.u.$$
$$P = 0{,}501 \times 1000MW = 501MW$$
$$f.d.p. = \cos 2{,}43° = 0{,}9991$$

***PROBLEMA N° 4.22 :*** *Un transformador de salida de audiofrecuencia tiene una relación de vueltas de primario a secundario igual a 31,6. La inductancia del primario medida con el secundario en circuito abierto es 19,6H, y medida con el secundario en cortocircuito es 0,207H. Las resistencias de devanado son despreciables. Este transformador se usa para conectar una carga resistiva de 8Ω con una fuente que se puede representar mediante una fuente interna electromotriz en serie con una resistencia de 5000Ω. Calcule lo siguiente que relaciona a las características de frecuencia del circuito:*
*a) La frecuencia media superior.*
*b) La frecuencia media inferior.*
*c) La media geométrica de esas frecuencias.*
*d) La relación del voltaje de carga al voltaje de suministro en el valor de frecuencia de c).*

*SOLUCIÓN:*

*a)*
$$R_{SC}' = R_G + R_1 + R_2' + R_L' \quad pero \quad R_1 = R_2' = 0$$
$$\Rightarrow \quad R_{SC}' = 5000 + 31{,}6^2 \times 8 = 12988{,}48\Omega \equiv 12{,}98848K\Omega$$
$$L_{eg}' = 0{,}207H$$
$$f_h = \frac{R_{se}'}{2\pi \times L_{eg}'} = 9{,}98638KHz$$
*b)*
$$R_{par}' = \frac{(R_G + R_1) \times (R_2' + R_L')}{(R_G + R_1 + R_2' + R_L')} = \frac{5000 \times 31{,}6^2 \times 8}{5000 + 31{,}6^2 \times 8} = 3{,}075K\Omega$$
$$f_\lambda = \frac{R_{par}'}{2\pi \times L_{11}} = \frac{3075}{2\pi \times 19{,}6} = 24{,}97Hz$$

*c)*
$$f_G = \sqrt{f_h \times f_\lambda} = 499{,}36Hz$$

*d)*
$$\frac{V_L}{E_G} = \frac{R_L'}{31{,}6 \times R_{SC}'} = \frac{8 \times 31{,}6^2}{31{,}6 \times 12988{,}48} = 0{,}01946$$

# *CAPÍTULO V CONVERSIÓN DE ENERGÍA ELECTROMECÁNICA*

*Diversos dispositivos pueden convertir energía eléctrica a energía mecánica y viceversa. Las estructuras de éstos dispositivos podrían ser diferentes dependiendo de las funciones que ellos tengan. Algunos dispositivos son usados para conversión de energía contínua, y éstos son conocidos como motores y generadores. Otros dispositivos son usados para producir fuerzas traslacionales necesarias y son conocidas como actuadores, así como solenoides, relés electromagnéticos. Los diversos convertidores podrían ser diferentes estructuralmente, pero todos ellos operan con los mismos principios básicos.*

## *5.1 PROCESO DE CONVERSIÓN DE ENERGÍA*

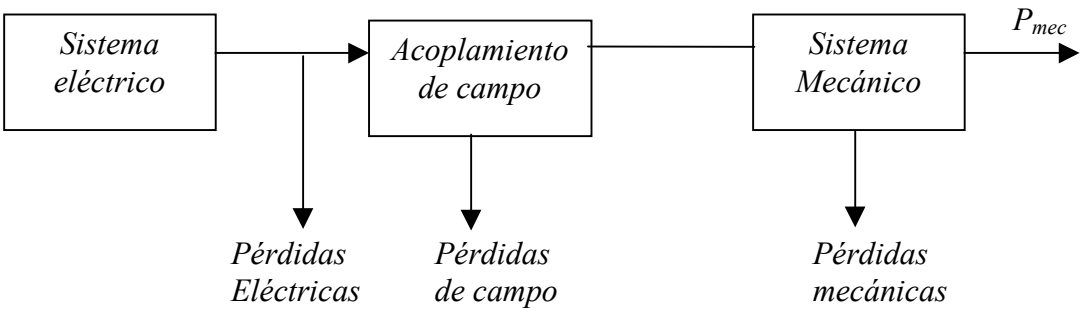
*Existen diversos métodos para calcular la fuerza y el torque desarrollado en un dispositivo de conversión de energía. Los métodos usados aquí se basan en los principios de conservación de energía, el cual establece que la energía no puede ser creada ni destruida; ella puede ser cambiada únicamente de una forma a otra. Un sistema de conversión electromecánico tiene tres partes esenciales:*

1. *Un sistema eléctrico,*
2. *Un sistema mecánico, y*
3. *Un acoplamiento de campo como se muestra en la Fig. 5.1.1*

*La ecuación de transferencia de energía es como sigue:*

| Energía eléctrica de entrada desde la fuente | = | Energía mecánica de salida | + | Incremento de energía almacenada en el campo de acoplamiento | + | Energía de pérdidas | .....(5 - 1) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

*La energía de pérdida eléctrica es la energía disipada por las corrientes que fluyen por los arrollamientos del convertidor de energía. Esta pérdida es conocida como las pérdidas $i^2R$ en la resistencia (R) de los arrollamientos. Las pérdidas en el campo son las pérdidas disipadas en el núcleo cuando el campo magnético cambia en el núcleo magnético. Las pérdidas mecánicas son las pérdidas disipadas por fricción y ventilación en el movimiento de las partes mecánicas componentes. Todas éstas pérdidas son convertidas en calor.*




*Sistema de Conversión Electromecánico*
***Figura** 5.1.1*

*La ecuación de balance de energía (5-1) puede por ésta razón ser escrita como sigue:*

| Energía eléctrica de entrada desde la fuente – pérdidas en las resistencias | = | Energía mecánica de salida + pérdidas por fricción y ventilación | + | Incremento de energía almacenada en el campo + pérdidas en el núcleo | .....(5 - 2) |
|---|---|---|---|---|---|

*Ahora consideremos un diferencial de tiempo "dt" durante el cual un incremento de energía eléctrica $dW_e$ (excluyendo las pérdidas $\boldsymbol{i^2R}$) fluye al sistema. Durante este tiempo "dt", dejemos que $\boldsymbol{dW_f}$ sea la energía suministrada al campo (todavía almacenada ó perdida, ó parte almacenada y parte perdida) y $\boldsymbol{dW_m}$ la energía convertida a forma mecánica (en forma útil ó como pérdida, ó parte útil y parte como pérdida). En forma diferencial, la ecuación (5-2) puede ser expresada como:*

$$dW_e = dW_m + dW_f \quad .....(5-3)$$

*Las pérdidas en el núcleo son generalmente pequeñas, y si ellas son omitidas, $\boldsymbol{dW_f}$ representará el cambio en la energía almacenada en el campo. Similarmente, si las pérdidas por fricción y ventilación pueden ser omitidas, entonces todo el $\boldsymbol{dW_m}$ representará la energía mecánica útil de salida. En el caso de que éstas pérdidas no puedan ser omitidas, ellas pueden ser tratadas separadamente. Las pérdidas no contribuyen al proceso de conversión de energía.*

## *5.2 ENERGÍA DE CAMPO*

*Consideremos el sistema electromecánico de la figura 5.2.1. La parte móvil puede ser mantenida en equilibrio estático por el resorte. Asumamos que la parte móvil es mantenida estacionaria en el mismo entrehierro y la corriente es*

*incrementada desde cero a un valor **i**. Un flujo **ϕ** será establecido en el sistema magnético.*

*Obviamente:*

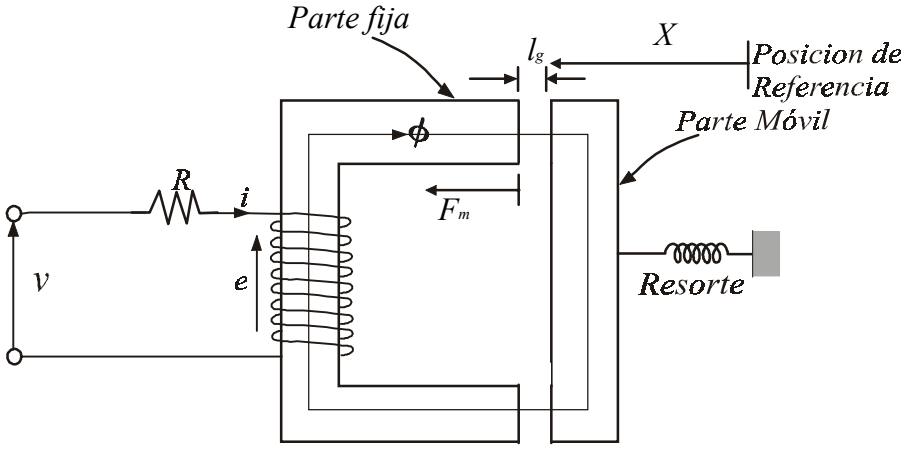
$$dW_m = 0 \quad .....(5-4)$$

*y de las ecuaciones (5-3) y (5-4)*

$$dW_e = dW_f \quad .....(5-5)$$

*Si las pérdidas en el núcleo son omitidas, todo el incremento de energía eléctrica de entrada es almacenada como incremento de energía de campo.*

$$e = \frac{d\lambda}{dt} \quad .....(5-6)$$




*Ejemplo de un sistema electromecánico*
***Figura** 5.2.1*

$$dW_e = eidt \quad .....(5-7)$$

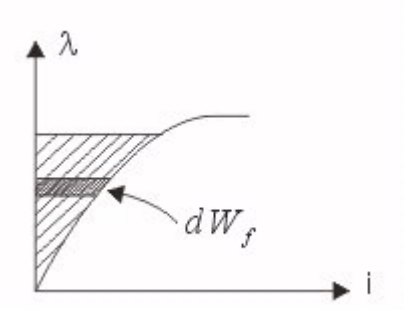
*De las Ecuaciones (5-5), (5-6) y (5-7).*

$$dW_f = id\lambda \quad .....(5-8)$$

*La relación entre el flujo concatenado de la bobina **λ** y corriente **i** para una particular longitud de entrehierro es mostrada en la figura 5.2.2. El incremento **$dW_f$** de energía de campo es mostrado como el área achurada en ésta figura. Cuando el flujo concatenado es incrementado desde cero a **λ**, la energía almacenada en el campo es:*

$$W_f = \int_0^{\lambda} id\lambda \quad .....(5-9)$$

*La integral representa el área entre el eje λ y la curva característica **λ-i**, como se muestra en la figura 5.2.2.*




*Característica **λ-i** para el sistema de la figura 5.2, para una particular longitud de entrehierro.*

***Figura** 5.2.2*

*Otras expresiones útiles pueden también ser derivadas de la energía de campo del sistema magnético.*

*Definamos las variables siguientes:*

***$H_m$**= intensidad magnética en el núcleo.*
***$H_g$**= intensidad magnética en el entrehierro.*
***$\lambda_m$**= longitud media de la trayectoria magnética*
***$\lambda_g$**= longitud de el entrehierro.*

*Entonces:*

$$N\,i = H_m\lambda_m + H_g\lambda_g \quad .....(5-10)$$

*También:*

$$\lambda = N\phi \quad .....(5-11)$$

$$\lambda = NAB \quad .....(5-12)$$

*Donde:*
***A** es el área de la sección transversal de la trayectoria del flujo*
***B** es la densidad de flujo, (asumida la misma en todas las partes)*

*De las Ecuaciones. (5-9), (5-10) y (5-12).*

$$W_f = \int \frac{H_m\lambda_m + H_g\lambda_g}{N} NAdB \quad .....(5-13)$$

*Para el entrehierro:*

$$H_g = \frac{B}{\mu_0} \quad .....(5-14)$$

*De las Ecuaciones (5-13) y (5-14):*

$$W_f = \int \left( H_m \lambda_m + \frac{B}{\mu_0} \lambda_g \right) A dB \quad \text{K K K} \; (5-15)$$

$$W_f = \int \left( H_m dB \, A \lambda_m + \frac{B}{\mu_0} dB \lambda_g A \right) \quad .....(5-16)$$

$$W_f = \int H_m dB \, x \, volumen \, del \, material \, magnético + \frac{B^2}{2\mu_0} x \, volumen \, del \, entrehierro \quad .....(5-17)$$

$$W_f = w_{fm} Vo\lambda_m + w_{fg} Vo\lambda_g \quad .....(5-18)$$

$$W_f = W_{fm} + W_{fg} \quad .....(5-19)$$

*Donde:*

$w_{fm} = \int H_m dB_m$ ; *es la densidad de energía en el material magnético.*

$w_{fg} = \frac{B^2}{2\mu_0}$ *; es la densidad de energía en el entrehierro.*

$Vo\lambda_m$ *es el volumen del material magnético.*

$Vo\lambda_g$ *es el volumen del entrehierro.*

$W_{fm}$ *es la energía en el material magnético.*

$W_{fg}$ *es la energía en el entrehierro.*

*Normalmente, la energía almacenada en el entrehierro (**$W_{fg}$**) es mucho mayor que la energía almacenada en el material magnético (**$W_{fm}$**). En la mayoría de los casos **$W_{fm}$** puede ser omitida.*

*Para un sistema magnético lineal tenemos:*

$$H_m = \frac{B_m}{\mu_m} \quad .....(5-20)$$

*Por esta razón:*

$$w_{fm} = \int \frac{B_m}{\mu_m} dB_m = \frac{B_m^2}{2\mu_m} \quad .....(5-21)$$

***EJEMPLO 1.-*** *Las dimensiones del sistema actuador de la fig. 5-2 son mostradas en la figura E.5.1. EL núcleo magnético esta hecho de material H-23, t=0,5 mm. La bobina tiene 250 vueltas, y la resistencia de la bobina es 5 ohms. Para una longitud de entrehierro de $\lambda_g$=5 mm fija, una fuente DC es conectada a la bobina produciendo una densidad de flujo de 1,0 tesla en el entrehierro.*

*a) Encuentre el voltaje de la fuente DC.*
*b) Encuentre la energía de campo almacenada.*

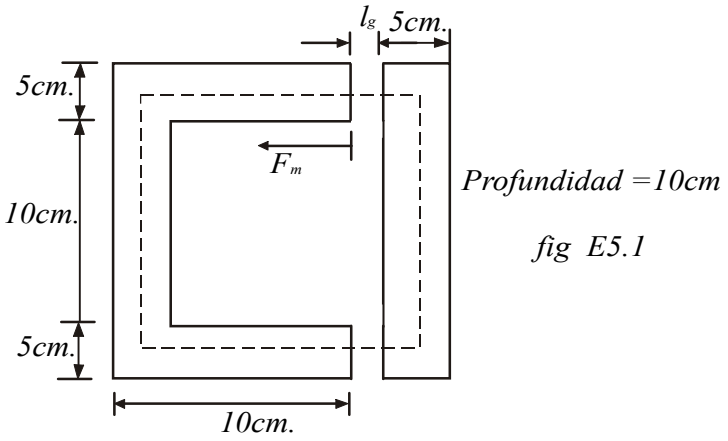



***Figura** E.5.1*

*SOLUCIÓN:*

*a) Para* $B_{máx} = 1T = 1\dfrac{\omega b}{m^2}$ *Tabla B – H ( H – 23 )* $H = 160\dfrac{Amp-v}{m}$

$$\lambda_m = 2(5+10)+2(10+5) = 60\ cm = 0{,}6\ m.$$

*La intensidad magnética en el entrehierro es:*

$$Hg = \frac{Bg}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi\times 10^{-7}} = 795{,}8\times 10^{-3}\ \frac{Amp-v}{m}$$

*La f.m.m.. requerida es :*

$$N\ i = 160\times 0{,}6 + 795{,}8\times 10^{3}\times 2\times 5\times 10^{-3}$$

$$N\ i = 96 + 7958$$

$$250\ i = 8054\ Amp-v$$
$$i = 32{,}216\ Amp$$

*El voltaje de la fuente DC es:*

$$V_{DC} = 32{,}216\times 5 = 161{,}08\ V$$

*b) La densidad de Energía en el núcleo es:*

$$w_{fm} = \int_0^1 HdB$$

*Esta es la densidad de energía dada por el área encerrada entre el eje B y la curva característica B-H para el material* H-23. *Esta área es:*

$$w_{fm} = \frac{1}{2}\times 1\times 160 = 80\frac{J}{m^3}$$

*El volumen del material H-23 es:*

$$Vo\lambda_m = 2(0{,}05\times 0{,}1\times 0{,}2) + 2(0{,}05\times 0{,}1\times 0{,}1) = 0{,}003m^3$$

*La energía almacenada en en núcleo es:*

$$W_{fm} = 80\times 0{,}003 = 0{,}24J$$

*La densidad de energía en el entrehierro es:*

$$w_{fg} = \frac{(1)^2}{2\times 4\pi\times 10^{-7}}\frac{J}{m^3} = 397{,}9\times 10^3 J/m^3$$

*El volumen del entrehierro es:*

$$Vo\lambda_g = 2(0{,}05\times 0{,}1\times 0{,}005)m^3 = 5\times 10^{-5} m^3$$

*La energía almacenada en el entrehierro es:*

$$W_{fg} = 397{,}9\times 10^3 \times 5\times 10^{-5} = 19{,}895 Joules$$

*La energía total de campo es:*

$$W_f = (0{,}24 + 19{,}895)J = 20{,}135J$$

***Nota.-*** *Se observa que la mayor cantidad de energía de campo es almacenada en el entrehierro.*

### *5.2.1 ENERGÍA Y COENERGÍA*

*La característica **λ-i** de un sistema electromagnético (así como el visto en la figura 5.2.1) depende de la longitud del entrehierro y de la característica **B-H** del material magnético. Estas características λ-i están vistas en la figura 5.2.3a para tres valores de la longitud de entrehierro. Para longitudes de entrehierro más largo las características son esencialmente lineales . Las características consiguen ser no lineales a medida que la longitud del entrehierro decrece.*

*Para un particular valor de la longitud de entrehierro, la energía almacenada en el campo es representada por el área $\boldsymbol{W_f}$ entre el eje **λ** y la curva característica **λ-i** como se muestra en la figura 5.2.3b. El área $\boldsymbol{W'_f}$ entre el eje **i** y la curva característica **λ-i** es conocida como la coenergía, y ésta es definida como:*

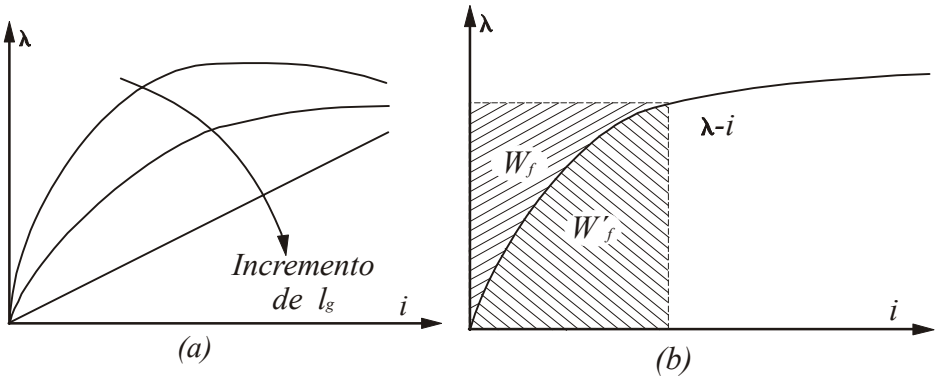
$$W'_f = \int_0^i \lambda di \quad .....(5-22)$$

*Esta cantidad no tiene significado físico. sin embargo, como se verá más adelante, éste puede ser usado para derivar expresiones para la fuerza (ó torque) desarrollado en un sistema electromagnético.*

*De la figura 5.2.3b:*

$$W_f^{'} + W_f = \lambda i \quad .....(5-23)$$

*Note que si* $W_f^{'} > W_f$ *la característica λ-i es no lineal; y si* $W_f^{'} = W_f$ *la característica es lineal*




*a) Características λ-i para diferentes longitudes de entre hierros*
*b) Representación gráfica de la Energía y Coenergía.*
***Figura** 5.2.3*

## *5.3 FUERZA MECÁNICA EN LOS SISTEMAS ELECTROMAGNÉTICOS*

*Consideramos el sistema mostrado en la figura 5.2.1. La parte móvil se mueve desde una posición* $x=x_1$ *a otra posición* $x=x_2$ *así que al final del movimiento el entre hierro decrece. Las características* ***λ-i*** *del sistema para estas dos posiciones están mostradas en la figura 5.3.1. La corriente (**i=v/R**) permanecerá en el mismo valor para ambas posiciones en el estado estable.*

*Consideremos que los puntos de operación sean "**a**" cuando* $x=x_1$ *y "**b**" cuando* $x=x_2$ *(Figura 5.3.1).*

*Si la parte móvil ha tenido un movimiento suave, la corriente ha permanecido esencialmente constante durante el movimiento. El punto de operación por ésta razón ha subido desde el punto "**a**" a "**b**" como se observa en la figura 5.3.1a. Durante el movimiento:*

$$dW_e = \int eidt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} id\lambda = \text{área} \quad abcd \quad .....(5-24)$$

$$dW_f = \text{área } obc - \text{área } oad \quad .....(5-25)$$

$$dW_m = dW_e - dW_f \quad \text{K K K } (5-26)$$

$$dW_e = \text{área } abcd + \text{área } oad - \text{área } obc \quad \text{K K K } (5-27)$$

$$dW_e = \text{área } oab \quad \text{K K K } (5-28)$$

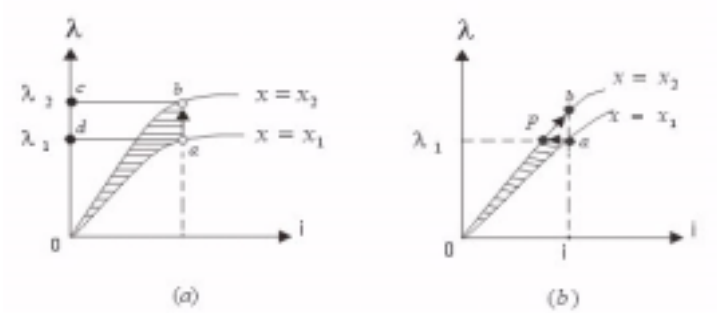
*Si el movimiento ha ocurrido bajo condiciones de corriente constante, el trabajo mecánico hecho es representado por el área sombreada (Figura 5.3.1a), el cual, de hecho, es el incremento en la coenergía.*

$$dW_m = dW_f' \quad \text{K K K} \; (5-29)$$

*Si* $\boldsymbol{f_m}$ *es la fuerza mecánica que causa el desplazamiento diferencial dx.*

$$f_m \; dx = dW_m = dW_f' \quad \text{K K K} \; (5-30)$$

$$f_m = \left.\frac{\partial W_f'(i,x)}{\partial x}\right|_{i=constante} \quad \text{.....} \; (5-31)$$




*Posición del punto de operación por movimiento en el sistema de la figura 5.2.1*
***a)*** *a corriente constante.* ***b)*** *a flujo concatenado constante.*
***Figura*** *5.3.1*

*Vamos ahora a considerar que el movimiento ha ocurrido muy rápidamente. esto podría ser asumido en que durante el movimiento el flujo concatenado ha permanecido esencialmente constante, como se observa en la figura 5.3.1b. Se puede mostrar que durante el movimiento el trabajo mecánico realizado es representado por el área sombreada oap, el cual, de hecho es el decremento en la energía de campo. por ésta razón :*

$$f_m dx = dW_m = -dW_f \quad \text{K K K} \; (5-32)$$

$$f_m = -\left.\frac{\partial W_f(\lambda, x)}{\partial x}\right|_{\lambda=constante} \quad \text{.....} \; (5-33)$$

*Note que para el movimiento rápido la entrada eléctrica es cero (**idλ=0**) por que el flujo concatenado ha permanecido constante y la energía mecánica de salida ha sido suministrada completamente por la energía de campo.*

*En el límite cuando el diferencial de desplazamiento dx es pequeño, las áreas **oab** en la Figura 5.3.1a, y **oap** en la Figura 5.3.1b, serán esencialmente la misma. Por esta razón el cálculo de la fuerza de las ecuaciones 5-31 y 5-33 será la misma.*

***EJEMPLO 2.-*** *La relación λ-i para un sistema electromagnético es dada por:*

$$i = \left( \frac{\lambda g}{0,09} \right)^2$$

*El cual es válido para los límites 0< i < 4Amp y 3< g < 10cm. Para una corriente i= 3Amp y longitud de entrehierro g = 5cm, encuentre la fuerza mecánica de la parte móvil, usando el concepto de energía y coenergía de campo.*

*SOLUCIÓN:*

*La relación λ-i es no lineal. De la relación λ-i*

$$\lambda = \frac{0,09\, i^{1/2}}{g}$$

*La coenergía del sistema es:*

$$W_f' = \int_0^i \lambda di = \int_0^i \frac{0,09 i^{1/2}}{g} di$$

$$W_f' = \left( \frac{0,09}{g} \right) \left( \frac{2}{3} \right) i^{3/2} \; joules$$

*De la ecuación 5-31:*

$$f_m = \left. \frac{\partial W_f'(i, g)}{\partial g} \right|_{i=cte}$$

$$f_m = -0,09 \left( \frac{2}{3} \right) i^{3/2} \left. \frac{1}{g^2} \right|_{i=cte}$$

*Para g = 0.05 m y i = 3A*

$$f_m = -0,09 \left( \frac{2}{3} \right) 3^{3/2} \left. \frac{1}{0,05^2} \right|_{i=cte} N - m$$

$$f_m = -124,7 N - m$$

*La energía de el sistema es:*

$$W_f = \int_0^\lambda i d\lambda = \int_0^\lambda \left( \frac{\lambda g}{0.09} \right)^2 d\lambda$$

$$W_f = \frac{g^2}{0,09^2} \left( \frac{\lambda^3}{3} \right)$$

*De la ecuación 5-33:*

$$f_m = -\left.\frac{\partial W_f(\lambda, g)}{\partial g}\right|_{\lambda=cte} = -\frac{2g\lambda^3}{3\times 0{,}09^2}$$

*Para g = 0.05m y i = 3A*

$$\lambda = \frac{0{,}09\times 3^{1/2}}{0{,}05} = 3{,}12\ Wb-vuelta$$

$$f_m = -\frac{2\times 0{,}05\times 3{,}12^3}{3\times 0{,}09^2} = -124{,}7\,N-m$$

*Las fuerzas calculadas basadas en las funciones de energía y coenergía son la misma, como se esperaba. La selección de la función energía o coenergía así como las bases para el cálculo es materia de conveniencia, depende de las variables dadas. El signo negativo de las fuerzas indica que la fuerza actúa en dirección de la disminución de la longitud del entrehierro.*

### *5.3.1 SISTEMAS LINEALES*

*Consideremos el sistema electromagnético de la Figura 5.2.1. Si la reluctancia de la trayectoria magnética del núcleo es despreciable comparada con la de la trayectoria del entrehierro, la relación λ-i consigue ser lineal. Para este sistema idealizado.*

$$\lambda = L(x)i \quad .....(5-34)$$

*Donde* ***L(x)*** *es la inductancia para la bobina, cuyo valor depende de la longitud del entrehierro. La energía de campo es:*

$$W_f = \int i d\lambda \quad .....(5-35)$$

*De las ecuaciones (5-34) y (5-35):*

$$W_f = \int_0^{\lambda} \frac{\lambda}{L(x)} d\lambda = \frac{\lambda^2}{2L(x)} \quad .....(5-36)$$

$$W_f = \frac{L(x)i^2}{2} \quad .....(5-37)$$

*De las ecuaciones (5-33) y (5-36):*

$$f_m = -\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda^2}{2L(x)}\right)\right|_{\lambda=cte} \quad \text{K K K}\ (5-38)$$

$$f_m = \frac{\lambda^2}{2L^2(x)}\frac{dL(x)}{dx} \quad \text{K K K}\ (5-39)$$

$$f_m = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \quad .....(5-40)$$

*Para un sistema lineal:*

$$W_f = W'_f = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad .....(5-41)$$

*De las ecuaciones. 5-31 y 5-41*

$$f_m = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} L(x) i^2\right)_{i=cte} \quad .....(5-42)$$

$$f_m = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \quad .....(5-43)$$

*Las ecuaciones (5-40) y (5-43) muestran las mismas expresiones para las fuerzas obtenidas a partir de las funciones de energía y coenergía. Para el sistema de la Figura 5.2.1 , si la reluctancia de la trayectoria magnética del núcleo es omitida.*

$$N\, i = H_g 2g = \frac{B_g}{\mu_0} 2g \quad .....(5-44)$$

*De la Ecuación 5-17 la energía de campo es:*

$$W_f = \frac{B_g^2}{2\mu_0} Vo\lambda_g \quad .....(5-45)$$

$$W_f = \frac{B_g^2}{2\mu_0} A_g 2g \quad .....(5-46)$$

*Donde* $\boldsymbol{A_g}$ *es el área de la sección transversal del entrehierro.*

*De las Ecuaciones (5-33) y (5-46):*

$$f_m = \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{B_g^2}{2\mu_0} A_g 2g\right) = \frac{B_g^2}{2\mu_0} 2A_g \quad .....(5-47)$$

*De aquí, que la fuerza por unidad de área de entre hierro, llamada presión magnética* $f_m$*, es:*

$$f_m = \frac{B_g^2}{2\mu_0} \frac{N}{m^2} \quad .....(5-48)$$

***EJEMPLO 3****.- El sistema magnético mostrada en la figura E.5.3 tiene los siguientes parámetros:*
*N = 500  i = 2A*
*Ancho del entrehierro = 2,0 cm*

*Profundidad del entrehierro = 2,0 cm*
*Largo del entrehierro = 1 mm*
*Omita la reluctancia del núcleo, el flujo de la dispersión, y el efecto de borde*
*a) Determinar la fuerza de atracción entre ambas partes del entrehierro.*
*b) Determine la energía almacenada en el entrehierro.*

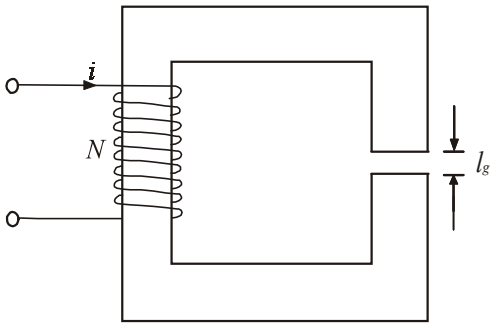



***Figura** E.5.3*

*SOLUCIÓN:*
*a)*

$$B_g = \frac{\mu_0 N i}{\lambda_g}$$

$$f_m = \frac{B_g^2}{2\mu_0} A_g = \frac{\mu_0 N^2 \lambda^2 A_g}{2\lambda_g^2}$$

$$f_m = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500^2 \times 2^2 \times 2 \times 2 \times 10^{-4}}{2 \times 1 \times 1 \times 10^{-6}}$$

$$f_m = 251{,}33N$$

*b)*

$$W_f = \frac{B_g^2}{2\mu_0} Vo\lambda_g = \frac{B_g^2}{2\mu_0} A_g \lambda_g = 251{,}33 \times 10^{-3} J$$

$$W_f = 0{,}25133\ J$$

***EJEMPLO 4.-** El sistema magnético de levante mostrado en La Fig. E.5.4. tiene una sección transversal cuadrada de 6 x 6 cm$^2$. La bobina tiene 300 vueltas y una resistencia de 6 ohms. Omita la reluctancia del núcleo magnético y el efecto de borde del entrehierro.*

*a) El entrehierro es inicialmente mantenido en 5 mm y la fuente DC de 120V es conectada a la bobina. Determine:*
   *i) La energía almacenada en el campo.*
   *ii) La fuerza de levante.*

*b) El entrehierro es nuevamente mantenido en 5 mm y una fuente A.C. de 120V (rms) a 60 Hz es conectada a la bobina. Determine el valor promedio de la fuerza de levante.*

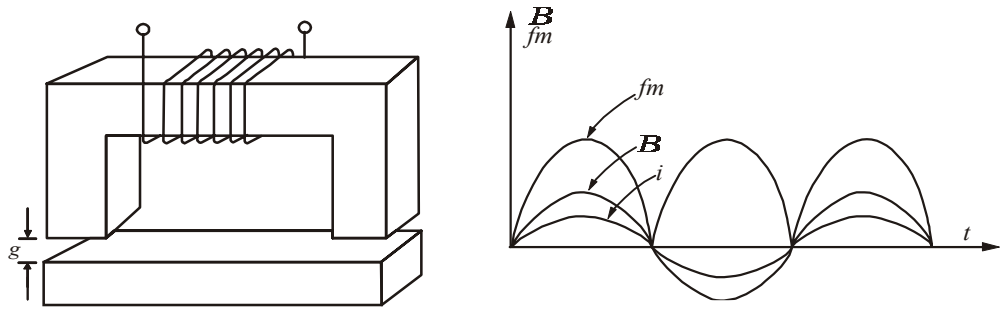



***Figura** E.5.4*

*SOLUCIÓN:*

*a) La corriente en la bobina es :*

$$i = \frac{120}{6} = 20A$$

*Porque la reluctancia del núcleo magnético es omitida, la energía de campo en el núcleo magnético es omitida. Toda la energía de campo está en los entrehierros.*

$$N\,i = H_g \lambda_g = \frac{B_g}{\mu_0}\lambda_g$$

$$B_g = \frac{\mu_0 N\,i}{2g} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 300 \times 20}{2 \times 5 \times 10^{-3}}$$

$$B_g = 0{,}754\ Tesla$$

*La energía de campo es :*

$$W_f = \frac{B_g^2}{2\mu_0} Vo\lambda_g = \frac{0.754^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \times 2 \times 6 \times 6 \times 5 \times 10^{-7}\ J = 8{,}143J$$

*De la Ecuación 5-47, la Fuerza de levante es:*

$$f_m = \frac{B_g^2}{2\mu_0} A_g = \frac{0.754^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \times 2 \times 6 \times 6 \times 10^{-4}\ N = 1628{,}7N$$

*b) Para una excitación A.C. La impedancia de la bobina es:*

$$\vec{Z} = R + j\omega L$$

*La inductancia de la bobina es:*

$$L = \frac{N^2}{R_g} = \frac{N^2 \mu_0 A_g}{\lambda_g}$$

$$L = \frac{300^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 6 \times 6 \times 10^{-4}}{2 \times 5 \times 10^{-3}} = 40{,}7 \times 10^{-3}\ Hr$$

$$\vec{Z} = 6 + j377 \times 40{,}7 \times 10^{-3} = 6 + j15{,}34\ \Omega$$

*La corriente de la bobina es:*

$$I_{rms} = \frac{120}{\sqrt{6^2 + 15.34^2}} = 7{,}29A$$

*La densidad de flujo es:*

$$B_g = \frac{\mu_0 N\,i}{2g}$$

*La densidad de flujo es proporcional a la corriente y por ésta razón cambia sinusoidalmente con el tiempo como se observa en la Figura E.5.4 . El valor rms de la densidad de flujo es:*

$$B_{rms} = \frac{\mu_0 N I_{rms}}{2g} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 300 \times 7{,}29}{2 \times 5 \times 10^{-3}} \, Tesla$$

$$B_{rms} = 0{,}2748 \frac{\omega b}{m^2}$$

*La fuerza de levante es:*

$$f_m = \frac{B_g^2}{2\mu_0} 2A_g \;\alpha\; B_g^2$$

*La fuerza varía con el cuadrado de la densidad de flujo como se muestra en la Fig. E.5.4*

$$f_m\big|_{avg} = \frac{B_g^2}{2\mu_0}\bigg|_{avg} 2A_g = \frac{B_{rms}^2}{2\mu_0} 2A_g = \frac{0{,}275^2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 10^{-4}}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}}$$

$$f_m\big|_{avg} = 216{,}3N$$

*El cual es así un octavo de la fuerza de levante obtenida con fuente D.C. de voltaje.*

## *5.4 MÁQUINAS ROTATIVAS*

*La producción de movimiento traslacional en un sistema electromagnético ha sido discutido en secciones previas. Sin embargo, la mayoría de convertidores de energía, particularmente los de más alta potencia, producen movimiento rotacional. La parte esencial de un sistema electromagnético rotativo es mostrada en la Figura 5.4.1. La parte fija de un sistema electromagnético rotativo es llamada el estator, y la parte móvil es llamada Rotor. El Rotor se mueve y rota libremente entre los polos del estator. Consideremos un caso general en el cual ambos estator y rotor tienen en sus arrollamientos circulando corriente, tal como se observa en la Figura 5.4.1. La corriente puede ser suministrada al circuito del rotor por entre escobillas fijas y a través de anillos de deslizamiento montados en el rotor.*
*La energía almacenada de campo* $\boldsymbol{W_f}$ *del sistema puede ser evaluada por el establecimiento de las corrientes* $\boldsymbol{i_s}$ *e* $\boldsymbol{i_r}$ *en los arrollamientos manteniendo el sistema estático, esto es, sin salida mecánica. Consecuentemente:*

$$dW_f = e_s i_s dt + e_r i_r dt \quad .....(5-49)$$

$$dW_f = i_s d\lambda_s + i_r d\lambda_r \quad .....(5-50)$$

*Para un sistema magnético lineal los flujos concatenados* $\boldsymbol{\lambda_s}$ *del arrolllamiento estatórico y del arrollamiento rotórico pueden ser expresados en términos de inductancias cuyos valores dependen de la posición* $\boldsymbol{\theta}$ *del rotor.*

$$\lambda_s = L_{ss} i_s + L_{sr} i_r \quad .....(5-51)$$

$$\lambda_r = L_{rs} i_s + L_{rr} i_r \quad .....(5-52)$$

*Donde:*

***$L_{ss}$*** *= es la inductancia propia del arrollamiento estatórico*
***$L_{rr}$*** *= es la inductancia propia del arrollamiento rotórico*
***$L_{sr}$ ,$L_{rs}$*** *= son las inductancias mutuas entre los arrollamientos rotórico y estatórico.*

*Para un sistema magnético lineal $L_{sr} = L_{rs}$ . Las ecuaciones 5-51 y 5-52 pueden ser escritas en la forma matricial.*

$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \qquad \text{K K K } (5-53)$$

*De las ecuaciones. (5-50) (5-51) y (5-52).*

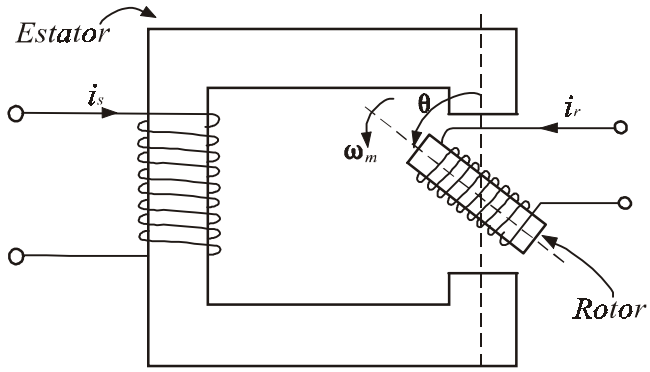
$$dW_f = i_s d(L_{ss} i_s + L_{sr} i_r) + i_r d(L_{sr} i_s + L_{rr} i_r) \quad .....(5-54)$$

$$dW_f = L_{ss} i_s di_s + L_{rr} i_r di_r + L_{sr} d(i_s i_r) \quad .....(5-55)$$

*La energía de campo es:*

$$W_f = L_{ss} \int_0^{i_s} i_s di_s + L_{rr} \int_0^{i_r} i_r di_r + L_{sr} \int_0^{i_s i_r} d(i_s i_r) \quad .....(5-56)$$

$$W_f = \frac{1}{2} L_{ss} i_s^2 + \frac{1}{2} L_{rr} i_r^2 + L_{sr} i_s i_r \quad .....(5-57)$$




*Configuración Básica de un Sistema Electromagnético Rotatorio*
***Figura** 5.4.1*

*Siguiendo el procedimiento usado para determinar una expresión de la fuerza desarrollada en un actuador traslacional, podría mostrarse que el torque desarrollado en un sistema electromagnético es:*

$$T = \left.\frac{\partial W_f'(i,\theta)}{\partial \theta}\right|_{i=cte} \quad .....(5-58)$$

*En un sistema magnético lineal, la energía y la coenergía son los mismos, esto es* $W_f = W_f'$. *Por ésta razón, de las ecuaciones 5-57 y 5-58.*

$$T = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_{ss}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_{rr}}{d\theta} + i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta} \quad .....(5-59)$$

*Los dos primeros términos del lado de la mano derecha de la Ecuación 5-59 representa los torques producidos en la máquina porque muestra la variación de la inductancia propia con la posición del rotor. Esta componente de torque es llamada el torque de reluctancia. El tercer término representa el torque producido por la variación de la inductancia mutua entre los arrollamientos del estator y rotor.*

***EJEMPLO 5.-*** *En el sistema electromagnético de la Figura 5.4.1 el rotor no tiene arrollamiento (tenemos un motor de reluctancia) y la inductancia del estator está como una función de la posición θ del rotor :*

$$L_{ss} = L_o + L_2 \cos 2\theta \text{ (Figura E.5.5).}$$

*La corriente del estator es:*

$$i_S = I_{Sm} sen\omega t$$

a) *Obtener una expresión para el torque actuante en el rotor.*
a) $\theta = \omega_m t + \delta$ *, donde* $\omega_m$ *es la velocidad angular del rotor y* $\delta$ *es la posición del rotor en t =0. Encuentre la condición para no cero del torque promedio y obtenga una expresión para el torque promedio.*

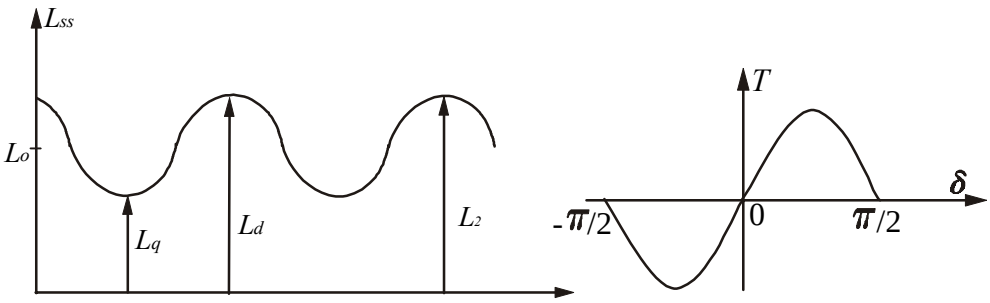



***Figura*** *E.5.5*

*SOLUCIÓN :*

a) *Desde que* $i_r = 0$ *, de la Ecuación 5-59:*

$$T = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_{ss}}{d\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} I_{sm}^2 \sin^2 \omega t \frac{d}{d\theta}(L_0 + L_2 \cos 2\theta)$$

$$T = -I_{sm}^2 L_2 \sin 2\theta \sin^2 \omega t \qquad N - m$$

*b)*

$$T = -I_{sm}^2 L_2 \sin 2(\omega t + \delta) \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$$

$$T = \frac{1}{2} I_{sm}^2 L_2 \left[ \sin 2(\omega t + \delta) - \frac{1}{2} \sin 2((\omega_m + \omega)t + \delta) - \frac{1}{2} \sin 2((\omega_m - \omega)t + \delta) \right]$$

*El torque promedio es producido para las siguientes velocidades:*

*i)* $\omega_m = 0$

*El torque promedio a velocidad cero es:*

$$T_{avg} = -\frac{1}{2} I_{sm}^2 L_2 \sin 2\delta$$

*De la Fig. E.5.5:*

$$L_2 = \frac{L_d - L_q}{2}$$

*Por ésta razón:*

$$T_{avg} = -\frac{1}{4} I_{sm}^2 (L_d - L_q) \sin 2\delta$$

*ii)* $\omega_m = \pm\omega$

*Correspondiente a ésta condición:*

$$T_{avg} = \frac{1}{4} I_{sm}^2 L_2 \sin 2\delta$$

$$T_{avg} = \frac{1}{8} I_{sm}^2 (L_d - L_q) \sin 2\delta$$

*El torque promedio varía sinusoidalmente con 2$\delta$, donde $\delta$ es la posición del rotor en t= 0 y es conocida como el ángulo de torque de potencia.*

# *PROBLEMAS RESUELTOS*
# *CAPITULO V*

# *CONVERSIÓN DE ENERGÍA*

***PROBLEMA N° 5.1.-*** *El núcleo magnético mostrado en la figura tiene una sección transversal de 3cm×3cm. Cuando las dos secciones del núcleo son mantenidas casi juntas, la longitud del entrehierro es x=1mm. La bobina tiene 177 espiras y una resistencia de 7,5 Ohmios. Considere* $\mu_{FE} >> \mu_o$

*a) Suponiendo que se conecta una fuente DC de 40V a la bobina, calcule la fuerza que mantiene a las dos secciones casi juntas.*

*b) Suponiendo que se conecta una fuente AC de 100V a 60Hz , cual será la fuerza promedio que mantiene a las dos secciones casi juntas.* $R_{AC} = R_{DC}$

*c) Repetir la parte a) únicamente, considerando el efecto marginal o de borde.*

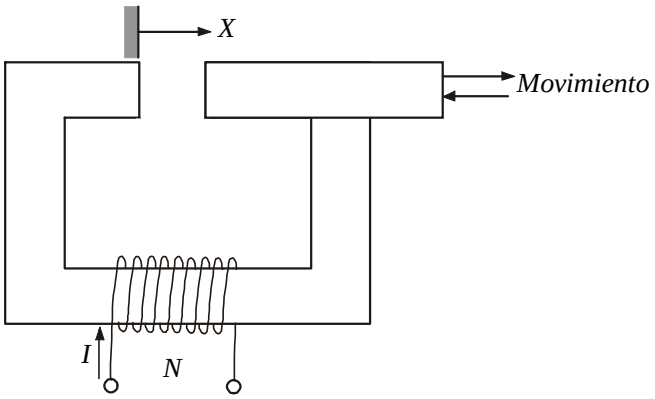



***Figura*** *P5.1.1*

*SOLUCIÓN:*

*Considerando los casos:*

**Sin dispersión:*

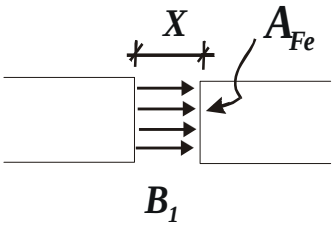



***Figura*** *P5.1.2*

**Con dispersión:*

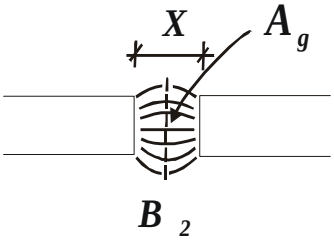



***Figura*** *P5.1.3*

*Se asume:*

$$B_2 \times A_g = B_1 \times A_{FE}$$

$$\Rightarrow \quad U_2 = \frac{1}{2} \times \frac{B_2^{\,2}}{\mu_o} \times Vol = \frac{1}{2} \times \frac{B_2^{\,2}}{\mu_o} \times A_g \times X = \frac{1}{2} \times B_2 \times H_2 \times A_g \times X$$

$$B_1 = \frac{\mu_o \times N \times I}{X} \quad \Rightarrow \quad H_1 = \frac{N \times I}{X} \qquad \Rightarrow \quad U_2 = \frac{1}{2} \times \left( B_1 \times \frac{A_{FE}}{A_g} \right) \times H_2 \times A_g \times X$$

$$\Rightarrow \quad U_2 = \frac{1}{2} \times \frac{B_1^{\,2}}{\mu_o} \times \left( \frac{A_{FE}}{A_g} \right)^2 \times A_g \times X \quad \Rightarrow$$

$$F_2 = -\frac{\partial U_2}{\partial X} = -\frac{1}{2} \times \frac{B_1^{\,2}}{\mu_o} \times \left( \frac{A_{FE}}{A_g} \right)^2 \times A_g$$

$$\Rightarrow \quad U_1 = \frac{1}{2} \times \frac{B_1^{\,2}}{\mu_o} \times A_{FE} \times X \quad \Rightarrow \quad F_1 = -\frac{\partial U_1}{\partial X} = -\frac{1}{2} \times \frac{B_1^{\,2}}{\mu_o} \times A_{FE}$$

$$\therefore \quad F_2 = F_1 \times \frac{A_{FE}}{A_g}$$

*Luego, aplicando la Ley de Ampere al circuito:*

$$N \times I = H_m \times \lambda_m + H_g \times X \quad ; \quad como\ \mu_{FE} = \mu_m >> \mu_o$$

$$Entonces: N \times I = H_g \times X$$

$$H_g = \frac{N \times I}{X} \quad ; \quad B_g = \mu_o \times H_g \quad \Rightarrow \quad B_g = \mu_o \times \frac{N \times I}{X} = B_m$$

$$\lambda = N \times \phi \quad \Rightarrow \quad \lambda = N \times \mu_o \times \frac{N \times I}{X} \times A = \frac{\mu_o \times N^2 \times I \times A}{X}$$

$$W_C{}' = \int \lambda . dI = \int \frac{\mu_o \times N^2 \times I \times A}{X} . dI = \frac{\mu_o \times N^2 \times I^2 \times A}{2X}$$

$$Pero: \quad W_C{}' = \frac{1}{2} \times L \times I^2 = \frac{\mu_o \times N^2 \times I^2 \times A}{2X} \quad \therefore L = \frac{\mu_o \times N^2 \times A}{X}$$

$$F_{mec} = -\frac{\partial W_C{}'}{\partial X} = \frac{\mu_o \times N^2 \times I^2 \times A}{2X^2}$$

*a)*

$$X = 10^{-3}\, m$$

$$N = 177 espiras \qquad I = \frac{40}{7{,}5} = 5{,}33A$$

$$\therefore \quad F = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 177^2 \times 5{,}33^2 \times (3 \times 10^{-2})^2}{2 \times 10^{-6}} = 503{,}2958N$$

*b)*

*Para una fuente de AC de 100V y 60 Hz*

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 177^2 \times (3\times 10^{-2})^2}{10^{-3}} = 35{,}4323mH$$

$$\Rightarrow \quad X_L = \omega \times L = 2\pi \times 60 \times 35{,}4323 \times 10^{-3} = 13{,}3576\Omega$$

$$\therefore \quad Z_L = \sqrt{R^2 + X_L{}^2} = \sqrt{7{,}5^2 + 13{,}3576^2} = 15{,}32\Omega$$

$$\therefore \quad I = \frac{100}{Z_L} = \frac{100}{15{,}32} = 6{,}5278A$$

$$\therefore F = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 177^2 \times (3\times 10^{-2})^2}{2\times 10^{-6}} \times (6{,}5278\sqrt{2} \times sen\theta)^2$$

$$F = 1509{,}8458 \times sen^2\theta$$

$$F_{PROM} = 1509{,}8458 \times \frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} sen^2\theta.d\theta = 754{,}923N$$

*c)*

$$A_g = (3\times 10^{-2} + 10^{-3})^2 = 0{,}000961\ m$$

$$\therefore \quad F_2 = F_1 \times \frac{A_{FE}}{A_g} = 503{,}2958 \times \frac{(3\times 10^{-2})^2}{0{,}000961} = 471{,}348N$$

***PROBLEMA N° 5.2.-*** *En el contactor que se muestra en la figura, el núcleo ferromagnético está conformado por 60 láminas, de espesor t=0,5mm. Cuando las secciones del núcleo son mantenidas juntas, el entrehierro es de 1mm, la bobina tiene 250 espiras, una resistencia de 7,5 Ohmios medida en DC. Asumir* $\mu_m >> \mu_o$.

*a) Si se alimenta la bobina con una tensión continua de 40V. Calcular la fuerza total que mantiene las dos secciones juntas.*

*b) Suponiendo que una fuente de corriente alterna de 100V eficaces a 60Hz, alimenta la bobina. Calcular la fuerza promedio que mantiene juntas las dos secciones. Considerar* $R_{AC} = R_{DC}$

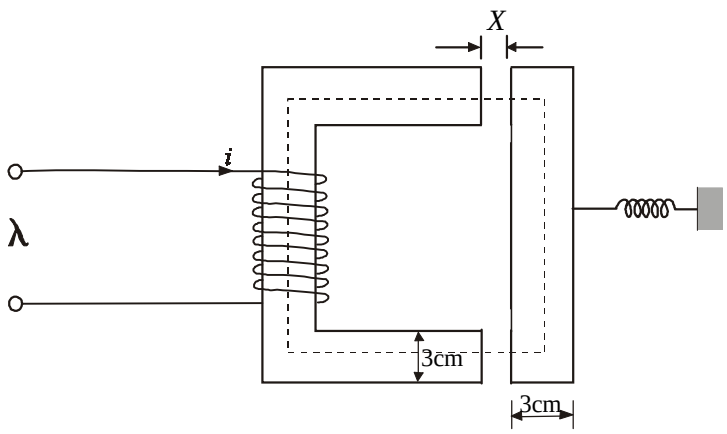



***Figura*** *P5.2.1*

*SOLUCIÓN:*

*Aplicando la ley de Ampere al circuito magnético:*

$$H_m \times \lambda_m + 2\lambda_g \times H_g = N \times i \qquad Como\ \mu_m >> \mu_o \quad \Rightarrow \quad H_m \times \lambda_m = 0$$

$$\therefore 2\lambda_g \times H_g = N \times i$$

$$\phi = A_m \times B_m = A_g \times B_g = A_g \times \mu_o \times H_g = \frac{A_g \times \mu_o \times N \times i}{2\lambda_g}$$

$$\lambda = N \times \phi = \frac{A_g \times \mu_o \times N^2 \times i}{2\lambda_g} = L \times i$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{A_g \times \mu_o \times N^2}{2(X+d)}$$

$$W_m'(i,X) = \int_0^i \lambda(i,X).di = \frac{A_g \times \mu_o \times N^2 \times i^2}{4(X+d)}$$

$$F_e = \frac{\partial W_m'(i,X)}{\partial X} \quad \Rightarrow \quad F_e = -\frac{A_g \times \mu_o \times N^2 \times i^2}{4(X+d)^2}$$

*Por condición del problema: X=0 (Las secciones están juntas)*

$$A_g = a \times n \times t = 3 \times 10^{-2} \times 60 \times 0{,}5 \times 10^{-3} = 9 \times 10^{-4}\, m^2$$

$$d = 10^{-3}\, m \qquad F_e = -\frac{\mu_o \times A_g \times N^2 \times i^2}{4d^2}$$

*a)*

*DC:*

$$i_{DC} = \frac{40}{7{,}5} = 5{,}333A$$

$$F_e = -\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 9 \times 10^{-4} \times 250^2 \times 5{,}333^2}{4 \times 10^{-6}} = -502{,}6\,N$$

*b)*

$$L = \frac{\mu_o \times A_g \times N^2}{2(X+d)} \quad si \quad X = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\mu_o \times A_g \times N^2}{2d}$$

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 9 \times 10^{-4} \times 250^2}{2 \times 10^{-3}} = 0{,}03534H$$

$$i = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{7{,}5^2 + (377 \times 0{,}03534)^2}} \times sen(377t - \varphi)$$

$$\varphi = arctan\left(\frac{377 \times 0{,}03534}{7{,}5}\right) = 60{,}62°$$

$$i = 6{,}541\sqrt{2} \times sen(377t - 60{,}62°)$$

$$F_e = -\frac{\mu_o \times A_g \times N^2 \times i^2}{4d^2}$$

$$F_{e\,PROM} = -\frac{\mu_o \times A_g \times N^2}{4d^2} \times \left(\frac{i_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 = -756{,}07\,N$$

***PROBLEMA N° 5.3.-*** *El electroimán de la figura es utilizado para levantar una barra de hierro. La rugosidad de la barra es tal que cuando el electroimán y la barra están en contacto existe un entrehierro mínimo de 0,15cm en cada brazo. Si la resistencia de la bobina es de 3,0 Ohmios. Calcular el mínimo voltaje DC que se deberá aplicar a la bobina para levantar la barra de hierro.*

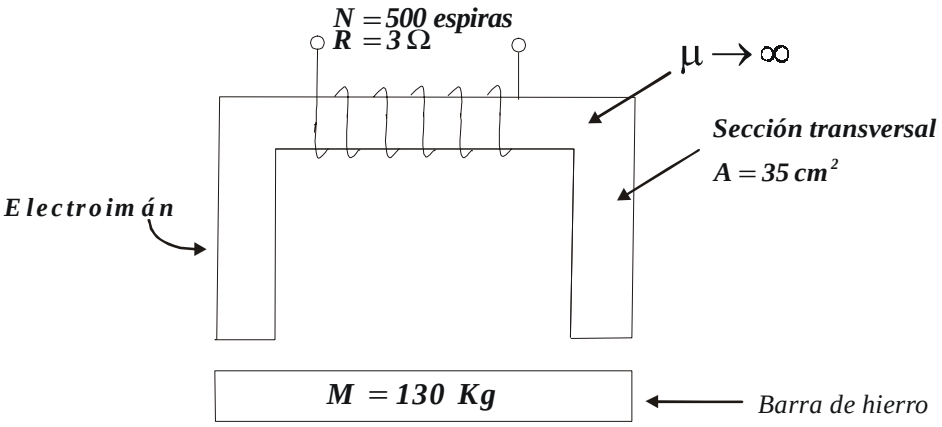



***Figura*** *P5.3.1*

*SOLUCIÓN:*

*Aplicando la Ley de Ampere para el circuito magnético de la figura:*

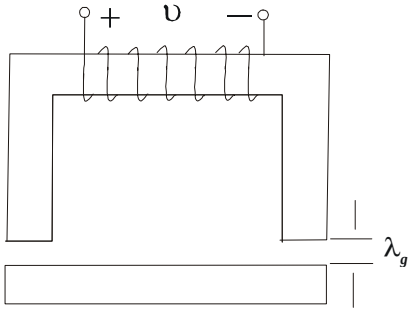



***Figura*** *P5.3.2*

$$\oint \vec{H}.d\vec{l} = N \times I$$

$$H_m \times \lambda_m + 2H_g \times \lambda_g = N \times I \;\Lambda\;\Lambda\;\Lambda\;\Lambda\;(\alpha)$$

$$H_m \times \lambda_m = \phi_m \times \Re_m$$

$$= \phi_m \times \frac{\lambda_m}{\mu_m \times A_m} \approx 0 \quad (\mu_m \to \infty)$$

*En (α):*

$$2H_g \times \lambda_g = N \times I = 2 \times \frac{B_g}{\mu_o} \times \lambda_g$$

$$\Re_g = \frac{2\lambda_g}{\mu_o \times A_g} \quad \textit{Se sabe que :} \quad L = \frac{N^2}{\Re} = \frac{N^2 \times \mu_o \times A_g}{2\lambda_g}$$

$$\lambda = L \times i = \frac{N^2 \times \mu_o \times A_g}{2\lambda_g} \times i \quad ; \quad \lambda_g = X$$

$$W_m' = \int_0^i \lambda(i, X).di = \frac{N^2 \times \mu_o \times A_g}{4X} \times i^2$$

$$F_e = -\frac{\partial W_m'}{\partial X} = \frac{N^2 \times \mu_o \times A_g}{4X^2} \times i^2$$

*La mínima fuerza para levantar la barra de hierro:*

$$F_e = M \times g$$

$$g = \text{en este caso es la gravedad}.$$

$$\Rightarrow \quad M \times g = \frac{N^2 \times \mu_o \times A_g}{4X^2} \times i^2$$

$$i = \sqrt{\frac{4M \times g \times X^2}{N^2 \times \mu_o \times A_g}} = \sqrt{\frac{4 \times 130 \times 9{,}8 \times (0{,}15 \times 10^{-2})^2}{500^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 35 \times 10^{-4}}} = 3{,}229A$$

$$V = R \times i$$

$$V = 3 \times 3{,}229 = 9{,}687 \text{voltios}$$

***PROBLEMA N° 5.4.-*** *La relación entre el flujo y la corriente de excitación de un núcleo ferromagnético está dada por la expresión:*

$\phi = 4{,}2 \times 10^{-3} \times i^{0{,}35}$ *; donde $\phi$ está en Wb e i está en amperes.*

*a) Encuentre las expresiones para la energía almacenada en el campo magnético del núcleo y para la coenergía en términos de la corriente de excitación.*

*b) Encuentre la inductancia de la bobina de excitación como una función de la corriente de excitación. la bobina de excitación tiene 1200 vueltas.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$\phi = K \times i^n \;\Lambda\;\Lambda\;\Lambda\;\Lambda\; (\alpha)$$

$$\text{sabemos que} \quad dW = N \times i \times d\phi \;\Lambda\;\Lambda\;\Lambda\;\Lambda\; (\beta)$$

$$\text{de } (\alpha): \frac{d\phi}{di} = K \times n \times i^{n-1} \qquad \Rightarrow \quad d\phi = K \times n \times i^{n-1} \times di \;\Lambda\;\Lambda\;\Lambda\;\Lambda\; (\gamma)$$

$$(\gamma) \text{ en } (\beta):$$

$$dW = N \times i \times K \times n \times i^{n-1} \times di = K \times N \times n \times i^n \times di$$

*Integrando ambos miembros :*

$$\int_0^{W_\phi} dW = \int_0^i K \times N \times n \times i^n \times di$$

$$\therefore W_\phi = \frac{K \times N \times n \times i^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{Sabemos que :} \quad dW_\phi{}' = \phi \times dF$$

$$\text{además :} \quad F = H \times \lambda = N \times i \quad \Rightarrow \quad dF = N \times di$$

$$\Rightarrow \quad dW_\phi{}' = \phi \times N \times di = K \times i^n \times N \times di$$

*Integrando ambos miembros :*

$$\int_0^{W_\phi'} dW_\phi{}' = \int_0^i N \times K \times i^n \times di$$

$$\therefore \quad W_\phi{}' = \frac{N \times K \times i^{n+1}}{n+1}$$

*b) Considerando linealidad de la curva B-H, podemos aplicar la siguiente expresión:*

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N \times \phi}{i} \quad \Rightarrow \quad L = N \times K \times i^{n-1}$$

*Reemplazando datos:*

$$n = 0{,}35 \qquad k = 4{,}2 \times 10^{-3}$$
$$N = 1200$$

$$W_\phi = 1{,}3067 \times i^{1{,}35} \text{ joules} \qquad W_\phi{}' = 3{,}733 \times i^{1{,}35} \text{ joules}$$

$$L = 5{,}04 \times i^{-0{,}65} H$$

***PROBLEMA N° 5.5.-*** *La figura muestra un solenoide, donde la sección transversal del núcleo es cuadrada.*

*a) Para* $I_{DC} = 1{,}2A$, *N=600 vueltas* $g_o = 3mm, a = 50mm, b = 4mm$.
*Determinar la magnitud de la fuerza en la armadura.*

*b) Suponiendo que la bobina tiene una resistencia R=10 Ohmios y excitada por unatensión* $\mathrm{v} = 100\sqrt{2} \times \mathrm{sen}377\mathrm{t}$, *para un desplazamiento* $g_o = 3mm$.
*Determinar la corriente en la bobina y la fuerza eléctrica promedio.*

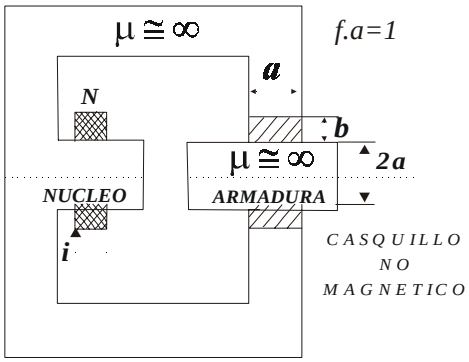



***Figura*** *P5.5.1*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

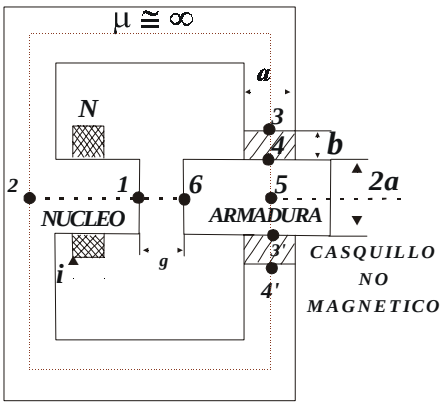



***Figura*** *P5.5.2*

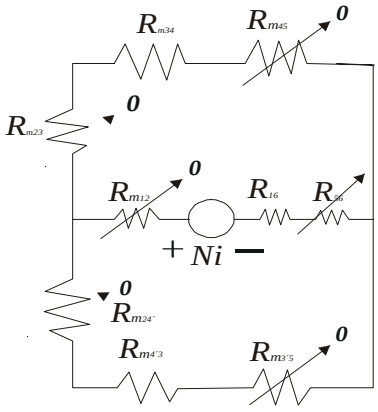



***Figura*** *P5.5.3*

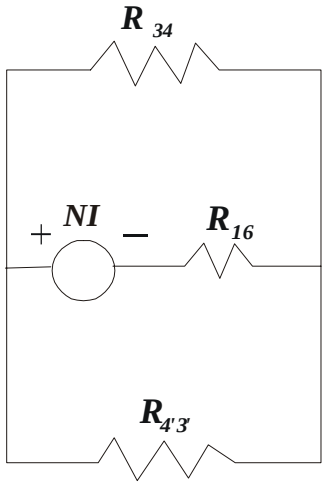



***Figura*** *P5.5.4*

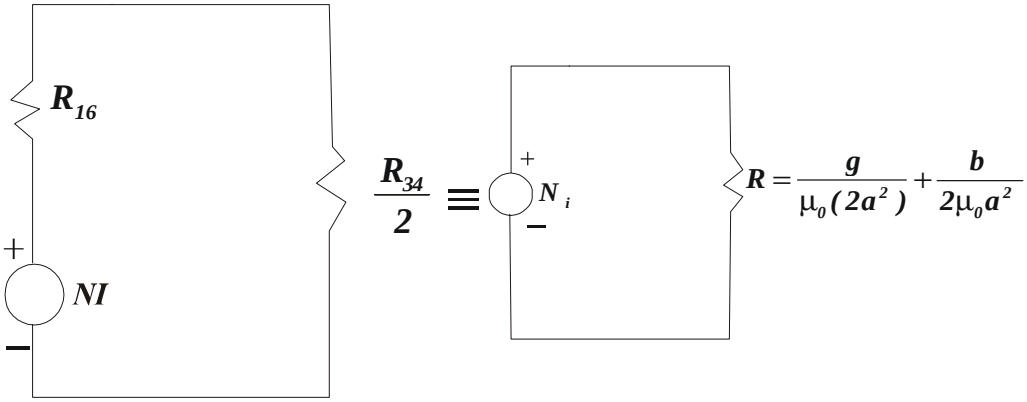



***Figura*** *P5.5.5*

$$\Re_{16} = \frac{g}{\mu_o \times A_{16}} \qquad \Re_{34} = \frac{b}{\mu_o \times A_{34}} \qquad \Re_{4'3'} = \frac{b}{\mu_o \times A_{4'3'}}$$

$$\Re = \frac{g}{2\times\mu_o\times a^2} + \frac{b}{2\times\mu_o\times a^2}$$

$$\Re_{eq} = \frac{g+b}{2\times\mu_o\times a^2} \qquad \textit{además :} \quad L = \frac{N^2}{\Re_{eq}} = \frac{N^2\times 2\times\mu_o\times a^2}{g+b}$$

$$\lambda = L\times i = \frac{N^2\times 2\times\mu_o\times a^2}{g+b}\times i$$

$$W_m' = \int_0^i \lambda(i,X).di = \frac{N^2\times\mu_o\times a^2\times i^2}{X+b}$$

$$F_e = \frac{\partial W_m'(i,X)}{\partial X} = -\frac{N^2\times\mu_o\times a^2\times i^2}{(X+b)^2} = -\frac{N^2\times\mu_o\times a^2\times I_{DC}{}^2}{(X+b)^2}$$

$$F_e = -\frac{600^2\times 4\pi\times 10^{-7}\times(50\times 10^{-3})^2\times 1{,}2^2}{(7\times 10^{-3})^2} = -33{,}23677\,N$$

$$|F_e| = 33{,}23677\,N$$

*b)*

$$L = \frac{2\times\mu_o\times a^2\times N^2}{g+b} = \frac{2\times 4\pi\times 10^{-7}\times(50\times 10^{-3})^2\times 600^2}{7\times 10^{-3}} = 0{,}3231\,H$$

$$i = \frac{V}{\sqrt{R^2+(\omega\times L)^2}}\times sen(377\,t-\varphi)$$

$$\varphi = arctan\left(\frac{377\,L}{R}\right) = 85{,}307°$$

$$i = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{100+(377\times 0{,}3231)^2}}\times sen(377\,t-\varphi)$$

$$\therefore\quad i = 0{,}8182\sqrt{2}\times sen(377\,t-85{,}307°)$$

$$\lambda = L\times i = \frac{2\times\mu_o\times a^2\times N^2}{g+b}\times i$$

$$W_m{}' = \int_0^i \lambda(i,X).di = \frac{\mu_o\times a^2\times N^2\times i^2}{X+b}$$

$$F_e = \frac{\partial W_m{}'(i,X)}{\partial X} = -\frac{\mu_o\times a^2\times N^2\times i^2}{(X+b)^2}$$

$$\left|F_{e\,PROM}\right| = \frac{\mu_o\times a^2\times N^2}{(X+b)^2}\times\frac{i_{max}{}^2}{2} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\times(50\times 10^{-3})^2\times 600^2}{(7\times 10^{-3})^2}\times 0{,}8182^2$$

$$\left|F_{e\,PROM}\right| = 15{,}452\,N$$

***PROBLEMA N° 5.6 :*** *El solenoide de la figura tiene una sección transversal de* $9cm^2$. *Cuando el solenoide está cerrado, la longitud del entrehierro es 1mm. Si el número de espiras es de 177vueltas que presentan una resistencia de 7,5Ω y la permeabilidad del núcleo es mucho mayor que la del entrehierro y despreciando el efecto de bordes.*

*a) Determinar la fuerza que mantiene cerrado al solenoide, cuando la fuente de alimentación es de 40V DC.*

*b) Determine la fuerza promedio que lo mantiene cerrado cuando la fuente es de 100V eficaces y a frecuencia de 60Hz.*

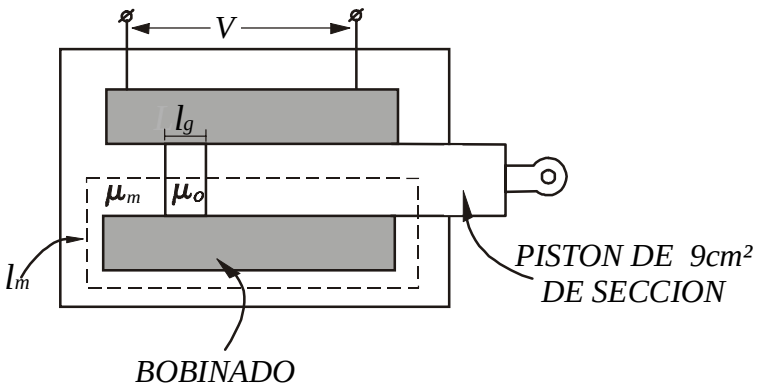



***Figura*** *P5.6.1*

*SOLUCIÓN :*

*a)*

$$\oint \vec{H}.d\vec{l} = N \times I \quad \Rightarrow \quad H_m \times \lambda_m + H_g \times \lambda_g = N \times I$$

$$\phi_m \times \Re_m + H_g \times \lambda_g = N \times I \quad pero \quad \Re_m \to 0\,(\mu_m >> \mu_o)$$

$$H_g \times \lambda_g = N \times I \quad \Rightarrow \quad B_g = \frac{\mu_o \times N \times I}{\lambda_g}$$

$$\lambda = N \times \phi = N \times B_g \times A = \frac{\mu_o \times N^2 \times I \times A}{\lambda_g} \quad ; \quad \lambda = L \times I \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\mu_o \times N^2 \times A}{\lambda_g}$$

$$W_m{}' = \int \lambda \times di = \int \frac{\mu_o \times N^2 \times i \times A}{\lambda_g}.di = \frac{\mu_o \times N^2 \times I^2 \times A}{2 \times \lambda_g} \qquad I = i_{DC} = \frac{40}{7{,}5} = 5{,}33A$$

$$F_m = -\frac{\partial W_m{}'}{\partial \lambda_g} = \frac{\mu_o \times N^2 \times I^2 \times A}{2 \times \lambda_g{}^2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 177^2 \times 5{,}33^2 \times 9 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} = 503{,}296N$$

*b) Hallando L:*

$$L = \frac{\mu_o \times N^2 \times A}{\lambda_g} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 177^2 \times 9 \times 10^{-4}}{10^{-3}} = 35{,}432mH$$

$$X_L = \omega \times L = 2\pi \times 60 \times 35{,}432 \times 10^{-3} = 13{,}358\Omega \qquad Z = \sqrt{X_L{}^2 + R^2} = 15{,}319\Omega$$

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{100}{15{,}319} = 6{,}5278A$$

$$F_m = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 177^2 \times 9 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-6}} \times (6{,}5278\sqrt{2} \times sen\omega t)^2 = 1509{,}846 \times sen^2\omega t$$

$$\Rightarrow \quad F_{m\,PROM} = 1509{,}846 \times \frac{1}{\pi} \times \int_0^{\pi} sen^2\alpha.d\alpha = 754{,}923N$$

***PROBLEMA N° 5.7 :*** *El rotor mostrado en la figura es de material no magnético y lleva dos bobinas colocadas en cuadratura. Si el rotor está colocado dentro de un campomagnético uniforme* $B_o$ *y las bobinas a y b son recorridas por las corrientes* $I_a$ *e* $I_b$ *respectivamente. Asumiendo que el rotor tiene una longitud* $\lambda = 0{,}35m$ *y radio* $R = 0{,}15m$ *y* $B_o = 0{,}8T$*. Encuentre la expresión del torque como una función de la posición* $\alpha$ *y haga un gráfico para :*

*a)* $I_a = 0\,;\, I_b = 5A$

b) $I_a = 5A\,;\, I_b = 0$

c) $I_a = 5A\,;\, I_b = 5A$

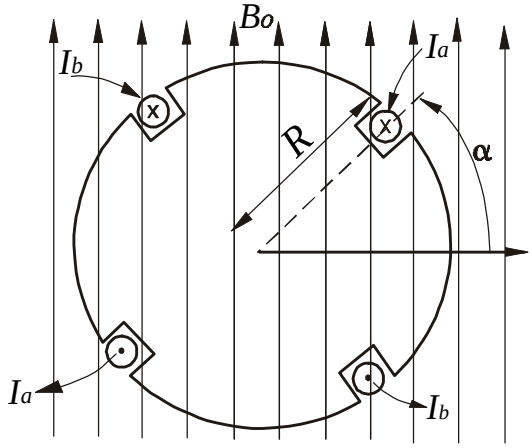



***Figura*** *P5.7.1*

*SOLUCIÓN:*

$$\lambda_{aa} = L_{aa} \times i_a + \lambda_o \times cos\,\alpha$$
$$\lambda_{bb} = L_{bb} \times i_b + \lambda_o \times sen\alpha$$
$$\lambda_o = B_o \times A_{espira} = B_o \times (2 \times R \times \lambda)$$
$$\lambda_{aa} = L_{aa} \times i_a + 2 \times B_o \times R \times \lambda \times \cos\alpha$$
$$\lambda_{bb} = L_{bb} \times i_b + 2 \times B_o \times R \times \lambda \times sen\alpha$$
$$W_m{}' = \int_0^{i_a} (L_{aa} \times i_a + \lambda_o \times \cos\alpha) \times di_a + \int_0^{i_b} (L_{bb} \times i_b + \lambda_o \times sen\alpha) \times di_b$$

$$W_m{}' = \frac{L_{aa} \times i_a{}^2}{2} + \frac{L_{bb} \times i_b{}^2}{2} + \lambda_o \times \cos\alpha \times i_a + \lambda_o \times sen\alpha \times i_b$$
$$T_e = -\frac{\partial W_m{}'}{\partial \alpha} = \lambda_o \times sen\alpha \times i_a - \lambda_o \times \cos\alpha \times i_b = \lambda_o \times (sen\alpha \times i_a - \cos\alpha \times i_b)$$

*a)*

$$I_a = 0\,;\, I_b = 5A$$
$$T_e = -2R \times \lambda \times B_o \times I_b \times \cos\alpha$$

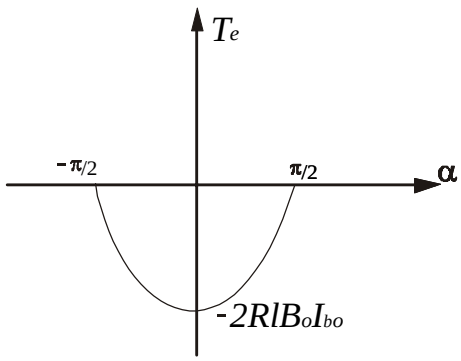



***Figura*** *P5.7.2*

*b)*

$I_a = 5A\,;\, I_b = 0$

$T_e = 2R \times \lambda \times B_o \times I_a \times sen\alpha$

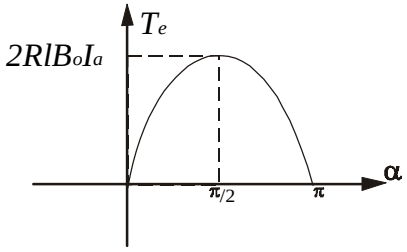



***Figura*** *P5.7.3*

*c)*

$I_a = I_b = 5A = I_o$

$T_e = 2R \times \lambda \times B_o \times I_o \times (sen\alpha - \cos\alpha) = 2\sqrt{2} \times R \times \lambda \times B_o \times I_o \times sen(\alpha - 45°)$

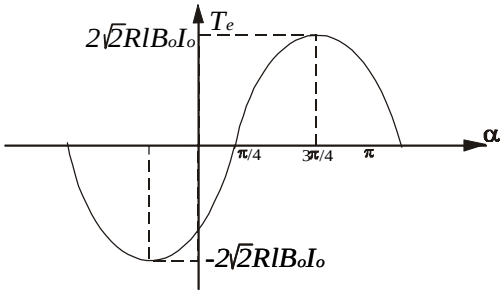



***Figura*** *P5.7.4*

***PROBLEMA N° 5.8 :*** *Un relé magnético como se muestra, está formado por planchas de fierro apiladas, presentando una altura efectiva de ¼ pulgada. Cada bobina tiene 1054 espiras y una resistencia de 500 ohm; el resorte es de masa despreciable y constante K = 8000 Kg/m, no ejerce fuerza cuando X = 0,275mm. Se supone* $\mu_{fierro} = \infty$ *y no existe efecto de bordes. Si la longitud del entrehierro es de 0,0254 mm debido a imperfecciones en las caras de los polos y superficie de la armadura.*

*a) Obtener las expresiones de flujo concatenado, la inductancia y la fuerza de origen eléctrico.*

*b) Las ecuaciones diferenciales de equilibrio.*

*c) Calcular la longitud del entrehierro en estado estable para* $v(t) = E_0 = 20V$

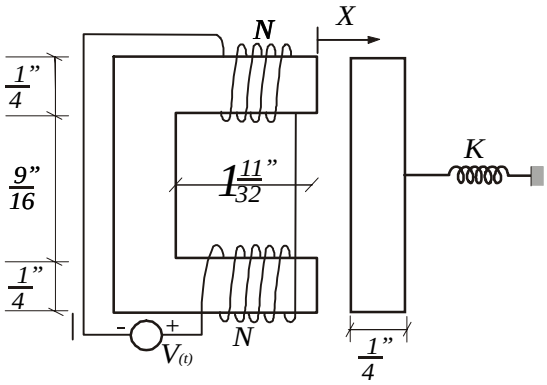



***Figura*** *P5.8.1*

*SOLUCIÓN:*

*Planteando la ecuación para el circuito magnético:*

$$2N \times i = 2H_m \times \lambda_m + 2H_g \times X = 2\frac{Bm}{\mu} \times \lambda_m + 2H_g \times X$$

$$\mu \to \infty \quad \therefore 2N \times i = 2H_g \times X \qquad \Rightarrow H_g = H = \frac{N \times i}{X} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \times N \times i}{X}$$

*a)*

$$\phi = B \times A = \frac{\mu_0 \times N \times i \times A}{X} \quad \lambda = 2N \times \phi = \frac{2\mu_o \times N^2 \times i \times A}{X}$$

$$L \times i = \lambda \qquad \Rightarrow L = \frac{2\mu_0 \times N^2 \times A}{X}$$

$$W_C{}' = \int \lambda . di = \int_0^i \frac{2\mu_0 \times N^2 \times A \times i}{X} \times di = \frac{\mu_0 \times N^2 \times A \times i^2}{X}$$

$$\Rightarrow \quad f_{mec} = \frac{\partial W_C{}'}{\partial X} : \textit{Fuerza mecánica de origen eléctrico.}$$

$$\therefore \qquad f_{mec} = -\frac{\mu_0 \times N^2 \times A \times i^2}{X^2}$$

*Ahora :*

$$L = \frac{2\mu_0 \times N^2 \times A}{X} = \frac{2\mu_0 \times N^2 \times A}{X_1 + X_0} = \frac{2\mu_0 \times N^2 \times A}{X_0} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{X_1}{X_0}\right)} \quad ; \quad X_1 << X_0$$

$$\therefore \quad L = L_0 \times \left(1 - \frac{X_1}{X_0}\right) \quad ; \quad L_0 = \frac{2\mu_0 \times N^2 \times A}{X_0}$$

*b) Ecuación de movimiento:*

$$T = \frac{1}{2} \times L(X) \times i^2 + \frac{1}{2} \times M \times \dot{X}^2$$

$$V = \frac{1}{2} \times K \times X^2$$

$$D = \frac{1}{2} \times R \times i^2$$

*Ecuación De Lagrange :*

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial T}{\partial q_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} + \frac{\partial D}{\partial \times \dot{q}_n} = Q_n \qquad ; \quad \dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{X}}\left(\frac{1}{2}\times L(X)\times i^2+\frac{1}{2}\times M\times \dot{X}^2\right)\right)-\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{2}\times L(X)\times i^2+\frac{1}{2}M\times \dot{X}^2\right)+\Lambda$$

$$\Lambda\,\Lambda\;+\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{2}\times K\times X^2\right)+\frac{\partial}{\partial \dot{X}}\left(\frac{1}{2}\times R\times i^2\right)=f(t)\quad;\quad \dot{X}=\frac{dX}{dt}$$

$$M\times\frac{d^2X}{dt^2}-\frac{1}{2}\times\frac{dL}{dX}\times i^2+K\times X=f(t)$$

$$\frac{d}{dt}(L(X)\times i)+R\times i=v(t)\quad\Rightarrow\quad v(t)=L\times\frac{di}{dt}+R\times i+i\times\frac{dL}{dX}\times\frac{dX}{dt}$$

$$f(t)=M\times\frac{d^2X}{dt^2}-\frac{1}{2}\times i^2\times\frac{dL(X)}{dX}+K\times(X-d)$$

$$\frac{dL}{dX}=-\frac{2\mu_0\times N^2\times A}{X^2}\qquad\Rightarrow\quad v(t)=$$

$$\frac{2\mu_0\times N^2\times A}{X}\times\frac{di}{dt}+R\times i-2\times i\times\frac{\mu_0\times N^2\times A}{X^2}\times\frac{dX}{dt}\quad\Lambda\,\Lambda\;(1)$$

$$f(t)=M\times\frac{d^2X}{dt^2}+K\times(X-d)+\frac{i^2\times\mu_0\times N^2\times A}{X^2}\quad\Lambda\,\Lambda\;(2)$$

*c) En estado estable : (De las ecuaciones anteriores)*

$$v(t_o)\quad\Rightarrow E_0=R\times I_0$$

$$f(t_o)\quad\Rightarrow F_0=K\times(X-d)+I_0^{\,2}\times\left(\frac{\mu_0\times N^2\times A}{X_0^{\,2}}\right)$$

$$Si: R_{BOB.}=500\Omega\quad y\quad E_0=\frac{20V}{2}\Rightarrow I_0=\frac{E_0}{R}=\frac{10}{500}=2\times10^{-2}A$$

$$Si: F_0=0\quad\Rightarrow\quad K\times(d-X_0)=I_0^{\,2}\times\frac{\mu_0\times N^2\times A}{X_0^{\,2}}$$

$$En\,(2)\quad:\quad K\times(X_0-d)+i^2\times\frac{\mu_0\times N^2\times A}{X_0^{\,2}}=0\qquad d=0{,}275\times10^{-3}m$$

$$\Rightarrow 8000\times\left(X_0-0{,}275\times10^{-3}\right)+\left(2\times10^{-2}\right)^2\times\left(\frac{\mu_0\times1054^2\times4{,}032\times10^{-5}}{X_0^{\,2}}\right)=0$$

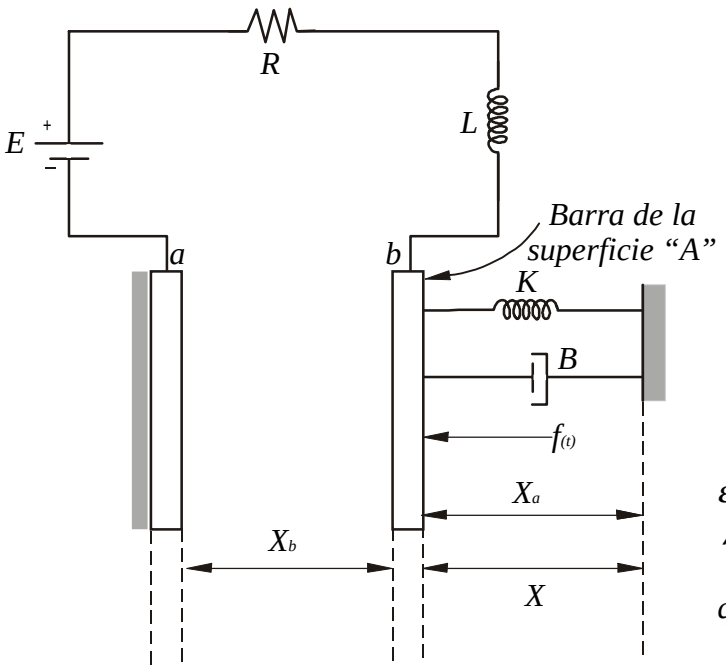
$$Donde:\quad A=\frac{1}{4}^{''}\times\frac{1}{4}^{''}=\left(\frac{1}{4}\times\frac{2{,}54}{100}\right)^2=4{,}032\times10^{-5}m^2$$

$$\Rightarrow\quad X_{01}=2{,}13\times10^{-4}m\,(estable)$$

$$\Rightarrow\quad X_{02}=1{,}5\times10^{-4}m\,(inestable)$$

$$\therefore X_0=2{,}13\times10^{-4}m$$

***PROBLEMA N° 5.9 :*** *En el sistema electromecánico de la figura mostrada se representa el modelo de un micrófono capacitivo, en este sistema el movimiento es convertido en energía eléctrica.*
*Si en equilibrio con E aplicado y f(t)=0 (fuerza externa ) la carga depositada en el condensador es igual a $q_o$ obliga al resorte a deformarse una cantidad $X_a$ y establece una separación $X_b$ entre las placas. Si las ondas de sonido chocan con la placa b, ejercerán una fuerza que producirá un desplazamiento $X_1$ que será medido desde el punto de equilibrio, así, la distancia entre las placas será entonces $X_b - X_1$ , la deformación de resorte será $X_a + X_1$ y la carga almacenada será $q_0+q_1$ (incrementos).*
*a) Obtener las ecuaciones dinámicas del sistema.*
*b) Linealizar las ecuaciones alrededor del punto de equilibrio.*




$$C = \varepsilon_o \times \frac{A}{X}$$

$$C = \frac{q}{\dot{\lambda}}$$

$\varepsilon_o$: *Constante dieléctrica*
$\dot{\lambda}$: *Diferencia de Potencial*
$q$: *Carga eléctrica*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$y' = T' + W_m'$$

$$y' = \frac{M \times \dot{X}^2}{2} + \frac{L \times \dot{q}^2}{2}$$

$$U = V + W_C$$

$$U = \frac{K \times X^2}{2} + \frac{X \times q^2}{2 \times \varepsilon \times A}$$

$$\wp = y' - U$$

$$F = \frac{R \times \dot{q}^2}{2} + \frac{B \times \dot{X}^2}{2}$$

$$\wp = \frac{M \times \dot{X}^2}{2} + \frac{L \times \dot{q}^2}{2} - \frac{K \times X^2}{2} - \frac{X \times q^2}{2 \times \varepsilon \times A}$$

*Ecuación Mecánica:*

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \wp}{\partial \dot{X}}\right]-\frac{\partial \wp}{\partial X}+\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}=f(t)$$

$$M\times\ddot{X}+B\times\dot{X}+K\times X-\frac{q^2}{2\times\varepsilon\times A}=f(t)$$

*Ecuación Eléctrica:*

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \wp}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial \wp}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}=E$$

$$L\times\ddot{q}+R\times\dot{q}+\frac{X\times q}{\varepsilon\times A}=E$$

*b)*

$$X=X_a+X_1 \quad ; \quad f=f_o+f_1 \quad ; \quad q=q_0+q_1$$

$$M\times\frac{d^2}{dt^2}(X_a+X_1)+B\times\frac{d}{dt}(X_a+X_1)+K\times(X_a+X_1)-\frac{(q_o+q_1)^2}{2\times\varepsilon_o\times A}=f_o+f_1$$

$$L\times\frac{d^2}{dt^2}(q_o+q_1)+R\times\frac{d}{dt}(q_o+q_1)+\frac{(q_o+q_1)}{\varepsilon\times A}\times(X_b-X_1)=E_o$$

*En estado estacionario:* $E_o=\frac{q_o}{C_o} \quad ; \quad K\times X_1=\frac{q_o^{\,2}}{2\times\varepsilon_o\times A}$

$$M\times\ddot{X}_1+B\times\dot{X}_1+K\times X_1-\frac{q_o}{\varepsilon\times A}\times q_1=f_1$$

$$L\times\ddot{q}_1+R\times\dot{q}_1+\frac{q_1}{C_o}-\frac{q_o}{\varepsilon\times A}\times X_1=0$$

***PROBLEMA N° 5.10 :*** *El pistón de un solenoide está conectado a un resorte cuya fuerza está dada por F= -$K_o$(X-2a), donde X es la longitud del entrehierro. La inductancia del solenoide es de la forma L= $L_o$(a-X) y de resistencia R. Si el solenoide se conecta a una fuente de 5V D.C.*

*a) Escriba las ecuaciones dinámicas del sistema.*
*b) Si $L_o$ =0,5mH/cm, a=2cm, R=1ohm, $K_o$=0,25N/cm. Encuentre la posición de equilibrio $X_o$ asumiendo que* $0\le X_o\le a$.
*c) Linealizar las ecuaciones encontradas en a) alrededor del punto de equilibrio.*
*d) Si la bobina es alimentada con una fuente de corriente constante de 5A como se afectan las ecuaciones encontradas en c).*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$y' = T' + W_m'$ ; *Función coenergía total.*

$$y' = \frac{1}{2} \times M \times \dot{X}^2 + W_m'$$

$$L = L_o \times (a - X)$$

$$\lambda = L \times i = L_o \times (a - X) \times i$$

$$W_m' = \int_0^i \lambda(i, X).di = \frac{L_o \times (a - X) \times i^2}{2}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{1}{2} \times M \times \dot{X}^2 + \frac{L_o \times (a - X) \times i^2}{2}$$

$$f_e = -\frac{\partial W_m'}{\partial X} = \frac{L_o \times i^2}{2}$$

$$U = V + W_C \quad ; \quad W_C = 0$$

$$U = \frac{1}{2} \times K \times X^2 \quad ; \quad F = \frac{1}{2} \times R \times i^2$$

$$\wp = y' - U$$

$$\wp = \frac{1}{2} \times M \times \dot{X}^2 + \frac{L_o \times (a - X) \times \dot{q}^2}{2} - \frac{1}{2} \times K \times X^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \wp}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \wp}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = e(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(L_o \times (a - X) \times \dot{q}\right) + R \times \dot{q} = V_o$$

$$L_o \times (a - X) \times \ddot{q} - L_o \times \dot{X} \times \dot{q} + R \times \dot{q} = V_o$$

$$\therefore \quad L_o \times (a - X) \times \frac{di}{dt} - L_o \times i \times \frac{dX}{dt} + R \times i = V_o \quad \textit{Ecuación Eléctrica} \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \wp}{\partial \dot{X}}\right) - \frac{\partial \wp}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = f(t)$$

$$\frac{d}{dt}(M \times \dot{X}) - \left(-\frac{L_o \times \dot{q}^2}{2} - K \times X\right) + 0 = f(t)$$

$$M \times \ddot{X} + \frac{L_o \times \dot{q}^2}{2} + K \times X = f(t)$$

$$\therefore \quad M \times \ddot{X} + \frac{L_o \times i^2}{2} + K_o \times (X - 2a) = f(t) \quad \textit{Ecuación Mecánica} \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ (2)$$

*b)*

$X_o = ?$ *en la posición de equilibrio.*

$$de\,(1)\quad V_o = R\times I_o \quad\Rightarrow\quad I_o = \frac{V_o}{R} = \frac{5}{1} = 5A$$

$$de\,(2)\quad \frac{L_o\times i^2}{2} + K_o\times(X_o - 2a) = 0$$

$$X_o = 2a - \frac{L_o\times I_o^{\ 2}}{2\times K_o} = 0{,}015m$$

$$\therefore\quad X_o = 1{,}5cm$$

*Linealizando las ecuaciones:*

$$X = X_o + X_1$$

$$i = I_o + i_1$$

$$M\times\frac{d^2}{dt^2}(X_o + X_1) + \frac{L_o}{2}(I_o + i_1)^2 + K_o\times(X_o + X_1 - 2a) = 0$$

$$M\times\frac{d^2X_1}{dt^2} + \frac{L_o\times I_o^{\ 2}}{2} + L_o\times I_o\times i_1 + \frac{L_o\times i_1^{\ 2}}{2} + K_o\times(X_o - 2a) + K_o\times X_1 = 0$$

$$\Rightarrow\quad M\times\frac{d^2X_1}{dt^2} + K_o\times(-X_o + 2a) + L_o\times I_o\times i_1 + \frac{L_o\times i_1^{\ 2}}{2}\text{K K K}$$

$$\text{K K K} + K_o\times(X_o - 2a) + K_o\times X_1 = 0$$

$$donde\ \frac{L_o\times i_1^{\ 2}}{2} = 0$$

$$\therefore\quad M\times\frac{d^2X_1}{dt^2} = -L_o\times I_o\times i_1 - K_o\times X_1$$

$$R\times I_o + R\times i_1 = V_o$$

*d) Fuente de corriente constante:*

$$i = I_o + i_1 = cte.\quad\Rightarrow\quad i_1 = 0\quad;\quad \frac{di}{dt} = 0$$

*En la ecuación mecánica linealizada:*

$$M\times\ddot{X}_1 + K_o\times X_1 = 0$$

*En la ecuación eléctrica:*

$$-L_o\times I_o\times\dot{X}_1 + R\times I_o = V_o$$

# *CAPÍTULO VI*
# *MÁQUINA DE CORRIENTE CONTINUA*

## *6.1 ASPECTOS CONSTRUCTIVOS DE LA MÁQUINA DE CORRIENTE CONTINUA*

*Las principales partes que conforman la máquina de corriente continua son las siguientes:*

***I) EL ESTATOR:***

*a) Los polos: los cuales están hechos de acero silicio laminado.*

*b) Las bobinas de campo: Las bobinas están arrolladas sobre los polos.*

*b.1) Bobina shunt: compuestas de muchas espiras de alambre delgado.*
*b.2) bobina serie: compuestas de pocas espiras de alambre grueso.*

*c) Los Interpolos: Están hechos de láminas de acero silicio y llevan un arrollamiento de alambre grueso.*

*d) Los arrollamientos de Compensación: Están conformados por los conductores que se colocan en los polos con el objeto de neutralizar la reacción de armadura.*
*Solamente los llevan las máquinas de gran potencia ya que su costo es bastante elevado.*

*e) El Yugo: El yugo del estator es necesario para cerrar el circuito magnético de la máquina.*

*f) Las Escobillas y las Portaescobillas:Toda máquina de corriente continua requiere de por lo menos dos escobillas. Están hechas de carbón ó de cobre grafito y van alojadas en las portaescobillas que están sujetas a un anillo que va entornillado al yugo. Un resorte presiona firmemente las escobillas sobre el conmutador para obtener un buen contacto eléctrico.*

***II) EL ROTOR:***

***a) El Núcleo de la Armadura:*** *Está constituído por láminas de acero silicio de sección circular. La circunsferencia es ranurada para que puedan alojarse los conductores del arrollamiento de armadura.*

***b) El Conmutador:*** *Está hecho por un gran número de segmentos de cobre ó delgas, aislados entre sí.*

***c) El Arrollamiento de Armadura:*** *Existen dos tipos de arrollamiento de armadura: el imbricado y el ondulado.*

## *6.2 PRINCIPIOS DE FUNCIONAMIENTO DE LA MÁQUINA DE CORRIENTE CONTINUA*

*La máquina de corriente continua se utiliza para generar una tensión constante cuando funciona como generador y para producir par mecánico (torque) cuando funciona como motor.*

*El principio de funcionamiento como generador se basa en la Ley general de la inducción electromagnética. La máquina tiene básicamente dos arrollamientos, uno ubicado en el estator cuya función es crear un campo magnético por lo que se le denomina inductor. El otro arrollamiento está ubicado en el rotor y se denomina inducido ó armadura.*

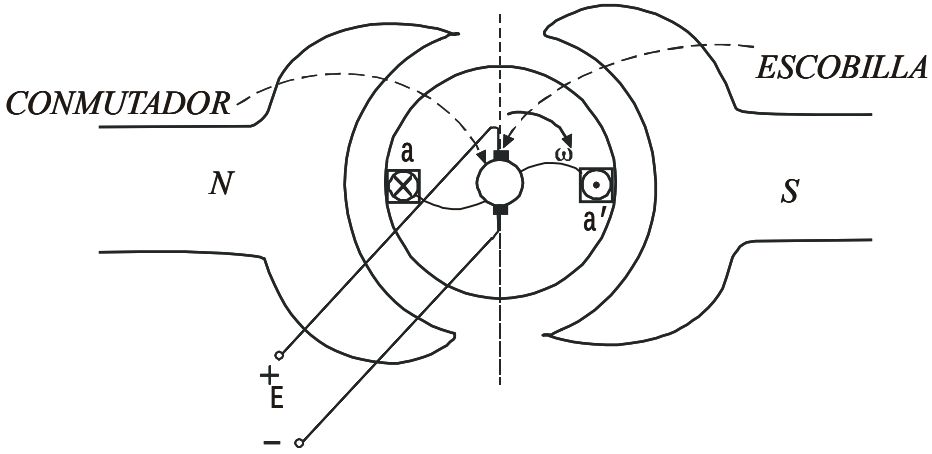



***Figura*** *6.2.1*

*En la figura 6.2.1 puede verse una máquina de C.C. elemental en el que el inducido está representado por los dos conductores **a** y **a'** que conforman la espira **aa'** los terminales de la espira van conectados al conmutador que en este caso muy simple está conformado solamente por dos segmentos ó delgas de cobre aislados entre sí. El conmutador gira junto con el rotor por lo que la conexión al circuito exterior se realiza a través de las escobillas.*

*Cuando el rotor gira sus conductores cortan las líneas de fuerza producidas por el inductor y se engendra en ellos una **f.e.m.** .Esta **f.e.m.** es rectificada por el conmutador apareciendo en los bornes de la máquina una tensión E prácticamente constante.*

*El campo magnético es producido por la corriente continua de excitación que recorre las bobinas de campo de los polos del estator. Siendo el entre hierro constante, la distribución espacial de la densidad de flujo **Be** en el entrehierro es prácticamente uniforme.*

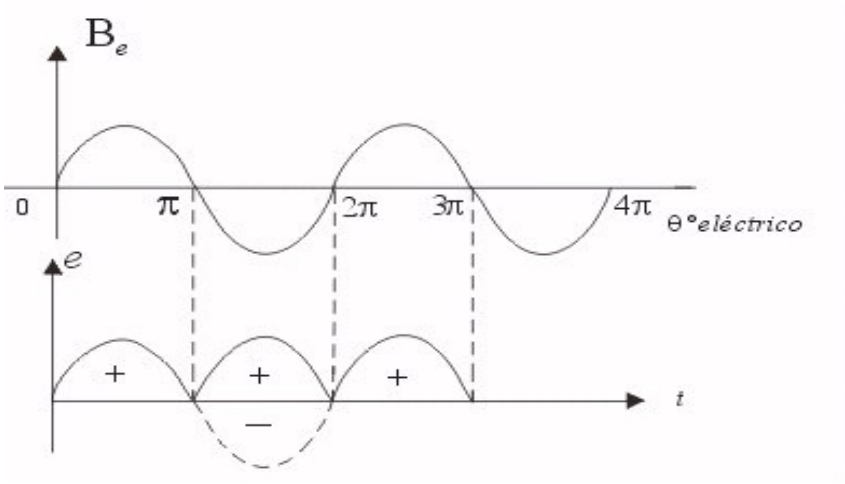



***Figura*** *6.2.2*

*La densidad de flujo* $\boldsymbol{B_e}$ *en el entrehierro es radial y su valor puede determinarse aproximadamente con la siguiente expresión:*

$$B_e = \frac{P\phi_d}{2\pi rL} \quad ..... (6-1)$$

$\phi_d$ *..... flujo producido por un polo.*
*r ..... radio del rotor.*
*L ..... longitud útil del rotor.*
*P ..... # de polos.*

*Cuando el rotor del generador indicado gira con una velocidad "*$\boldsymbol{\omega}$*" en cada uno de los conductores se genera una* ***f.e.m****.:*

$$E_C = B_e LV \quad .....(6-2)$$

$$V = \omega r \quad ..... (6-3)$$

*Luego:*

$$E_c = \frac{P\phi_d\omega}{2\pi} \quad ..... (6-4)$$

*Si consideramos el total de circuitos en paralelo* ***(a)*** *y si el rotor tiene* ***Z*** *conductores, entonces el número de conductores en serie es:*

$$Z_S = \frac{Z}{a} \quad .....(6-5)$$

*Luego la tensión entre las escobillas de la máquina será :*

$$E = Z_S E_C = \frac{PZ}{2\pi a}\phi_d\omega \quad ..... (6-6)$$

*Finalmente haciendo:*

$$K_a = \frac{PZ}{2\pi a} \quad ..... \quad (6-7)$$

*Obtenemos:*

$$E = K_a \phi_d \omega \quad ..... \quad (6-8)$$

*Debido al conmutador la semionda negativa es rectificada y transformada en positiva.*

*La forma como funciona el conmutador puede entenderse observando el generador elemental.*

*Por tratarse de un generador elemental el conmutador es muy simple y consta de dos segmentos de cobre a los que se conectan los terminales de la espira formada por los 2 conductores. Estos segmentos giran con el rotor.*

*Para comprender el funcionamiento del conmutador hay que tener presente que la polaridad de la **f.e.m.** generada depende de la dirección del campo magnético.*

*Por consiguiente cuando un conductor pasa de una posición **A** frente a un polo a otra posición **B** frente al otro polo, cambia la polaridad y por lo tanto debe también invertirse simultáneamente su conexión a las escobillas. Esto lo realiza el conmutador cada vez que el conductor pasa por el plano neutro que separa los polos **N** y **S**.*

*Es importante observar que en el instante que los conductores **a** y **a'** se encuentran en el plano neutro, las escobillas cortocircuitan los segmentos del conmutador y ponen en cortocircuito la espira. Esto es posible por el hecho de que en esa posición la **f.e.m.** inducida en la bobina es prácticamente nula por no existir flujo perpendicular al movimiento.*

## *6.3 CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO POR EL ROTOR Y REACCIÓN DE ARMADURA*

*El rotor lleva un arrollamiento del tipo distribuído tal como se aprecia en la figura mostrada. Los conductores están alojados en las ranuras que existen en el rotor. En total se tienen **Zc** conductores.*

*Cuando la máquina funciona bajo carga los conductores son recorridos por una corriente $\boldsymbol{I_c}$ cuya dirección está indicada en la Figura. El conmutador mantiene siempre las direcciones indicadas a pesar del movimiento por lo que el campo magnético del rotor resulta estacionario. En la Figura se dibuja la máquina en forma longitudinal. Se construye entonces la onda de f.m.m. ($\boldsymbol{F_a}$) que resulta ser de forma triangular con su vértice ó eje magnético ubicado entre los polos **N** y **S**, es decir a 90° eléctricos del campo del estator y es por ésta razón que se le denomina campo transversal.*

*La onda de f.m.m. se construye sumando los* $\mathbf{2Z_cI_c}$ *amper - espiras de los conductores ubicados en las ranuras 1 y 12 , 2 y 11, 3 y 10, etc. Por consiguiente la amplitud de la onda resulta ser:*

$$F_{máx} = 6 Z_c I_c \quad ..... \quad (6-9)$$

***Ia = aIc****, es la corriente total que ingresa al rotor, es decir la corriente de armadura.*

*Esta* ***f.m.m.*** *produce un flujo magnético que debido a la saliencia del estator tiene una densidad* $\mathbf{B_a}$ *que varía tal como se aprecia en la figura ( parte c); éste flujo viene a ser lo que comúnmente se denomina la reacción de armadura.*

*El flujo de armadura atraviesa el entrehierro y se combina con el flujo producido por el estator, ambos flujos tienen la misma dirección en la mitad de cada cara polar y dirección contraria en la otra mitad por lo que la densidad de flujo se incrementa en la zona donde los flujos son aditivos y se reduce en la parte donde son sustractivos.*

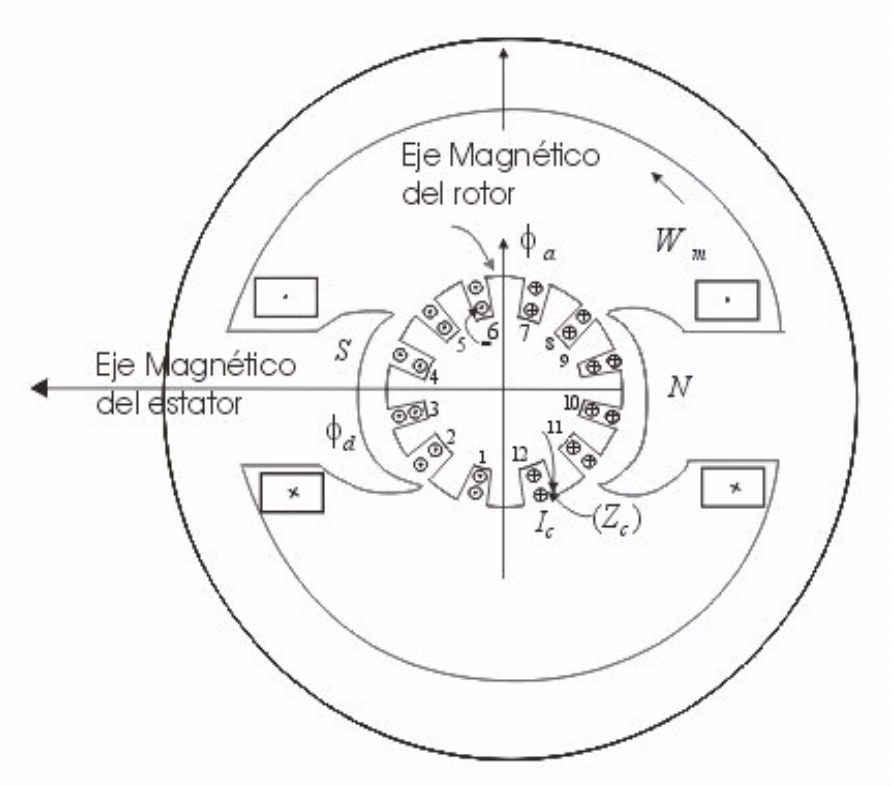



***Figura*** *6.3.1*

*Debido a la saturación magnética el incremento de flujo es menor que el decremento, por lo que el flujo resultante resulta menor y por consiguiente la reacción de armadura ejerce un efecto desmagnetizante sobre las caras polares. Esto se traduce en una disminución de la* ***f.e.m.*** *generada por la máquina.*

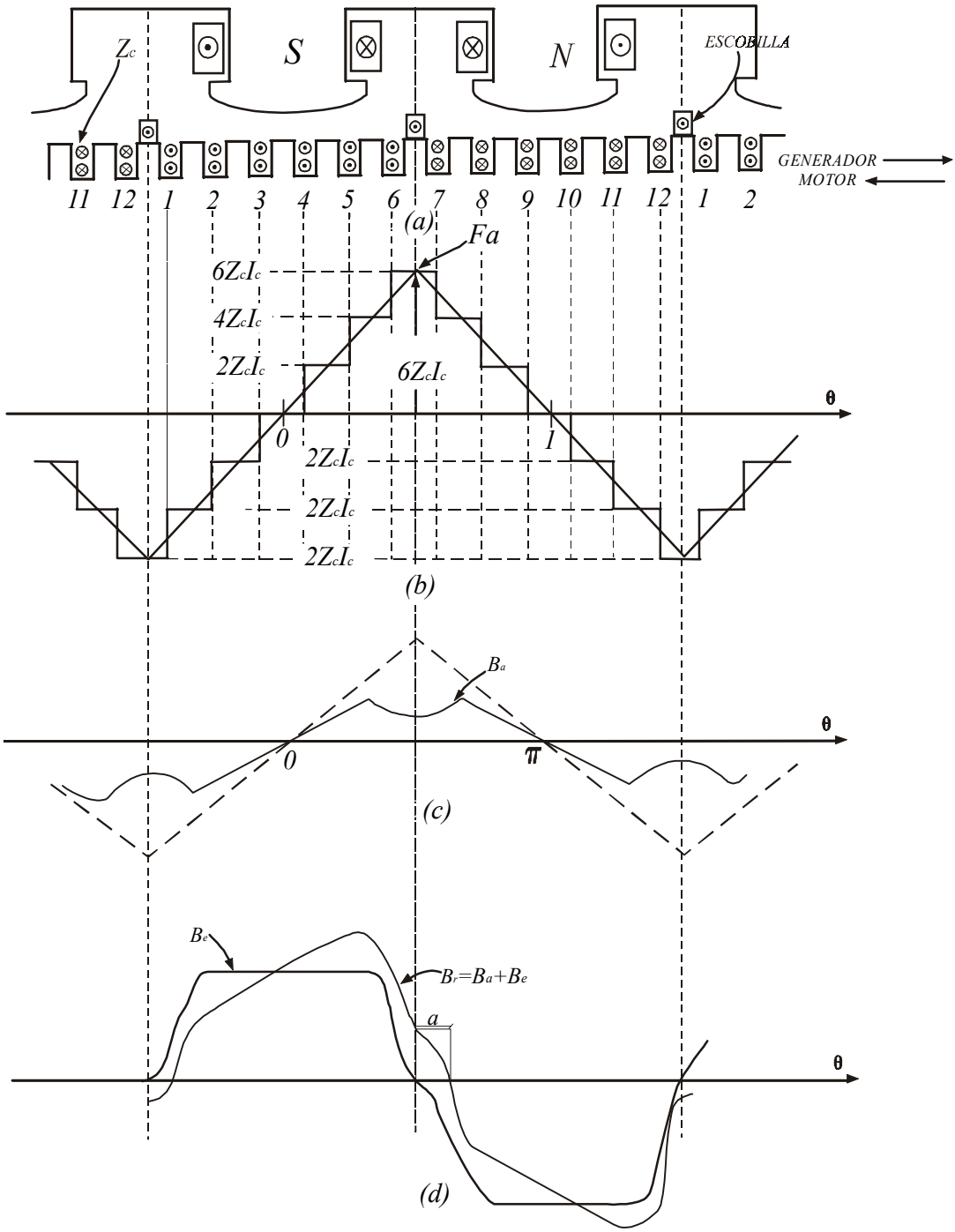



***Figura*** *6.3.2*

*Otro inconveniente es que el plano neutro se desplaza un ángulo* $\alpha$ *como se observa en la figura 6.3.3b.*

*Esto empeora la conmutación y obliga a desplazar las escobillas también en un ángulo* $\alpha$*, lo que acrecienta aún más el efecto desmagnetizante de la reacción de armadura. Para evitar los inconvenientes de la reacción de armadura las máquinas de C.C. de mayor potencia utilizan interpolos y arrollamientos de*

*compensación, con los que se logra neutralizar por completo la reacción de armadura.*

*El efecto neto de la reacción de armadura es doble :*

*i) Una distorsión del flujo de campo principal en el cual el flujo mutuo en el entrehierro ya no está distribuido uniformemente bajo los polos, y se ha desplazado el plano neutro, y*

*ii) Una reducción del flujo de campo principal.*

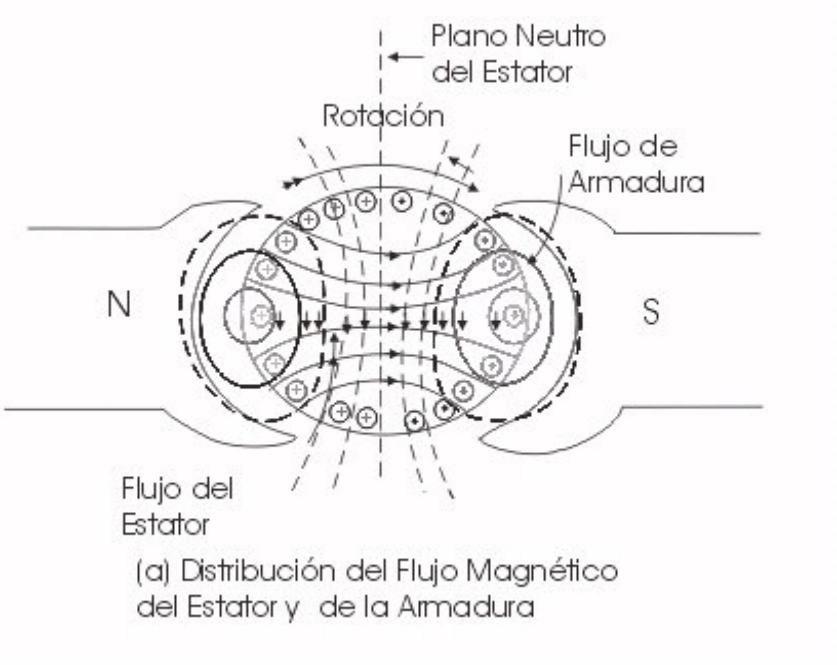



***Figura** 6.3.3a*

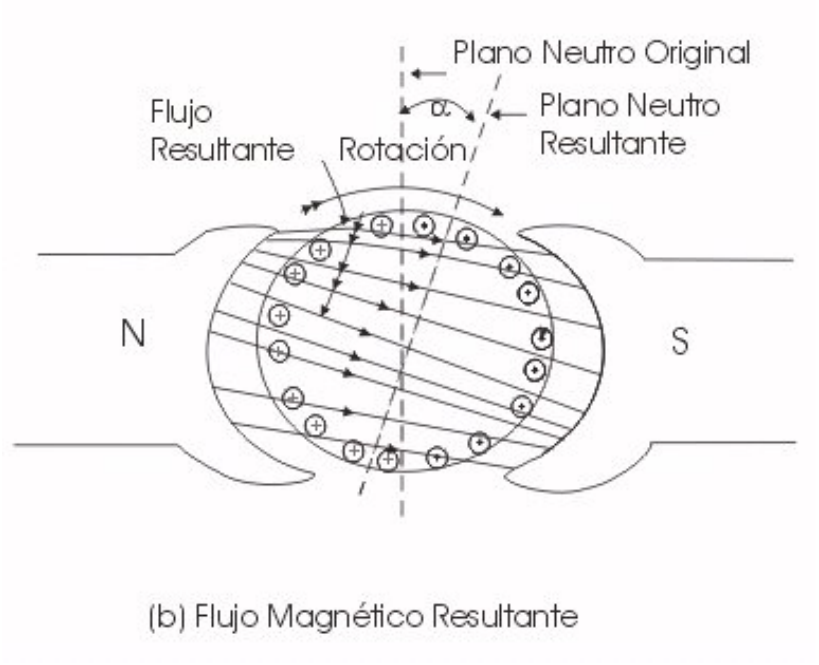
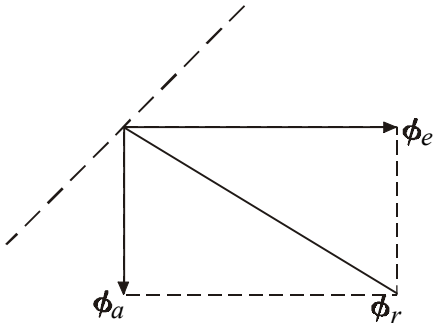



***Figura** 6.3.3b*




*(c) Distorsión resultante del flujo de campo producido por el flujo de armadura.*

***Figura** 6.3.3c*

*El diagrama fasorial de la Figura 6.3.3c podría dar la impresión de que el flujo resultante $\phi_r$ es ahora mayor que el flujo original de campo $\phi_e$ habiendo sido aumentado por el flujo perpendicular de la armadura $\phi_a$, sin embargo , esto no es cierto debido al efecto de la saturación de uno de los extremos polares de cada polo.*

## *6.4 CONMUTACIÓN:*

*La distorsión del flujo en el entrehierro y el desplazamiento de la línea neutra magnética, originada por la reacción del inducido, son, en sí mismas, menos importantes que su efecto sobre la bobina (ó bobinas), que sufre la conmutación mientras está en cortocircuito por la escobilla. En la siguiente figura quedan ilustradas tres etapas del proceso de conmutación de una bobina a otra, pertenecientes a respectivos circuitos del inducido.*

*La corriente $I_0 = I_a/a$ en la bobina **C** debe cambiarse en $-I_a/a$ , como se ve en la figura (parte c), en el tiempo **T** necesario para que el inducido, en su movimiento, se desplace el espacio correspondiente al ángulo subtendido por la escobilla **B**.*

*En condiciones ideales, la corriente en la bobina que se halla en cortocircuito debería variar uniformemente desde el valor inicial hasta el final, como indica la línea recta 1-2 de la figura mostrada. Pero en general. La transición puede tomar formas curvilíneas complejas, como las indicadas por las líneas mas finas.*

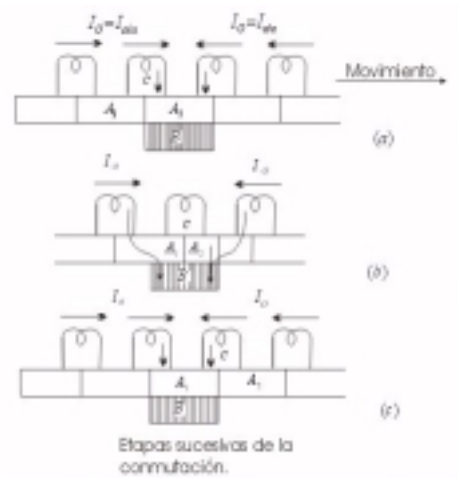



***Figura** 6.4.1*

*Durante el período de conmutación **T**, La corriente que cambia en la bobina en cortocircuito induce en la misma una **f.e.m.** de autoinducción igual a :* $-L\left(\frac{di}{dt}\right)$*, que siempre se dirige de tal forma, que se opone al cambio de corriente que la induce. Con objeto de tener la seguridad de que la corriente cambiará en la forma deseada, esta f.e.m. de autoinducción debe quedar compensada por una **f.e.m** directamente opuesta, generada en la bobina por rotación a través de un campo magnético de sentido y magnitud apropiadas; y , además, esta **f.e.m.** rotatoria debe vencer la caída óhmica en el circuito local que incluye la bobina en cortocircuito, sus conexiones con el colector y el contacto entre la escobilla y las delgas del colector. Puesto que el efecto de la inductancia es mantener la corriente dentro de su sentido original, la **f.e.m.** rotatoria debe, por tanto, tener el mismo sentido que la corriente final inversa.*

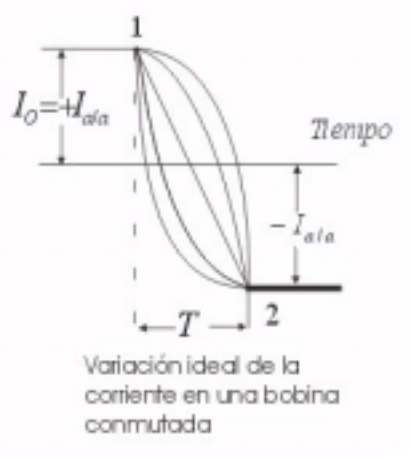



***Figura** 6.4.2*

## 6.5 EL MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA EN RÉGIMEN PERMANENTE

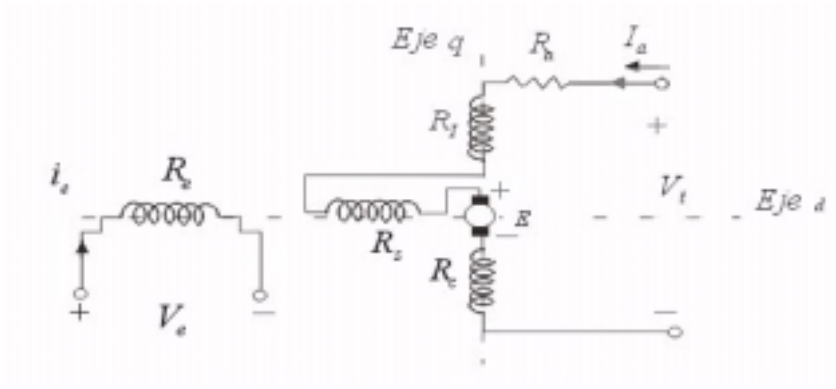



***Figura** 6.5.1*

*El circuito equivalente es idéntico al del generador, con la diferencia de que la corriente de armadura ha invertido su dirección. De esta manera la máquina absorbe energía de la red y se comporta como motor.*

### 6.5.1 ECUACIONES DEL MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA

*De acuerdo con Kirchoff:*

$$V_t = E + R_a I_a \quad ..... (6-10)$$

*Además:*

$$E = K_a \phi_d \omega \quad ..... (6-11)$$

*El torque electromagnético producido por el motor será:*

$$T_{EM}=K_a\phi_d I_a \quad .....(6-12)$$

*En el circuito de excitación tenemos :*

$$V_e = R_e I_e \quad ..... (6-13)$$

*(6-11) en (6-10):*

$$V_t = K_a\phi_d\omega + R_a I_a \quad .....(6-14)$$

*Despejando "**ω**" obtenemos la ecuación de al velocidad del motor:*

$$\omega = \frac{V_t - R_a I_a}{K_a \phi_d} \quad ..... (6-15)$$

### *6.5.2 TIPOS DE MOTORES*

#### *a) El motor Shunt:*

*Es el motor que tiene la mejor regulación de velocidad.*
*En cambio su par de arranque no es muy elevado. Su par motor varía linealmente con la carga. Se emplea principalmente para accionar cargas de velocidad constante.*

$$I_L = I_a + I_e \quad .....(6-16)$$

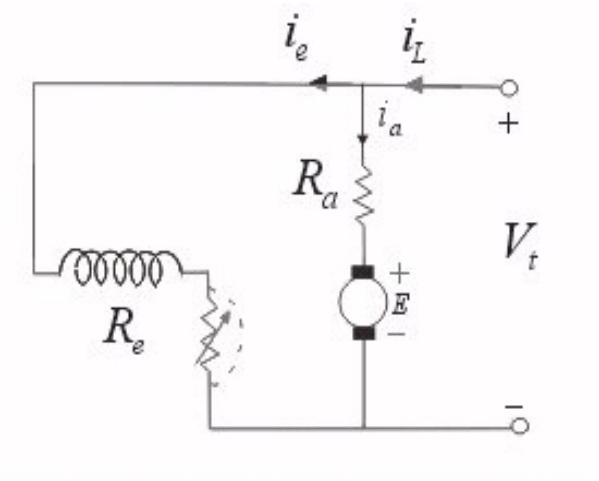



***Figura** 6.5.2*

#### *b) El motor Serie:*

*Este Motor varía mucho su velocidad con la carga y tiende a asumir velocidades muy altas en vacío. En cambio tiene muy alto par de arranque y soporta mejor las sobrecargas. Se emplea para accionar cargas pesadas tales como tranvías, grúas, montacargas, ascensores, etc.*

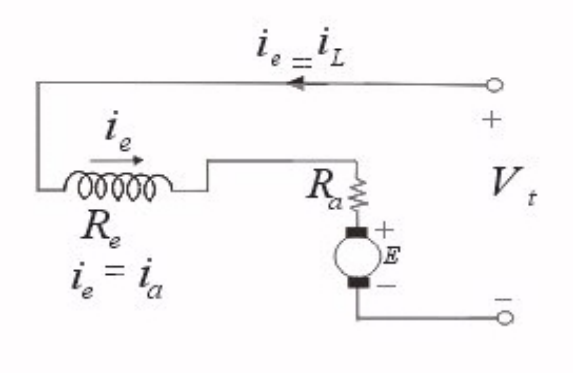



***Figura*** *6.5.3*

***c) El motor Compound:***

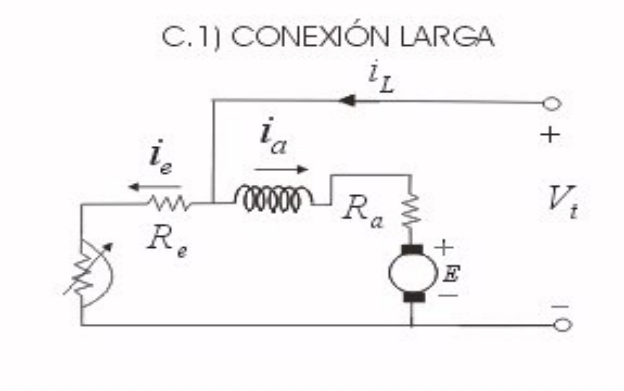



***Figura*** *6.5.4a*

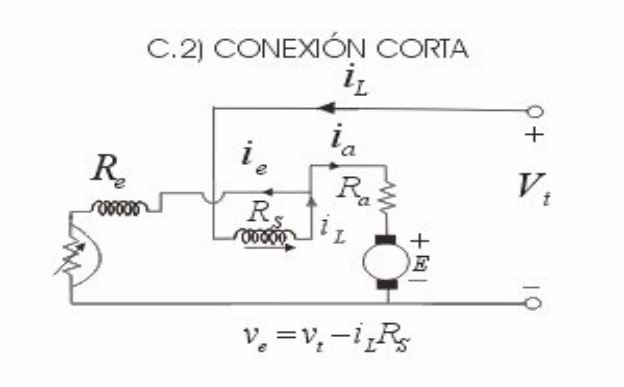



***Figura*** *6.5.4b*

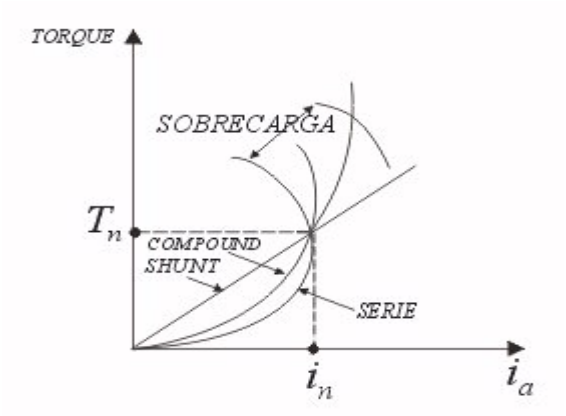
*Tiene características intermedias entre el shunt y el serie. Su par de arranque es bastante elevado y no tiene el inconveniente del embalamiento en vacío del motor serie, por lo que se le emplea mucho, en lugar del serie, para mover cargas pesadas, tales como ascensores, grúas, etc.*

### *6.5.3 CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LOS MOTORES*

*Existen dos curvas características muy importantes que dependen del tipo de motor:*

*a) La curva del torque del motor en función de la corriente de armadura.*

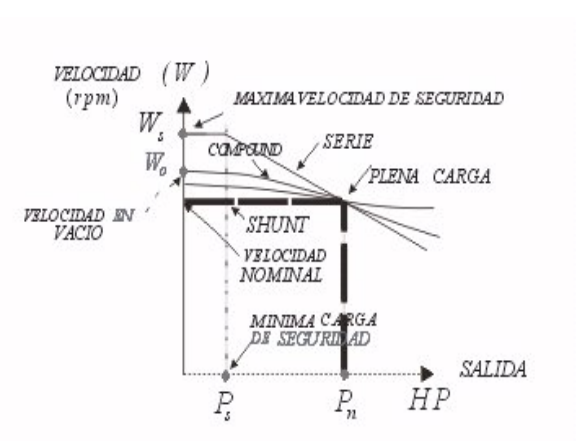
*b) La curva de la velocidad del motor en función de la potencia que entrega en el eje:*




*El motor serie es el que tiene el máximo torque en la región de sobrecarga.*

$$T = K' I_a^2 \quad .....(6-17)$$
$$I_a = I_e$$

***Figura** 6.5.5*




*El motor shunt es el que tiene la velocidad más constante, mientras que el motor serie tiene en vacío una velocidad muy alta que debe limitarse manteniendo siempre una carga de seguridad en su eje.*

***Figura** 6.5.6*

*Es importante tener presente que estas curvas permiten calcular la regulación de velocidad:*

$$r_{vel}\% = \left( \frac{\omega_0 - \omega_{PC}}{\omega_{PC}} \right) 100\% \quad .....(6-18)$$

$\omega_0$ *: velocidad en vacío.*
$\omega_{PC}$*: velocidad a plena carga.*

### *6.5.4 CORRIENTE Y PAR DE ARRANQUE*

*En el momento del arranque* $\boldsymbol{\omega = 0}$*, luego* $\boldsymbol{E = K_a \phi_d \omega = 0}$ *, al no haber movimiento.*
*Por lo tanto la corriente que absorbe el motor es:*

$$I_{arr} = \frac{V_t}{R_a} \quad .....(6-19)$$

*Como la resistencia de armadura es pequeña, la corriente de arranque resulta ser muy alta y puede llegar a ser diez veces mayor que la corriente nominal del motor.*
*Esto perjudica no solamente al motor sino también a la red en la que puede ocasionar oscilaciones de tensión, por lo que en motores de cierta potencia debe limitarse la corriente de arranque mediante un reóstato de arranque conectado en serie con el motor.*

$$I_{arr} = \frac{V_t}{R_a + R_{arr}} \quad .....(6-20)$$

*El valor del reóstato de arranque se escoge de manera que la corriente de arranque no supere* $\boldsymbol{2I_N}$.

*Una vez que la máquina adquiere cierta velocidad y por consiguiente se produce la* ***f.e.m.*** *se elimina el reóstato de arranque.*

$$T_{arr} = K_a \phi_d I_{arr} \quad .....(6-21)$$

*El par de arranque elevado permite que la máquina pueda mover sin problemas la carga mecánica acoplada a su eje y pueda adquirir rápidamente su velocidad de régimen.*

### *6.5.5 VARIACIÓN DE VELOCIDAD DE LOS MOTORES DE CORRIENTE CONTINUA*

*La velocidad de los motores de c.c. puede variarse entre amplios márgenes por métodos relativamente simples. En esto reside justamente su mayor ventaja sobre los motores de corriente alterna.*

*Sabemos que:*

$$\omega = \frac{V_t - R_a I_a}{K_a \phi_d} \quad .....(6-22)$$

*Podemos ver que la velocidad es inversamente proporcional al flujo* $\phi_d$ *. Por consiguiente variando éste flujo se podrá variar la velocidad del motor y esto se logra fácilmente colocando un reóstato de campo en el circuito shunt de excitación. Con él se puede regular la excitación del motor que es la que produce el flujo principal* $\phi_d$ **.**

*También puede variarse la velocidad variando la tensión* $V_t$ *aplicada al motor: a mayor tensión mayor velocidad.*

*Finalmente una tercera posibilidad consiste en variar la resistencia* $(R_a + R_s)$ *del circuito de armadura, mediante una resistencia serie.*

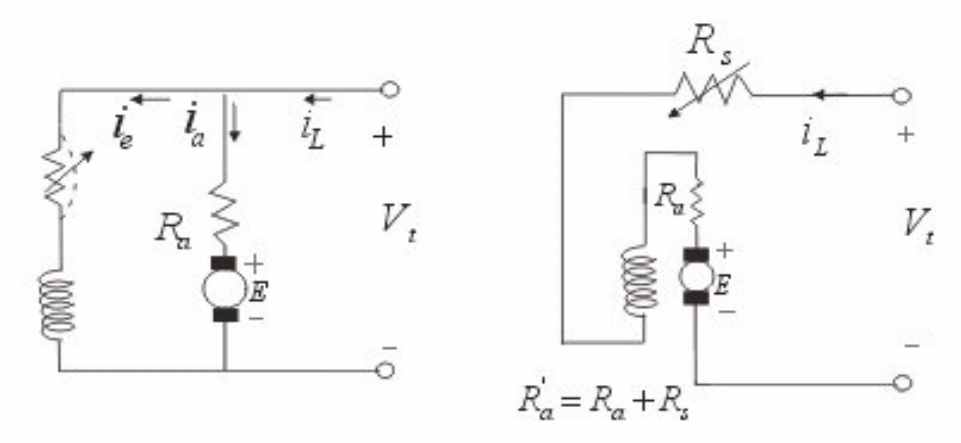



***Figura*** *6.5.7*

*De las tres formas mencionadas, la del reóstato serie es poco utilizada por las excesivas pérdidas que se producen en el reóstato serie.*

***a) Variación de Velocidad por reóstato de Campo:***

*El reóstato de campo permite variar la corriente de excitación del motor shunt y el motor compound. Es importante observar que la velocidad aumenta al reducirse la corriente de excitación, por lo que la velocidad mínima ó de base se obtiene con* ***Re =0****.*

*Al aumentarse la resistencia de campo, aumenta también la velocidad. Al mismo tiempo se produce el par motor (* $T_a = K_a\phi_d I_a$ *) mientras que la Potencia se mantiene constante (* $P = V_t I_a = \omega T_a$ *).*
*Por lo tanto este método se denomina de Potencia constante y puede emplearse cuando la carga tiene esa característica.*

***b) Variación de Velocidad por variación de la tensión aplicada a la Armadura:***

*La velocidad es proporcional a la tensión aplicada. A plena tensión tendremos la velocidad máxima de base y reduciendo la tensión podremos bajar velocidad hasta cero.*
*Al mismo tiempo se reducirá la potencia del motor (* $P = V_t I_a$ *), mientras que el par permanecerá constante (* $Ta = K_a\phi_d I_a$ *) razón por la cual a este método se le denomina de par constante.*

### *6.5.6 INVERSIÓN DEL SENTIDO DE ROTACIÓN DE LOS MOTORES DE C.C.*

*Puede realizarse de dos maneras diferentes:*

*a) Invirtiendo la corriente de excitación*

*b) Invirtiendo la corriente de armadura.*

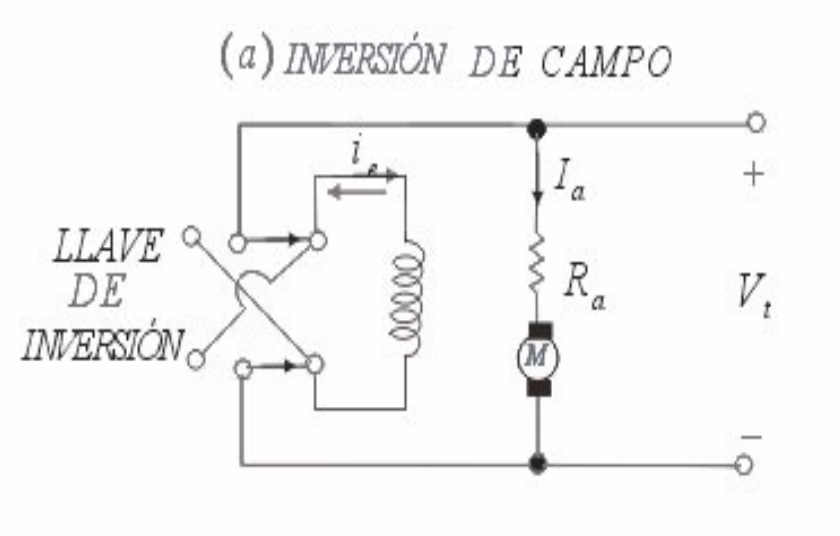



***Figura*** *6.5.8a*

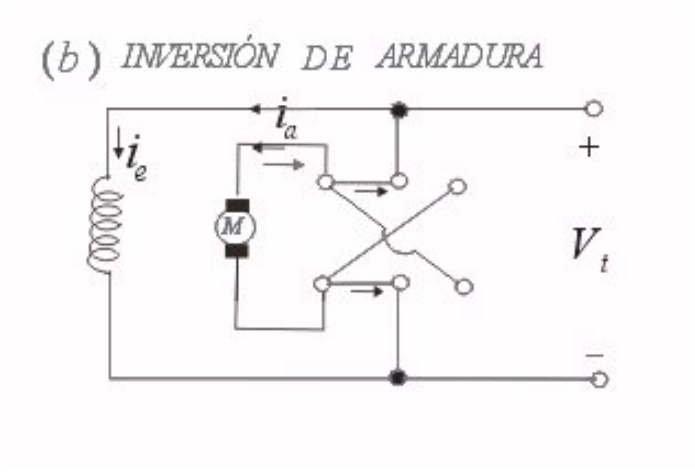



***Figura*** *6.5.8b*

*La inversión de la corriente de armadura* $\boldsymbol{I_a}$ *ó de la corriente de excitación* $\boldsymbol{I_e}$ *cambia de dirección al par motor que es proporcional al producto de ambas y por consiguiente invierte la rotación del motor. Naturalmente debe evitarse invertir simultáneamente* $\boldsymbol{I_a}$ *e* $\boldsymbol{I_e}$ *pues en tal caso no se obtendría la inversión de rotación.*

### *6.5.7 FRENADO ELÉCTRICO*

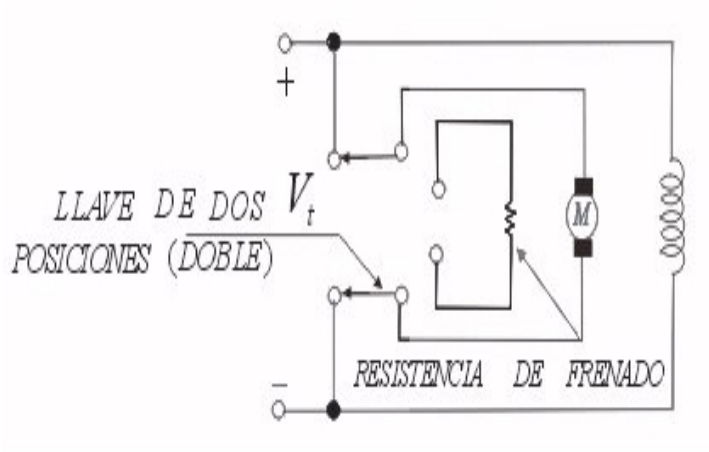



***Figura** 6.5.9*

*En ciertas aplicaciones es necesario parar el motor muy rápidamente, especialmente si el proceso requiere de continuas inversiones de velocidad. Para ésto, en lugar de utilizar frenos mecánicos, se puede aprovechar de las fuerzas magnéticas.*

*Esto es justamente el caso del motor cuando se le desconecta de la red poniendo su armadura en cortocircuito y manteniendo conectada su excitación. En realidad de esta manera el motor está funcionando como un generador y como no tiene una máquina prima que lo accione se detendrá rápidamente por efecto del par resistente.*

*Para acelerar más todavía el frenado, se acostumbra conectar el motor a una resistencia en la que se disipa rápidamente la energía cinética de la máquina bajo forma de calor. A este tipo de frenado se le denomina frenado dinámico.*

*El frenado eléctrico se emplea también en los trenes eléctricos cuando están bajando una pendiente. En este caso los motores trabajan como generadores y de frenar la máquina pueden producir energía eléctrica que vuelve a la red y es utilizada por otras máquinas que estén funcionando simultáneamente. Este tipo de frenado se denomina "frenado regenerativo".*

### *6.5.8 EFICIENCIA Y PÉRDIDAS EN LAS MÁQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA*

*La eficiencia se define:*

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} \quad .....(6-23)$$

*Donde:*

$W_1$ = *potencia de entrada de la máquina.*
$W_2$ = *potencia de salida de la máquina.*

*La diferencia entre ambas representa las pérdidas en la máquina : $\Delta W$*

$$\Delta W = W_1 - W_2 \quad .....(6-24)$$

$$\eta = 1 - \frac{\Delta W}{W_1} \quad .....(6-25)$$

***Pérdidas:*** *Las pérdidas que se producen en una máquina de corriente continua pueden dividirse en dos grupos:*

1. *Pérdidas rotacionales.*
2. *Pérdidas en el cobre.*

***a) Pérdidas Rotacionales:*** *incluyen todas las pérdidas que dependen de la velocidad de rotación de la máquina ó sea dependen de la velocidad de la máquina.*

***a.1) Pérdidas Mecánicas:*** *son debidas a la fricción en los cojinetes, ventilación y fricción en las escobillas.*

***a.2) Pérdidas Magnéticas en el Hierro:*** *consiste en las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas de Focault en la armadura ya que debido a la rotación el flujo magnético cambia continuamente de dirección en la armadura.*
*Para limitar éstas pérdidas la armadura se hace de acero-silicio laminado.*

***b) Pérdidas en el cobre :*** *estas pérdidas se producen por efecto Joule en los arrollamientos de la máquina y son los siguientes:*

***b.1)*** *Pérdidas en el arrollamiento de armadura :* $\boldsymbol{R_a I_a^2}$**.**
***b.2)*** *Pérdidas en los arrollamientos de campo:* $\boldsymbol{R_e I_e^2 + R_s I_a^2}$**.**
***b.3)*** *Pérdidas en los interpolos:* $\boldsymbol{R_I I_a^2}$**.**
***b.4)*** *Pérdidas en el arrollamiento de compensación:* $\boldsymbol{R_c I_a^2}$**.**
***b.5)*** *Pérdidas por contacto en las escobillas :* $\boldsymbol{E_B I_a}$**.**

*Estas pérdidas no siguen la ley de Joule.*
*Experimentalmente se ha observado que la caída de tensión* $\boldsymbol{E_B}$ *en las escobillas se mantiene prácticamente constante con la carga.*

***c) Pérdidas Dispersas :*** *la distorsión del flujo principal por la reacción de armadura, el efecto pelicular en los conductores y las corrientes de cortocircuito de las bobinas durante la conmutación producen pérdidas adicionales muy difíciles de determinar que se denominan pérdidas dispersas y que en las máquinas grandes (200HP) son aproximadamente del 1% de la potencia nominal.*

*En las máquinas pequeñas se suele despreciarlas.*

### *6.5.9 BALANCE DE POTENCIA DE LAS MÁQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA*

***a) Generador***

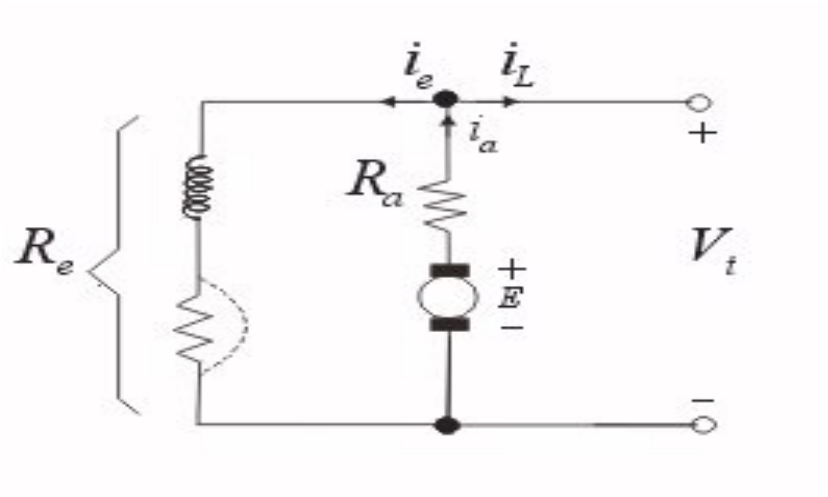



***Figura*** *6.5.10*

$$W_{EM} = W_2 + R_e I_e^2 + R_a I_a^2 + E_B I_a \quad .....(6-26)$$
$$W_{EM} = W_1 - \Delta W_{D+ROT} \quad .....(6-27)$$

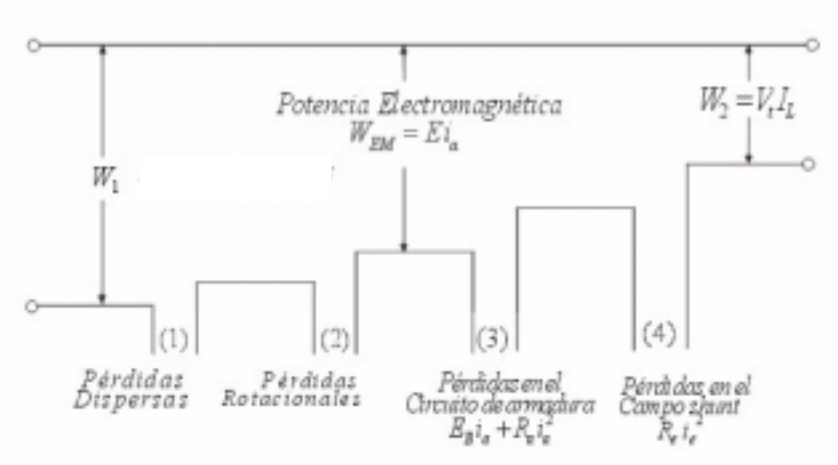



***Figura*** *6.5.11*

***b) Motor***

*De la Figura respectiva:*

$$W_{EM} = W_2 + \Delta W_{D+ROT} \quad ..... \quad (6-28)$$
$$W_{EM} = W_1 - (R_a I_a^2 + R_e I_e^2 + E_B I_a) \quad ..... \quad (6-29)$$

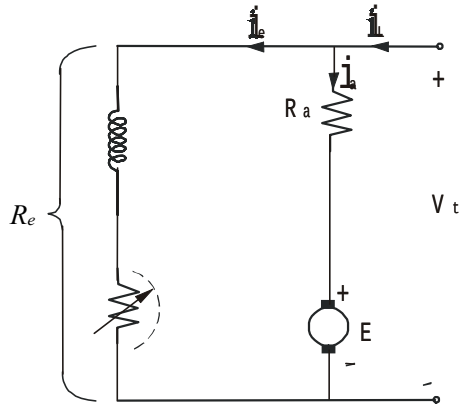



***Figura** 6.5.12*

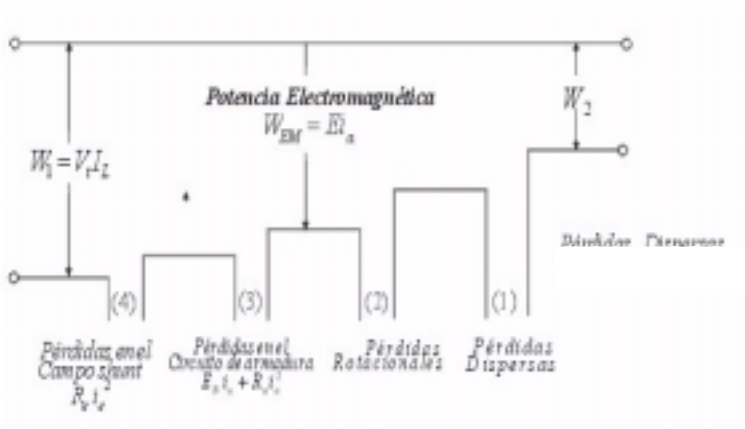



***Figura** 6.5.13*

## *6.6 EL GENERADOR DE CORRIENTE CONTINUA EN RÉGIMEN ESTABLE*

*El circuito de un generador de C-C en régimen estable es el siguiente:*

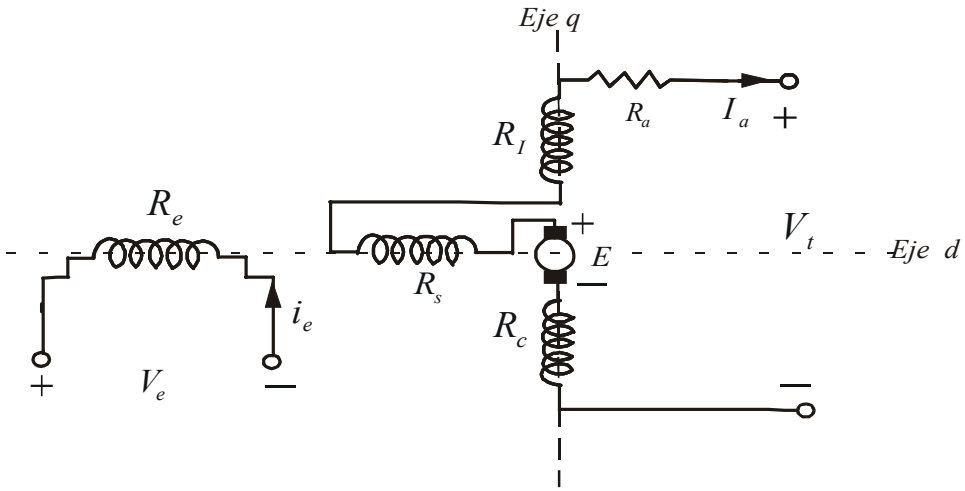



***Figura** 6.6.1*

***$R_A$***: *resistencia interna de la máquina, es decir la resistencia del arrollamiento de Armadura.*
***$R_I$***: *representa la resistencia de los interpolos*
***$R_C$***: *representa la resistencia del arrollamiento de compensación*
***$R_S$***: *resistencia de la bobina de campo serie*

*Como todas éstas resistencias están en serie pueden reemplazarse por una resistencia equivalente :* ***$R_a$.***

$$R_a = R_A + R_I + R_C + R_S \quad ..... (6-30)$$

*En este circuito no figura las inductancias de las bobinas ya que estamos en régimen estable de corriente continua.*

### *6.6.1 ECUACIONES DEL GENERADOR EN RÉGIMEN ESTABLE*

*Aplicando Kirchoff:*

$$-E + R_a I_a + V_t = 0 \quad .....(6-31)$$

$$E = V_t + R_a I_a \quad .....(6-32)$$

$$E = K_a \phi_d \omega \quad .....(6-33)$$

*donde:* ***$\phi_d$*** → *flujo producido por un polo.*
***$\omega$*** → *velocidad del rotor.*

$$K_a = \frac{PZ}{2\pi a} \quad ..... (6-34)$$

***P***= # *de polos.*
***Z*** = # *de conductores del rotor.*
***a*** = # *de circuitos en paralelo del arrollamiento rotórico.*

$$T_{em} = K_a \phi_d I_a \quad .....(6-35)$$

*Donde:*

***$T_{em}$***= *par o torque electromagnético*

*En el circuito de excitación se cumple la ley de Ohm:*

$$V_e = R_e I_e \quad ..... (6-36)$$

### *6.6.2 TIPOS DE GENERADORES*

*De acuerdo con la forma como se conectan las bobinas de campo del generador se representan los siguientes tipos de generadores:*

### *I) CON EXCITACIÓN INDEPENDIENTE*

*La bobina de campo es alimentada desde una fuente de tensión exterior denominada excitatriz.*

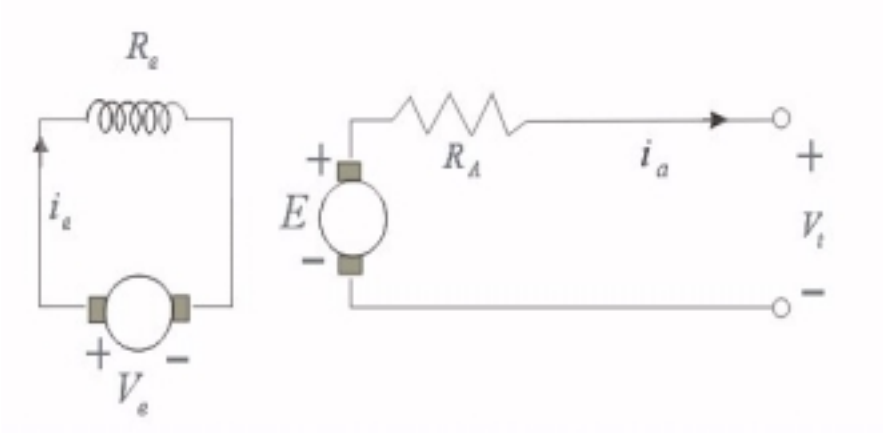



***Figura*** *6.6.2*

***II) CON EXCITACIÓN PROPIA***

*Es la más utilizada en la práctica. Se pueden presentar tres casos:*

***a)*** *Con excitación shunt o paralelo.*
***b)*** *Con excitación serie.*
***c)*** *Con excitación compuesta (compound).*
***-*** *La conexión larga*
***-****La conexión corta*

***a) Con excitación Shunt o paralelo.***

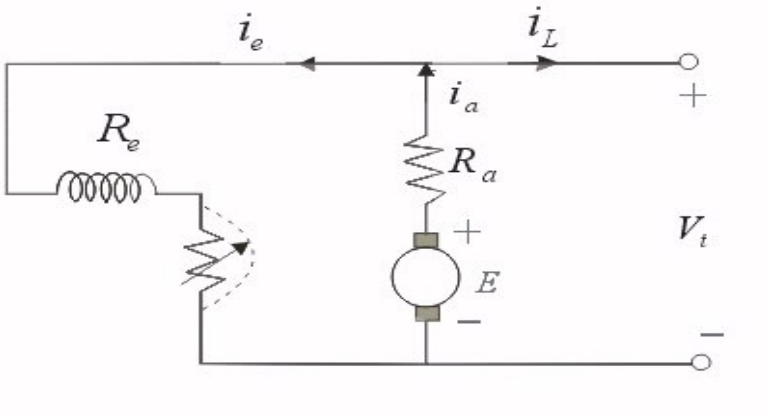



***Figura*** *6.6.3*

*La bobina de campo es alimentada en paralelo por el mismo generador. Se emplea:*

$$V_t = R_e I_e \quad ..... (6-37)$$

$$I_L = I_a - I_e \quad .....(6-38)$$

$$I_a = I_e + I_L \quad ..... (6-39)$$

***b) Con excitación serie:***

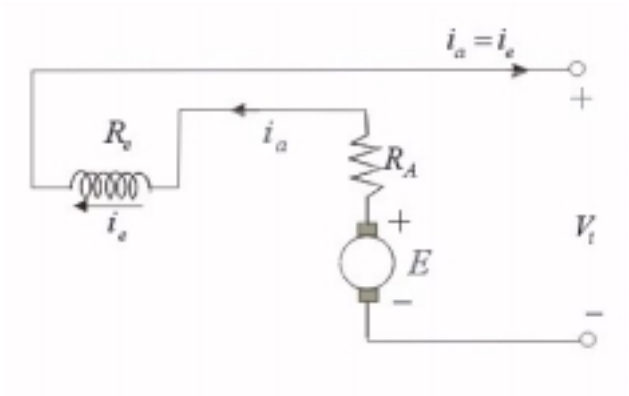



***Figura*** *6.6.4*

*La bobina de campo es conectada en serie con el generador y por lo tanto es recorrida por la corriente de armadura* $\boldsymbol{I_a} = \boldsymbol{I_e}$.

***c) Con excitación compuesta (compound).***

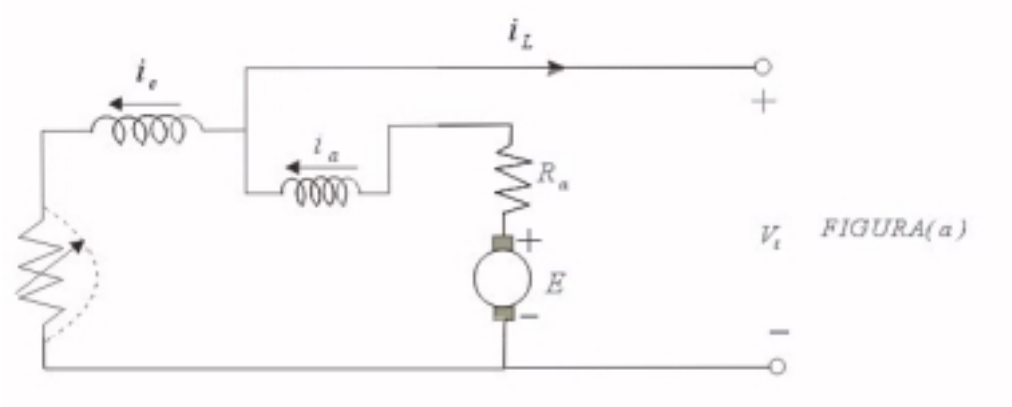



***Figura*** *6.6.5a*

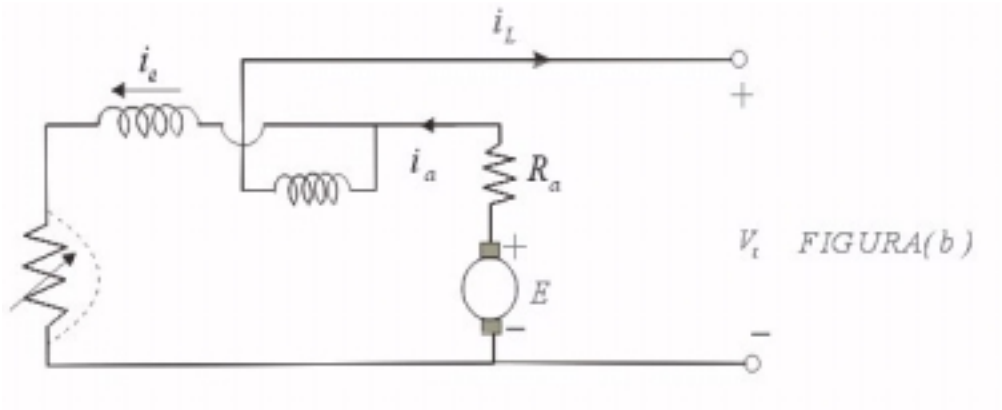



***Figura*** *6.6.5b*

*En este generador se tiene bobinas de campo serie y Shunt que se conectan en serie y en paralelo con el generador. Existen dos variantes:*

***a)*** *La conexión larga.*
***b)*** *La conexión corta.*

∗ *La más empleada es la conexión larga.*

### *6.6.3 CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LOS GENERADORES*

*Las curvas más importantes de los generadores son dos:*

*a) La curva de magnetización ó característica interna de la máquina.*
*b) La curva de tensión bajo carga o característica externa de la máquina.*

***a) La curva de Magnetización.***

*Excitando la máquina independientemente y manteniendo su velocidad* $\omega_o$ *constante es posible trazar dicha curva.*

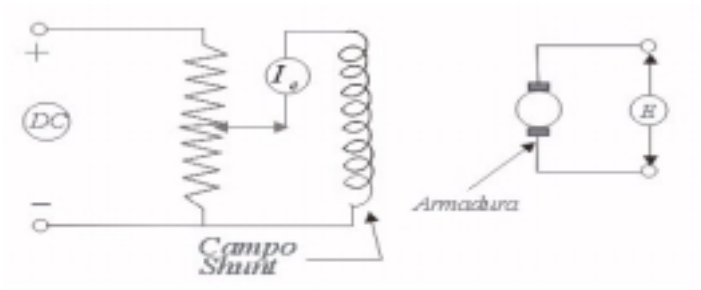



***Figura*** *6.6.6*

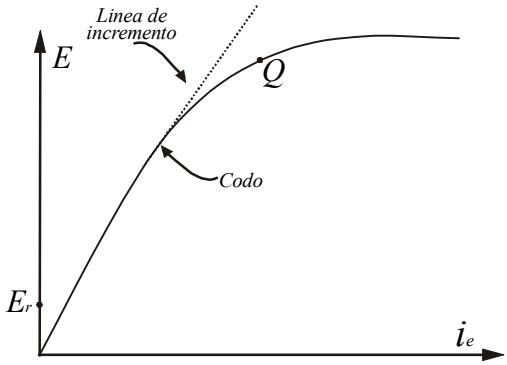



***Figura*** *6.6.7*

*Teniendo presente que:*

$$E = K_a \phi_d \omega \quad ..... (6-40)$$

*Y si ω= cte.*

*El flujo* $\phi_d$ *depende de la corriente de excitación de la máquina.*

*Debido a la presencia del entrehierro existe un tramo lineal denominado "la línea de entrehierro" y un tramo curvo producido por la progresiva saturación del material magnético, que disminuye en forma no lineal su permanencia.*

*Normalmente el punto de trabajo de la máquina se presenta en la zona curva (punto* ***Q****).*

$\boldsymbol{E_r}$ *es la tensión remanente a causa del magnetismo remanente que posee el circuito magnético del estator. Se cumple:*

$$\frac{E_1}{\omega_1} = \frac{E_0}{\omega_0} \quad .....(6-41)$$

***b) Característica externa***

*La característica externa de la máquina relaciona la tensión* $\boldsymbol{V_t}$ *en bornes de la máquina con la corriente* $\boldsymbol{I_a}$ *de armadura ó con la potencia que entrega a la carga.*

*Debido a la caída de tensión en la resistencia de armadura, la tensión en los bornes de la máquina generalmente decrece al aumentar la carga.*

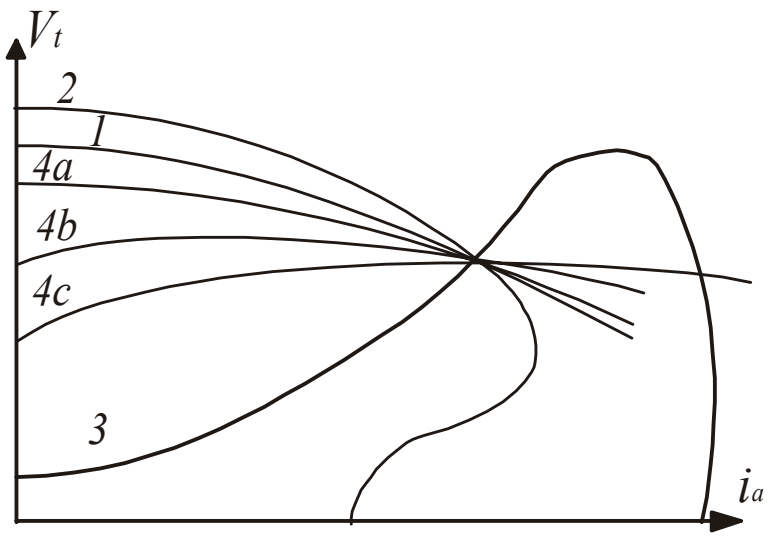



***Figura*** *6.6.8*

***1)*** *Generador a excitación independiente.*

***2)*** *Generador Shunt.*
*Tiene una caída de tensión mayor debido a la disminución del flujo* $\phi_d$ *por la disminución de la tensión* $\boldsymbol{V_t}$**.**

***3)*** *Corresponde a un generador serie, la tensión aumenta debido a que el flujo principal es función de la corriente de armadura. Debido a la gran variación de tensión que experimenta éste generador es poco utilizado.*

***4)*** *Se utiliza mucho el generador Compound.*

***4.a)*** *Sobre Compound.*
***4.b)*** *Compound-plana .*
***4.c)*** *subcompound.*

∗ *Estas curvas permiten calcular la regulación de tensión del generador.*

$$r\% = \frac{E - V_t}{V_t} 100\ \% \quad ..... \quad (6 - 42)$$

### *6.6.4 DETERMINACIÓN DE LA TENSIÓN BAJO CARGA DE UN GENERADOR SHUNT*

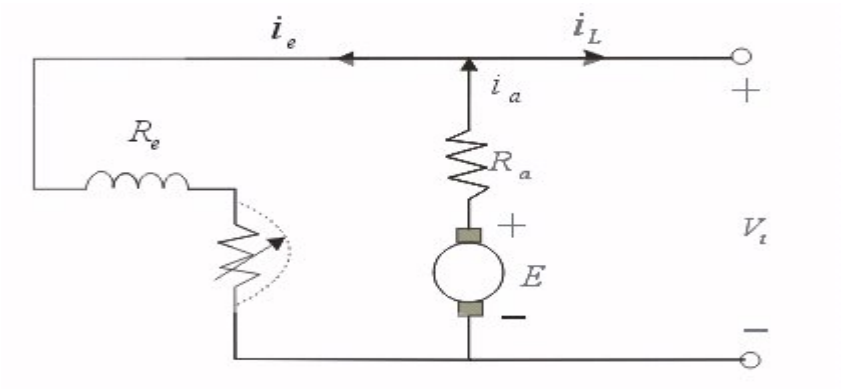



***Figura*** *6.6.9*

*Una aplicación interesante de la curva de magnetización consiste en determinar la tensión* $\boldsymbol{V_t}$ *de un generador Shunt cuando trabaja bajo carga con una corriente de armadura* $\boldsymbol{I_a}$**.**

*Del circuito:*

$$E = V_t + R_a I_a \quad ..... (6 - 43)$$

$$R_a I_a = E - V_t \quad ..... (6 - 44)$$

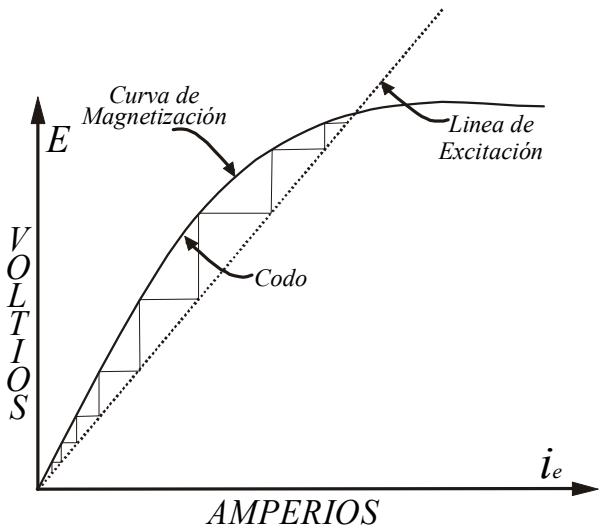



***Figura*** *6.6.10*

*Es decir la diferencia entre la* ***f.e.m. E*** *y la tensión en bornes* $V_t$ *es igual a* $R_a I_a$ *que puede determinarse ya que se conoce la corriente de armadura* $I_a$.
*La curva de magnetización representa el lugar geométrico de* ***E*** *y la recta de excitación es el lugar geométrico de* $V_t$.

## *6.7 CONTROL DE VELOCIDAD DE MÁQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA*

*Hay numerosas aplicaciones donde el control de velocidad es requerido, así como en los elevadores, maquinas* ***DC*** *especiales, máquinas herramientas, sistemas de tránsito y locomotoras. Los motores* ***DC*** *son muy utilizados en mucha de éstas aplicaciones. El control de velocidad de los motores* ***DC*** *por debajo y encima de la velocidad base puede ser fácilmente diseñada. Además, los métodos de control son simples y menos costosos que los controles de los motores de corriente alterna* ***(A.C.)*** *. La tecnología del control de velocidad de los motores* ***DC*** *se ha desarrollado considerablemente a partir del pasado cuarto de siglo. En el método clásico se usó el sistema* ***Ward- Leonard*** *con máquinas rotativas para el control de velocidad de motores* ***DC****. Recientemente, los convertidores de estado sólido vienen siendo usados para este propósito. En ésta sección, varios métodos de control de motores* ***DC*** *serán discutidos.*

### *6.7.1 SISTEMA WARD – LEONARD*

*Este sistema fue introducido por los años de 1890. El sistema se muestra en la figura 6.7.1a, el cual usa un motor – generador* ***(M-G)*** *que es impulsado por un motor primo* ***A.C****. para controlar la velocidad de un motor* ***DC*** *que mueve una carga.*

*El motor* ***A.C****. que mueve el* ***(M-G)*** *es generalmente un motor primo de corriente alterna, que rota a velocidad constante.*

*Mediante la variación de la corriente de campo* $\boldsymbol{I_{fg}}$ *el voltaje de salida* $\boldsymbol{V_t}$ *del generador es cambiada, y este cambio regula la velocidad del motor que mueve la carga. El sistema es operado en dos modos de control.*

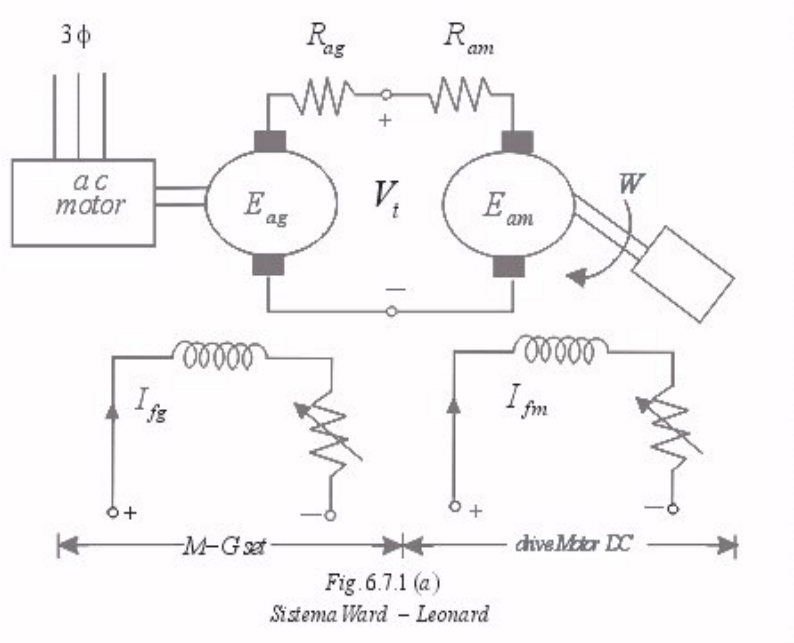



***Figura*** *6.7.1a*

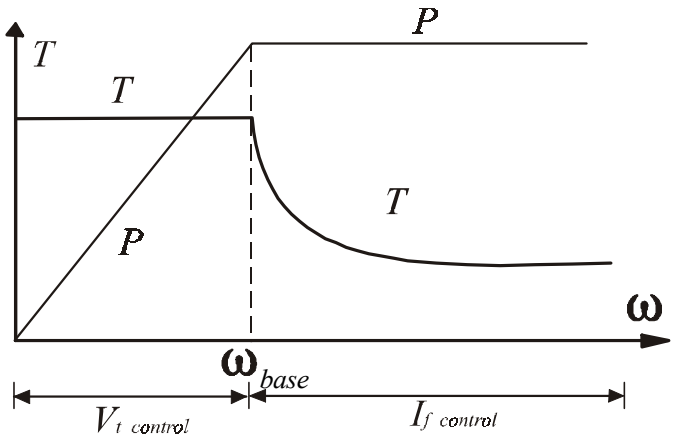



***Figura*** *6.7.1b*

### *a) CONTROL POR VOLTAJE DE ARMADURA* ($V_t$)

*En el modo de control por voltaje de armadura, la corriente del motor* $\boldsymbol{I_{fm}}$ *es mantenida constante en su valor determinado. La corriente de campo del generador* $\boldsymbol{I_{fg}}$ *es cambia tanto como* $\boldsymbol{V_t}$ *cambia desde cero a su valor determinado. La velocidad cambiará desde cero a la velocidad base. El torque puede ser mantenido constante durante la operación en este rango de velocidad, así como se vé en la figura 6.7.1b.*

### *b) CONTROL POR CORRIENTE DE CAMPO ($I_f$)*

*El modo de control por corriente de campo es usada para obtener una velocidad por encima de la velocidad base. En este modo, el voltaje de armadura* $V_t$ *permanece constante y la corriente de campo del motor* $I_{fm}$ *es disminuída para obtener altas velocidades. La corriente de armadura puede ser mantenida constante, consiguiendo operar el motor en un modo de potencia de salida constante. Obviamente el torque disminuye tanto como la velocidad se incrementa, como se observa en la figura 6.7.1b.*

### *6.7.2 CONTROL DE ESTADO SÓLIDO*

*En años recientes, los convertidores de estado sólido han sido usados en reemplazo de equipos rotativos motor- generador para el control de velocidad de motores **DC**. En la figura 6.7.2 se muestra el diagrama de bloques de un sistema convertidor de estado sólido. Los convertidores usados son rectificadores controlados ó choppers.*

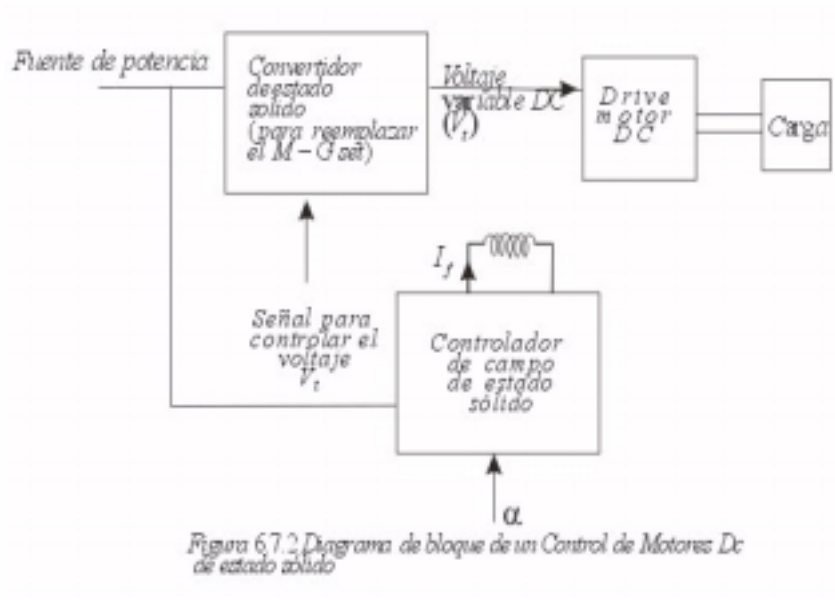



***Figura** 6.7.2*

#### *6.7.2.1 RECTIFICADORES CONTROLADOS*

*Si la fuente es **A.C**. , Los rectificadores controlados pueden ser usados para convertir una fuente de voltaje **A.C**. fija en una fuente **DC** de voltaje variable.*
*Si todos los dispositivos de switching en los convertidores son dispositivos controlados, así como los rectificadores controlados de silicon **(SCRs),** el convertidor es llamado convertidor completo.*
*Si algunos dispositivos son **SCRs** y algunos son diodos, el convertidor es llamado un semiconvertidor. En la figura 6.7.3, el ángulo de disparo* $\alpha$ *de los **SCRs** determina el valor promedio* $(V_t)$ *del voltaje de salida* $V_t$*. El voltaje de control* $V_c$ *cambia el ángulo de disparo* $\alpha$ *y por esa razón cambia* $V_t$*. La relación entre el voltaje promedio de salida* $V_t$ *y el ángulo de disparo* $\alpha$ *es como sigue.*

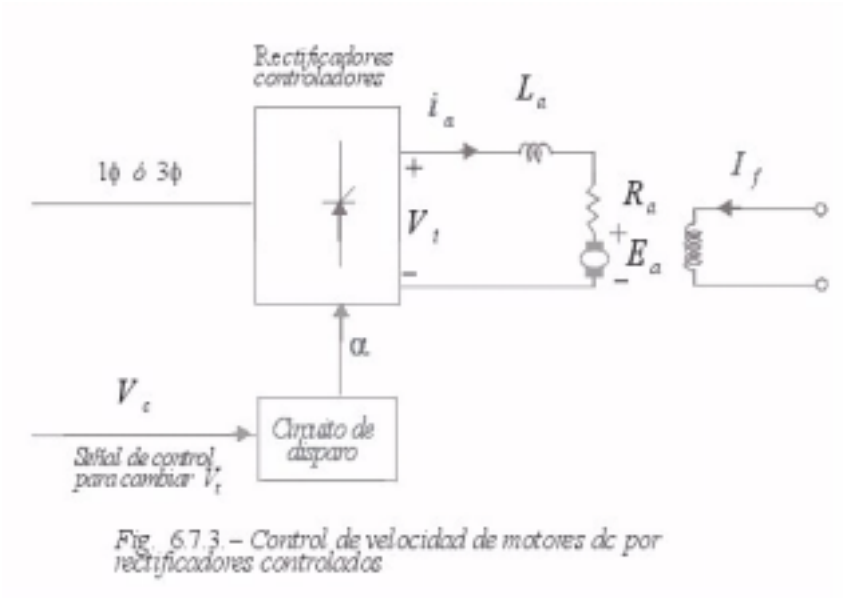



***Figura*** *6.7.3*

***Entrada Monofásica.-*** *se asume que la corriente* ***DC*** $\boldsymbol{I_a}$ *es continua. Para un convertidor completo.*

$$V_t = \frac{2\sqrt{2}\,V_p}{\pi}\cos\alpha \quad .....(6-45)$$

*Para un semiconvertidor:*

$$V_t = \frac{\sqrt{2}\,V_p}{\pi}\left(1+\cos\alpha\right) \quad .....(6-46)$$

***Entrada Trifásica.-*** *Para un convertidor completo ( ó puente completo)*

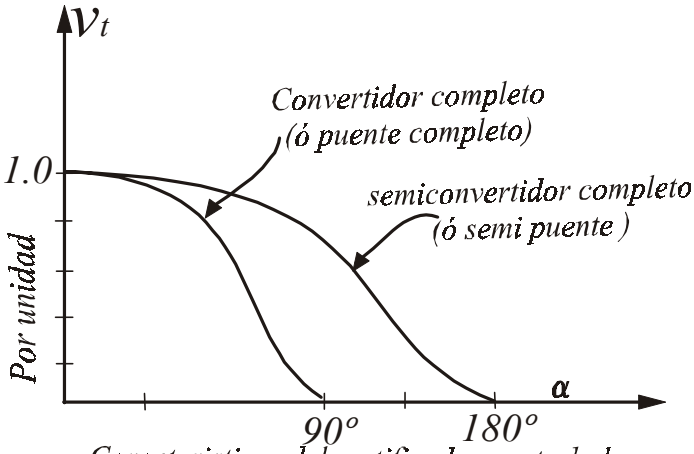
$$V_t = \frac{3\sqrt{6}\,V_p}{\pi}\cos\alpha \quad .....(6-47)$$

*Para un semiconvertidor (ó semipuente)*

$$V_t = \frac{3\sqrt{6}\,V_p}{2\pi}\left(1+\cos\alpha\right) \quad .....(6-48)$$

*Donde* $\boldsymbol{V_p}$ *es el valor rms del voltaje de suministro* ***A.C*** *de fase. La variación del voltaje terminal* $\boldsymbol{V_t}$ *del motor como una función del ángulo* $\boldsymbol{\alpha}$ *de disparo es mostrada en la figura 6.7.4 para ambos sistemas, convertidor completo y semiconvertidor. Si la caída de voltaje* $\boldsymbol{I_a R_a}$ *es omitida* $\boldsymbol{(V_t = E_a)}$ *las curvas en la Figura 6-7-4 también muestran la variación de* $\boldsymbol{E_a}$ *( por ésta razón velocidad) con el ángulo de disparo.*

*Sin embargo los valores instantáneos de voltaje* $V_t$ *y corriente* $\boldsymbol{i_a}$ *no son constantes pero cambia con el tiempo, en términos de valores promedios las ecuaciones básicas de la máquina* ***DC*** *son válidas.*




Caracteristicas del rectificador controlado

***Figura*** *6.7.4*

***EJEMPLO 1 .-*** *La velocidad de un motor* ***DC*** *excitado independientemente de 10 hp, 220 V, 1200 rpm es controlado por un convertidor completo monofásico visto en la Figura 6.7.3. La corriente de armadura establecida es 40 Amps. La resistencia de armadura es Ra = 0,25 Ω y la inductancia de armadura es La = 10 mH. El voltaje de suministro* ***A.C.*** *es 265 V. La constante del voltaje del motor es* $K_a\phi_d$ *= 0,18 V/rpm. Se asume que la corriente del motor es continua y no tiene ripple.*

*Para un ángulo de disparo α =30° y corriente de motor establecida, determine la*

*a) Velocidad del motor.*
*b) El torque del motor.*
*c) Potencia del motor.*

*SOLUCIÓN:*

*a) De la ecuación 6-45:*

$$V_t = \frac{2\sqrt{2} \times 265}{\pi} \times \cos 30^o$$
$$V_t = 206{,}6\ V$$

*Luego:*

$$E_a = V_t - R_a I_a$$
$$E_a = 296{,}6 - 0{,}25 \times 40$$
$$E_a = 196{,}6\ V$$

*Por lo tanto la velocidad del motor es:*

$$\omega = \frac{E_a}{K_a \phi_d}$$
$$\omega = \frac{196.6}{0.18} = 1092{,}2\ rpm$$

b) $$Ka\phi d = 0{,}18\frac{V}{rpm} = \frac{0{,}18\times 60}{2\pi}\frac{V\times seg}{rad} = 1{,}72\frac{V\times seg}{rad}$$

$$T = K_a\phi_d I_a = 1{,}72 \times 40$$
$$T = 68{,}75 \ \ N - m$$

c) *La potencia del motor es:*

$$P = R_a(i_a)^2_{rms} + E_a I_a$$

$$K_a\phi_d = 0{,}18\ \frac{V}{rpm} = \frac{0{,}18\times 60}{2\pi}\ \frac{V-seg}{rad} = 1{,}72\ \frac{V-seg}{rad}$$

*Desde que* $\boldsymbol{i_a}$ *no tiene riple:*

$$(i_a)_{rms} = (i_a)_{promedio} = I_a$$
$$P = R_a I_a^2 + E_a I_a = V_t I_a$$
$$P = 206{,}6 \times 40$$
$$P = 8264 \ \ W$$

***EJEMPLO 2**.- La velocidad de un motor **DC** excitado independientemente de 125 H.P., 600 V, 1800 rpm , es controlado por un convertidor completo 3ϕ visto en la figura 6.7.3. El convertidor es operado desde una fuente 3ϕ, 480 V, 60 Hz. La corriente de armadura establecida del motor es 165 A. Los parámetros del motor son Ra = 0,0874 Ω, La =6,5 mH, y $K_a\phi_d$ =0,33 V/rpm.*
*El convertidor y la fuente **A.C.** son considerados ideales.*

*a) Encontrar las velocidades sin carga para los ángulos de disparo α=0° y α=30°. Asuma que la corriente de armadura sin carga es 10% de la corriente establecida y es continua.*
*b) Encontrar el ángulo de disparo para obtener la velocidad establecida de 1800 rpm para corriente del motor dada.*
*c) Calcule la regulación de velocidad para el ángulo de disparo obtenido en la parte (b).*

*SOLUCIÓN:*

***a) Condición sin carga :** El suministro de voltaje de fase es:*

$$V_P = \frac{480}{\sqrt{3}} = 277 \ \ V$$

*El voltaje del motor terminal es:*

$$V_t = \frac{3\sqrt{6}\times 277}{\pi}\cos\alpha = 648\ \cos\alpha$$

*Para $\alpha = 0$:*

$$V_t = 648\ V$$

$$E_a = V_t - R_a I_a$$

$$Ea = 648 - 0{,}0874 \times 16{,}5 = 646{,}6\ V$$

*La velocidad sin carga es:*

$$\omega_0 = \frac{E_a}{K_a \varphi_d} = \frac{646.6}{0.33} = 1959\ rpm$$

*Para $\alpha = 30°$:*

$$V_t = 648 \cos 30° = 561{,}2\ V$$

$$E_a = 561{,}2 - 0{,}0874 \times 16{,}5 = 559{,}8\ V$$

*La velocidad sin carga es:*

$$\omega_0 = \frac{559.8}{0.33} = 1696\ rpm$$

***b) Condición de plena carga :*** *La f.e.m $E_a$ del motor a 1800 rpm es:*

$$E_a = 0{,}33 \times 1800 = 594\ V$$

*El voltaje terminal del motor a corriente establecida es:*

$$V_t = 594 + 0{,}0874 \times 165 = 608{,}4\ V$$

*Debido a esto:*

$$648 \cos \alpha = 608{,}4$$

$$\cos \alpha = \frac{608{,}4}{648} = 0{,}94$$

$$\alpha = 20{,}1°$$

***c) Regulación de velocidad:*** *A plena carga la corriente del motor es 165 A y la velocidad es 1800 rpm. Si la carga es desconectada, manteniendo el ángulo de disparo al mismo valor en $\alpha = 20{,}1°$ . La corriente del motor decrece a 16,5 A. Por ésta razón:*

$$E_a = 608{,}4 - 0{,}0874 \times 16{,}5$$

$$E_a = 606{,}96\ V$$

*y la velocidad sin carga es :*

$$\omega_0 = \frac{606{,}96}{0{,}33} = 1839{,}3\ rpm$$

*La regulación de velocidad es:*

$$r = \frac{1839,3 - 1800}{1800} \times 100\% = 2,18\%$$

### *6.7.2.2 CHOPPERS*

*Un chopper de estado sólido convierte un voltaje fijo **DC** en una fuente **DC** de voltaje variable.*
*Un diagrama esquemático de un chopper se muestra en la figura 6.7.5(a).*
*El Chopper equivale a un switch **ON – OFF** de alta velocidad como se ilustra en la figura 6.7.5(b). El switch **"S"** puede ser un tiristor convencional ( por ejemplo un SCR), una puerta de apagado (**GTO**) de un tiristor, ó un transistor de potencia. Cuando el dispositivo de switching en el chopper está en **ON** , $V_t = V$ (Voltaje suministrado) y la corriente del motor $i_a$ se incrementa. Cuando está en **OFF**, la corriente $i_a$ del motor decae porque el Diodo(D) entra en conducción, haciendo $V_t = 0$. Las formas de onda del voltaje $V_t$ y la corriente $i_a$ están mostradas en la figura 6.7.5(c). El voltaje de salida $V_t$ es un voltaje chopeado derivado desde el voltaje de entrada **V.** El voltaje de salida promedio **Vt,** el cual determina la velocidad del motor **DC** , es*

$$V_t = \frac{t_{on}}{T} V = \alpha V \quad .....(6-52)$$

*Donde:*

- $T_{on}$ *es el tiempo "on" del chopper.*
- $T$ *es el período de chopeo.*
- $\alpha$ *es el "duty ratio" del chopper.*

*Si $V_t = \alpha V$ es obvio que el voltaje terminal del motor varía linealmente con el "duty ratio" del chopper.*

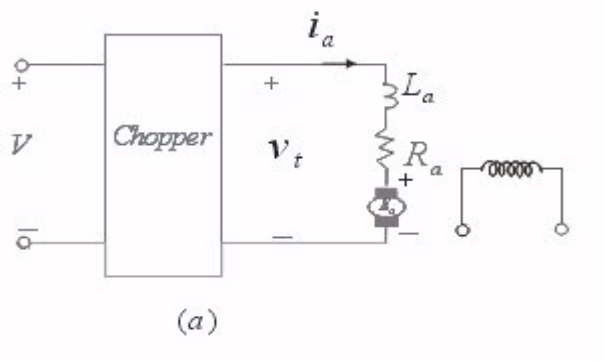



***Figura** 6.7.5a*

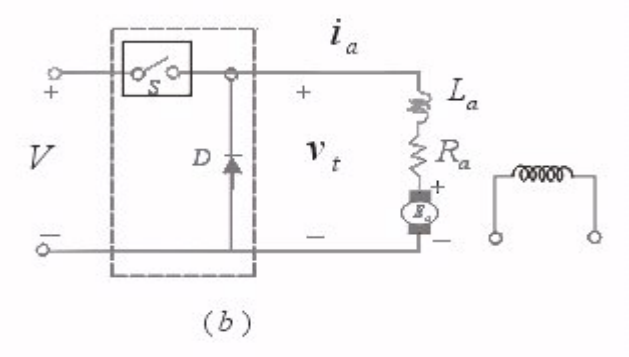



***Figura*** *6.7.5b*

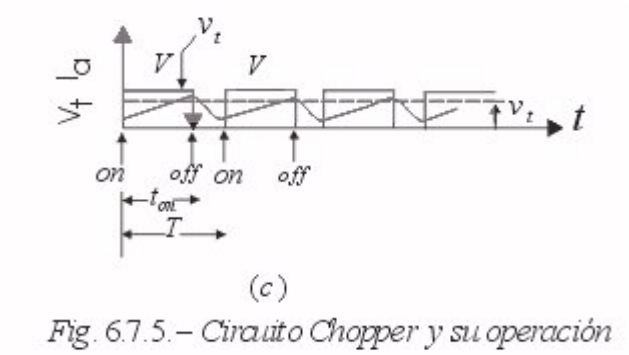



***Figura*** *6.7.5c*

***EJEMPLO 3.-*** *La velocidad de un motor DC excitado independientemente es controlado por un chopper como se muestra en la Fig. 6.7.5. El suministro de voltaje DC es 120 V , la resistencia del circuito de armadura Ra = 0,5 Ω, La inductancia del circuito de armadura La = 20 mH, y la constante del motor es* $K_a\phi_d$ *= 0,05 V / rpm . El motor desarrolla un torque constante de carga requiriendo una corriente promedio de armadura de 20 A . Asuma que la corriente del motor es continua.*
*Determine el:*
*a) Rango de control de velocidad.*
*b )Rango del "duty cycle "*$\alpha$.

*SOLUCIÓN:*

*La mínima velocidad es cero, en el cual* $E_a = 0$.

*Luego:*

$$V_t = E_a + R_a I_a \qquad V_t = R_a I_a = 0{,}5 \times 20 = 10\ V$$

$$V_t = \alpha V = 120\alpha \qquad 10 = 120\alpha \qquad \alpha = \frac{1}{12}$$

*La máxima velocidad corresponde a* $\alpha=1$*, en el cual* $V_t=V=120\ V$

*Luego:*

$$E_a = V_t - R_a I_a = 120 - 0{,}5 \times 20 = 110\ V$$

*Además:*

$$\omega = \frac{E_a}{K_a \phi_d} = \frac{110}{0{,}05} = 2200\ rpm$$

*a) El rango de velocidad es* $0 < \omega < 2200$ *rpm*
*b) El rango del "duty cycle" es* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

### *6.7.3 OPERACIÓN DE LAZO CERRADO*

*Los motores* ***DC*** *son ampliamente usados en muchos sistemas donde el control de velocidad es requerido. En muchas aplicaciones donde se requiere una velocidad constante.*

*La operación de Lazo cerrado de los motores* ***DC*** *es satisfactorio. En la operación de lazo abierto, si el torque de carga cambia, la velocidad también cambiará. En un sistema de lazo cerrado, la velocidad puede ser mantenida constante por ajuste en los terminales del motor como los cambios del torque de carga. El diagrama de bloques básico de un sistema de control de velocidad de lazo cerrado es mostrada en la figura 6.7.6 . Si un torque adicional de carga es aplicado, la velocidad del motor momentáneamente decrece y el error de velocidad* $\varepsilon_\omega$ *se incrementa, el cual incrementa la señal de control* ***Vc****. La señal de control incrementa el voltaje de salida del convertidor ( La señal de control decrece el ángulo de disparo si el convertidor es un rectificador controlado de fase ó incrementa el "duty ratio" si el convertidor es un chopper). Un incremento en el voltaje de armadura del motor desarrolla más torque o restablece la velocidad del motor. El sistema así pasa por un período transitorio hasta que desarrolle el torque de trabajo acorde al torque de carga aplicado.*

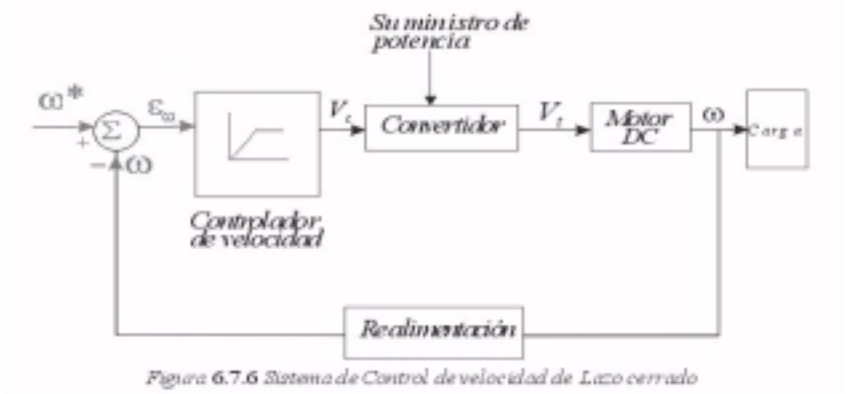



***Figura*** *6.7.6*

*Hay otras ventajas de la operación de Lazo cerrado, así como una gran precisión, aceptable respuesta dinámica, y estabilidad de operación. En un sistema de lazo cerrado las características de funcionamiento pueden también ser hechas para operar a torque constante o potencia de salida constante por encima de cierto rango de velocidad; un requerimiento en sistemas de tracción. El circuito de protección puede también ser proveído en un sistema de lazo cerrado. De hecho, la mayor parte de sistemas de funcionamiento industrial operan como sistemas de realimentación de lazo cerrado.*

*En un motor **DC**. , La resistencia de armadura (**$R_a$**) e inductancia (**$L_a$**) son pequeñas.*

$$\tau_1 = \frac{L_a}{R_a} \quad .....(6-53)$$

*La constante de tiempo $\tau_1$ del circuito de armadura es también pequeña. Consecuentemente, un cambio pequeño en el voltaje terminal de armadura puede resultar en un rápido y gran cambio en la corriente de armadura, el cual podría dañar los dispositivos de estado sólido usado en el convertidor. Una corriente principal puede ser proveída así que la corriente del motor puede ser mantenida a un valor específico. Un diagrama de bloques del sistema es mostrada en La figura 6.7.7. La salida del controlador de velocidad representa un torque guía o de comando. Por que el torque es proporcional a la corriente de armadura, la salida del controlador de velocidad también representa la corriente de comando $I_a^*$, el cual es entonces comparada con la actual corriente $I_a$. Un límite en la salida del controlador de velocidad establecerá por ésta razón el valor de la corriente del motor **Ia**.*

*El controlador de velocidad y el controlador de corriente pueden ser proporcionales (**P**) ó control proporcional – integral (**PI**) . La selección depende de los requerimientos de la performance de funcionamiento.*

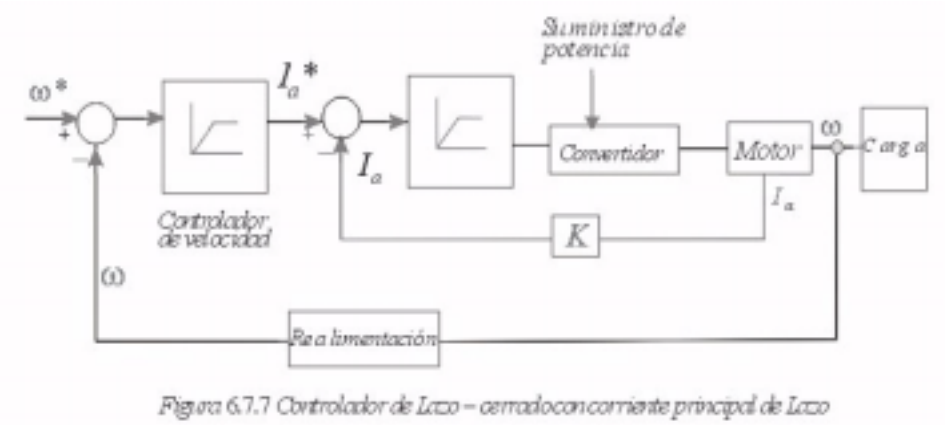



***Figura** 6.7.7*

# *PROBLEMAS RESUELTOS*
# *CAPÍTULO VI*

## *MÁQUINA DE CORRIENTE CONTÍNUA*

***PROBLEMA N° 6.1 :*** *Un motor en derivación de 15 HP, 230V, tiene una resistencia de circuito de armadura igual a 0,19 Ohmios y una resistencia de campo de 145 Ohmios. Cuando está sin carga y con voltaje nominal, la velocidad es 1150 r.p.m. y la corriente de armadura es de 7,65 A. A plena carga y voltaje nominal, la corriente de línea es de 56,1 A, y debido a la reacción de armadura el flujo es 5% menor que su valor sin carga. ¿Cuál es su valor a plena carga?*

*SOLUCIÓN:*

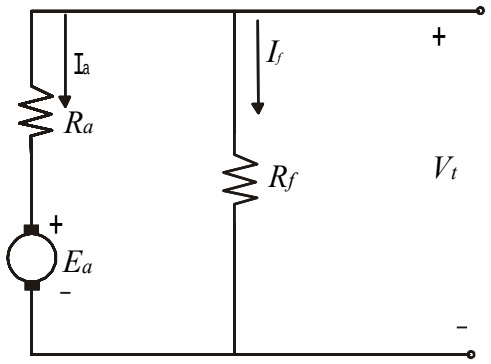



***Figura*** *P6.1.1*

*Sin carga:*

$$E_a = V_t - R_a \times I_a = 230 - 0{,}19 \times 7{,}65$$

$$E_a = 228{,}5465V$$

$$K_a \times \phi_d = \frac{E_a}{W_m} = \frac{228{,}5465}{1150 \times \frac{\pi}{30}} = 1{,}9$$

*A plena carga:*

$$K_a \times \phi_d = 0{,}95 \times 1{,}9 = 1{,}805$$

$$I_L = 56{,}1A$$

$$I_f = \frac{230}{145} = 1{,}6A$$

$$I_a = 54{,}5A$$

$$E_a = V_t - R_a \times I_a = 230 - 0{,}19 \times 54{,}5 = 219{,}65V$$

$$W_m = \frac{E_a}{K_a \times \phi_d} = \frac{219{,}65}{1{,}805} = 121{,}69 rad/seg.$$

$$\therefore\ W_m = 1162{,}1\ r.p.m.$$

***PROBLEMA N° 6.2 :*** *Dos motores en derivación de CD, de velocidad ajustable, tienen velocidades máximas de 1850 r.p.m. y mínimas de 550 r.p.m. Se obtiene ajuste de velocidad mediante control con reóstato de campo. El motor A impulsa una carga que requiere potencia constante en todo intervalo de velocidad; el motor B impulsa una carga que necesita de par constante. Se pueden omitir todas las pérdidas y la reacción de armadura.*

*a) Si las potencias de salida son iguales a una velocidad de 1850 r.p.m. y las corrientes de armadura son de 100 A en cada caso, ¿Cuáles serán las corrientes de armadura a 550 r.p.m.?*

*b) Si las potencias de salida son iguales a una velocidad de 550 r.p.m. y las corrientes de armadura son de 100 A en ambos casos, ¿Cuáles serán las corrientes de armadura a 1850 r.p.m.?*

*c) Conteste las partes a) y b) para un ajuste de velocidad mediante control de voltaje de armadura, con las demás condiciones iguales.*

*SOLUCIÓN:*

$$V_t = Constante = E_a$$

$$Motor\ A: P = constante = E_a \times I_a \quad \Rightarrow \quad I_a = constante$$

$$Motor\ B: T = constante = K_a \times \phi_d \times I_a = \frac{E_a}{W_m} \times I_a \quad \Rightarrow \quad I_a = K \times W_m$$

$$a)\ I_a = 100A \quad W_m = 1850\ r.p.m.$$

$$I_a' = ? \qquad W_m' = 550\ r.p.m.$$

$$Motor\ A: \quad I_a = 100\ A$$

$$Motor\ B: \quad I_a = 100 \times \frac{550}{1850} = 29{,}73\ A$$

$$b)\ I_a = 100A \quad W_m = 550\ r.p.m.$$

$$I_a' = ? \qquad W_m' = 1850\ r.p.m.$$

$$Motor\ A: \quad I_a = 100\ A$$

$$Motor\ B: \quad I_a = 100 \times \frac{1850}{550} = 336{,}36\ A$$

$$c)\ E_a = V_t = K_a \times \phi_d \times W_m \quad \Rightarrow \quad E_a = K \times W_m$$

$$Motor\ A: \quad I_a = K \times W_m$$

$$Motor\ B: \quad I_a = constante$$

$$Motor\ A: \quad I_a = 100 \times \frac{550}{1850} = 29{,}73\ A \quad Motor\ B: \quad I_a = 100\ A$$

$$Motor\ B: \quad I_a = 100 \times \frac{1850}{550} = 336{,}36\ A \quad Motor\ B: \quad I_a = 100\ A$$

***PROBLEMA N° 6.3 :*** *El motor en serie de un tren de 150 HP, 600V, 600 r.p.m., de CD tiene una resistencia combinada de campo y armadura (incluyendo escobillas) igual a 0,165 Ohmios.*

*La corriente de plena carga al voltaje y velocidad nominales es 186 A. La curva de magnetización a 400 r.p.m. es la siguiente:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *f.e.m. generada (V)* | *375* | *400* | *425* | *450* |
| *Amperes de campo* | *169* | *194* | *225* | *261* |

*Calcule el par interno de arranque cuando la corriente de arranque se limita a 340 A. Suponga que la reacción de armadura es equivalente a una fuerza electromotriz de desmagnetización que varía de acuerdo con el cuadrado de la corriente.*

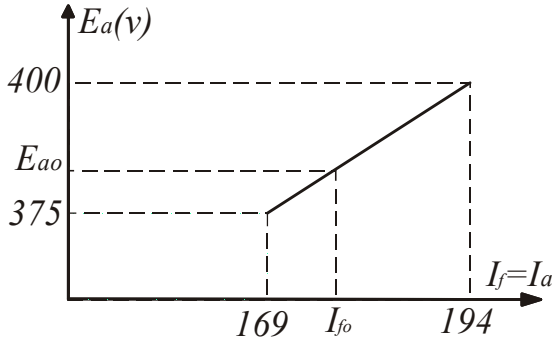
*SOLUCIÓN:*

*Motor 600V, 600 r.p.m., 186 A*

$$E_a = V_t - (R_c + R_a) \times I_a = 600 - 0{,}165 \times 186 = 569{,}31V \quad \text{A plena carga.}$$

*De la curva de magnetización a 400 r.p.m.:*

$$\frac{E_{a0}}{400} = \frac{E_a}{600} \quad \Rightarrow \quad E_{a0} = \frac{569{,}31 \times 400}{600} = 379{,}54V$$




$$I_{f0} = 169 + \frac{(E_{a0} - 375)}{(400 - 375)} \times (194 - 169)$$

**Figura** *6.3.1*

$$I_{f0} = 173{,}54A \quad \Rightarrow \quad \Delta I_f = 186 - 173{,}54 = 12{,}46A$$

*Por dato del problema:*

$$\text{reacción de armadura} = \Delta I_f \times \left(\frac{I_a}{I_{aN}}\right)^2 = \Delta I_f \times \left(\frac{I_a}{186}\right)^2$$

*Para una corriente de arranque:*

$$I_a = 340A$$

$$\Delta I_f^* = 12{,}46 \times \left(\frac{340}{186}\right)^2 = 41{,}63A$$

$$\therefore \quad I_{f\,neto} = 340 - \Delta I_f^* = 340 - 41{,}63 = 298{,}37A$$

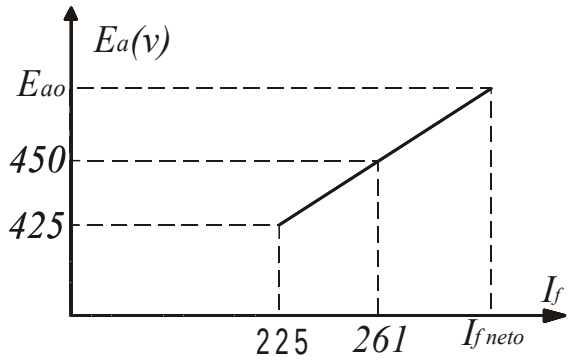



**Figura** *P6.3.2*

$$E_{a0} = 450 + (I_{f\ neto} - 261) \times \frac{(450-425)}{(261-225)} = 476V$$

$$W_{m0} = 400 r.p.m. = 400 \times \frac{\pi}{30} rad/seg$$

$$E_{a0} = K_a \times \varphi_d \times W_{m0} \quad y \quad T = K_a \times \varphi_d \times I_a$$

$$\therefore \quad T = \frac{E_{a0} \times I_a}{W_{m0}} = \frac{476 \times 340}{400 \times \frac{\pi}{30}} = 3864 N-m$$

***PROBLEMA N° 6.4 :***

*a) Un motor de CD en derivación, de 230V, se usa como impulsor de velocidad ajustable dentro del intervalo de 0 a 1500 r.p.m. Se obtienen velocidades de 0 a 750 r.p.m. cuando se ajusta el voltaje en terminales de armadura de 0 a 230V manteniendo constante la corriente de campo. Las velocidades de 750 a 1500 r.p.m. se obtienen disminuyendo la corriente y manteniendo el voltaje en terminales de armadura en 230V. En el intervalo completo de velocidades, el par necesario por la carga permanece constante. Indique la forma general de la curva de corriente de armadura contra velocidad en todo el intervalo. Omita las pérdidas de la máquina y los efectos de reacción de armadura.*

*b) Suponga que en lugar de mantener constante el par de la carga, la corriente de armadura no debe exceder determinado valor. Indique la forma general de la curva del par admisible de carga contra velocidad, suponiendo las demás condiciones como las de la parte a).*

*SOLUCIÓN:*

*Despreciando las pérdidas de la máquina y los efectos de reacción de armadura.*

$$E_a = V_t \quad ; \quad T \times W_m = E_a \times I_a = V_t \times I_a$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{V_t \times I_a}{W_m} \quad ; \quad E_a = K_a \times \phi_d \times W_m$$

$a)\quad T = constante \quad ; \quad 0 < W_m < 750 \quad ; \quad I_f = constante \quad ; \quad 0 < V_t < 230$

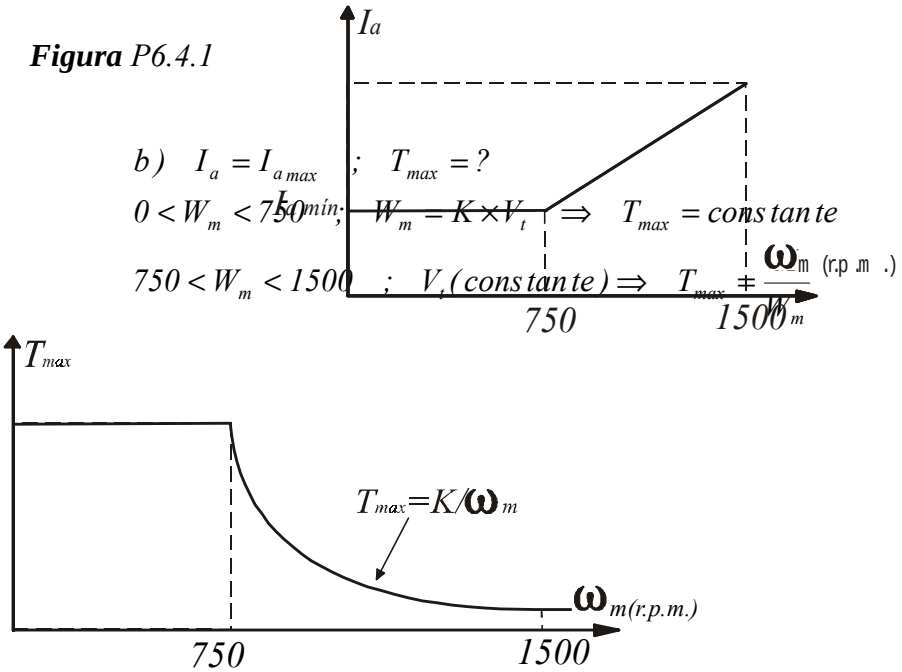
*De las condiciones :*

$\phi_d = constante \qquad W_m = K \times V_t \quad \Rightarrow \quad I_a = constante$

$750 < W_m < 1500 \quad ; \quad V_t = constante \quad ; \quad I_f (varía)$

$I_a = K \times W_m$

**Figura** *P6.4.1*




$b)\quad I_a = I_{a\,max} \quad ; \quad T_{max} = ?$

$0 < W_m < 750 \quad ; \quad W_m = K \times V_t \quad \Rightarrow \quad T_{max} = constante$

$750 < W_m < 1500 \quad ; \quad V_t (constante) \Rightarrow \quad T_{max} = \dfrac{K}{W_m}$

**Figura** *P6.4.2*

***PROBLEMA N° 6.5 :*** *Cuando trabaja con una fuente de corriente directa de 230V, un motor en serie de CD trabaja a 900 r.p.m. con una corriente de línea de 75 A. Su resistencia del circuito de armadura es 0,13 Ohmios, y la resistencia de su campo en serie es 0,09 Ohmios. A causa de los efectos de saturación, el flujo a una corriente de 25 A es 45% del de una corriente de armadura de 75 A. Calcule la velocidad del motor cuando el voltaje de armadura es 230V y la corriente es 25 A.*

*SOLUCIÓN:*

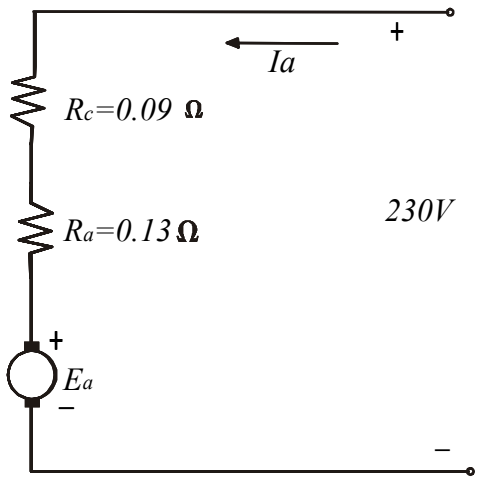



**Figura** *P6.5.1*

$$* \quad 75A\,;\,900r.p.m. \quad (W_m = 900 \times \frac{\pi}{30} = 30\pi rad/seg.):$$

$$E_a = V_t - I_a \times (R_c + R_a) = 230 - 75 \times (0{,}09 + 0{,}13) = 213{,}5V$$

$$\therefore \quad E_a = 213{,}5V$$

$$K_a \times \phi_d = \frac{E_a}{W_m} = \frac{213{,}5}{30\pi} = 2{,}2653$$

$$** \quad 25A:$$

$$K_a \times \phi_d = \frac{45}{100}(2{,}2653) = 1{,}019385$$

$$E_a = 230 - 25 \times (0{,}09 + 0{,}13) = 224{,}5V$$

$$\therefore \quad E_a = 224{,}5V$$

$$W_m = \frac{E_a}{K_a \times \phi_d} = \frac{224{,}5}{1{,}019385} = 220{,}231 rad/seg$$

$$\therefore W_m = 2103{,}1 r.p.m.$$

***PROBLEMA N° 6.6:*** *Un generador en derivación de 15KW, 250V, 1150r.p.m., está impulsado mediante una máquina prima cuya velocidad es 1195r.p.m. cuando el generador opera sin carga. La velocidad baja a 1150r.p.m. cuando el generador entrega 15KW, y se puede suponer que disminuye en proporción con la salida del generador. Se le va a modificar para tenerlo en conexión compuesta corta, equipándolo con un campo serie que cause que el voltaje aumente de 230V sin carga a 250V para una carga de 65,2 A.*

*Se estima que el campo en serie tendrá una resistencia de 0,06Ohmios. La resistencia de armadura (incluyendo las escobillas) es de 0,17Ohmios, El devanado de campo en derivación tiene 1800 vueltas por polo.*
*Para determinar las vueltas del campo en serie necesarias, se hace trabajar a la máquina como generador con excitación separada y se obtienen los siguientes datos de carga:*

*Voltaje de terminales de armadura: 254V*
*Corriente de armadura : 66,5 A*
*Corriente de campo : 1,95 A*
*Velocidad : 1145r.p.m.*

*La curva de magnetización a 1195 r.p.m. es la siguiente:*

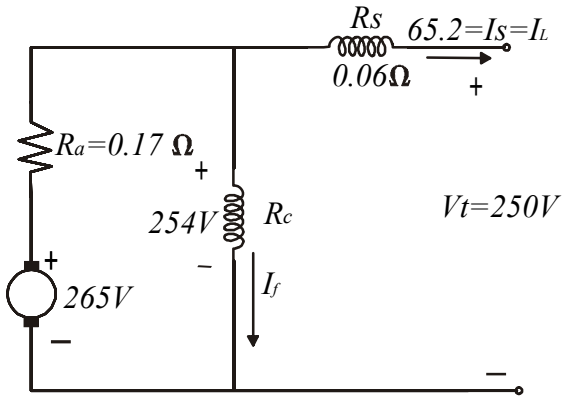
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_a(V)$ | 230 | 240 | 250 | 260 | 270 | 280 |
| $I_f(A)$ | 1,05 | 1,13 | 1,25 | 1,44 | 1,65 | 1,91 |

*Calcule:*

*a) El número necesario de vueltas por polo del campo en serie.*
*b) La reacción de armadura en Ampere-vueltas equivalente de desmagnetización por polo para $I_a$ = 66,5 A.*

*SOLUCIÓN:*

*a)* $N_S = ??$




$$P = 250 \times 65{,}2 = 16{,}3KW$$

$$W_m = 1195 - \frac{16{,}3}{15} \times 45 = 1146 r.p..m.$$

**Figura** *P6.6.1*

*De la curva de magnetización sin carga:*

$$R_c = \frac{230}{1{,}05} = 219\Omega$$

$$\therefore \quad I_f = \frac{254}{219} = 1{,}16\,A$$

*De los datos con carga:*

$$I_f' = 1{,}95\,A$$

$$I_f' = I_f + \frac{N_S}{N_f} \times I_S \quad \Rightarrow \quad N_S = \frac{(I_f' - I_f)}{I_S} \times N_f = \frac{1{,}95 - 1{,}16}{65{,}2} \times 1800 = 21{,}8$$

$$\therefore \quad N_S = 22 vueltas\ por\ polo.$$

$$b) \quad E_a = 265V \quad W_m = 1146 r.p.m. \quad ; \quad E_{a0} = ?? \quad W_{m0} = 1195 r.p.m.$$

$$E_{a0} = \frac{W_{m0}}{W_m} \times E_a = \frac{1195}{1146} \times 265 = 276{,}33V \quad \Rightarrow \quad E_{a0} = 276V$$

*Para* $E_{a0} = 276V$ *y* $W_{m0} = 1195r.p.m.$ *De la curva de magnetización se obtiene :*
$I_f = 1{,}85A$
*La corriente de armadura bajo carga es :* $I_a = 66{,}5A \Rightarrow I_f' = 1{,}95A$

*Por lo tanto, la Reacción de Armadura de Desmagnetización es:*

$$(I_f' - I_f) \times N_f = (1{,}95 - 1{,}85) \times 1800 = 180A - vuelta / polo.$$

***PROBLEMA N° 6.7 :*** *Un motor serie de 120V, 1750r.p.m. demanda 37,8 A a su carga nominal de 3,5KW; su resistencia del circuito de armadura que incluye todo excepto el campo en serie es de 0,277 Ohmios, mientras que la resistencia del campo en serie es de 0,163 Ohmios. Si la carga se reduce hasta que la velocidad angular nominal alcanza su máximo de seguridad de 3500 r.p.m., la corriente de línea alcanza el valor de 10,2 A.*

*a) Calcule el cambio porcentual en el flujo de campo.*
*b) Calcule la potencia a esta velocidad.*
*c) Si la carga se aumenta hasta disminuir la velocidad a 1200r.p.m. y el flujo de campo no puede aumentar debido a la saturación ¿Qué corriente se demanda entonces?.*
*d) ¿Qué potencia se desarrolla en c)?.*

*SOLUCIÓN:*

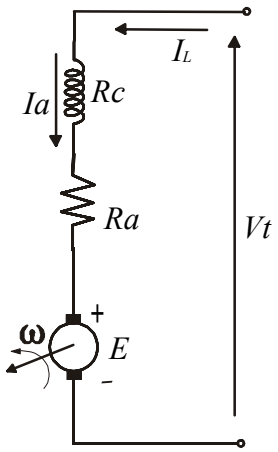



**Figura** *P6.7.1*

*CASO 1 :*
$i)\ V_{in} = V_t = 120V$
$W = 1750r.p.m.$
$I = I_L = 37{,}8A$
$P_2 = 3{,}5KW$
$R_a = 0{,}277\Omega$
$R_c = 0{,}163\Omega$

*CASO 2 :*
$ii)\ W_{seg} = 3500r.p.m.$
$I_L = 10{,}2A$

*CASO 1:* $E = V_t - (R_c + R_a) \times I = 120 - 0{,}44 \times 37{,}8 = 103{,}368V$

*Como:*

$E \times I_a = P_2 + P_{rot}$ *(Gráfico de Potencias)*
$P_{rot} = E \times I_a - P_2 = 407{,}3W$*(Las pérdidas rotacionales se consideran constantes)*

*Como* $E = K_a \times \phi_d \times W \rightarrow K_a \times \phi_d = \dfrac{E}{W}$

$K_a \times \phi_{d1} = 0{,}564\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ (\alpha)$

*a) Caso 2:*

*De i)* $V_t = 120V \quad ; \quad I = 10{,}2A \quad ; \quad W_{seg} = 3500r.p.m.$

$$E = V_t - (R_c + R_a) \times I = 115{,}512V$$

$$K_a \times \phi_{d2} = 0{,}315 \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda (\beta)$$

$$\alpha/\beta : \frac{\phi_{d1}}{\phi_{d2}} = 1{,}7905$$

$$Cambio\ Porcentual : \frac{\phi_{d1} - \phi_{d2}}{\phi_{d1}} \times 100\% = 44{,}15\%$$

*Es decir el flujo disminuye 44,15%*

*b)* $P_2 = E \times I_a - P_{rot} = 115{,}512 \times 10{,}2 - 407{,}3$

$$\therefore P_2 = 770{,}9224W$$

*c)* $P_2$ *aumenta para W=1200r.p.m.*
$\phi_d$ *no aumenta debido a la saturación. Por lo tanto consideremos el mismo de su condición nominal, de* $\alpha$ *tendremos:*

$$K_a \times \phi_d = 0{,}564$$

$$E = K_a \times \phi_d \times W = 0{,}564 \times 1200 \times \frac{\pi}{30} = 70{,}87V$$

$$I = \frac{V_t - E}{R_a + R_c} = 111{,}66A$$

*d)*

$$P_2 = E \times I_a - P_{rot} = 70{,}87 \times 111{,}66 - 407{,}3$$

$$\therefore P_2 = 7506W$$

***PROBLEMA N° 6.8 :*** *Un motor de 500 V DC a carga nominal tiene una velocidad de 1500 r.p.m. y toma una corriente de armadura de 50 A. La resistencia de armadura es de 0,5 Ohmios y la resistencia de campo Shunt es de 200 Ohmios. Si el torque de pérdidas es de 5N-m, determinar:*

*a) El torque eléctrico, la potencia de salida y la eficiencia.*
*b) El torque eléctrico cuando el flujo es disminuido para obtener una velocidad de 2000 r.p.m. si la corriente de armadura se incrementa en un 25% más.*

*SOLUCIÓN:*

*Considerado el motor:*

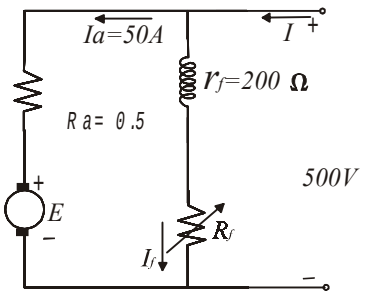



***Figura*** *P6.8.1*

*De donde obtenemos:*

$$R_f = 0 \quad \Rightarrow \quad I_f = \frac{500}{200} = 2{,}5A$$

$$I = I_a + I_f = 52{,}5A$$

$$\therefore \text{Potencia de entrada} = 52{,}5 \times 500 = 26{,}25KW$$

*a)*

$$E = K_a \times \phi_d \times W = 500 - 0{,}5 \times 50 = 475V \quad \Rightarrow \quad K_a \times \phi_d = \frac{E}{W} = \frac{475}{1500 \times \frac{\pi}{30}} = 3{,}024$$

$$\Rightarrow \quad T_e = K_a \times \phi_d \times I_a = 3{,}024 \times 50 = 151{,}2N - m$$

$$T_L = T_e - T_{perd} = 151{,}2 - 5 = 146{,}2N - m$$

$$\Rightarrow \quad P_{sal} = T_L \times W = 146{,}2 \times 1500 \times \frac{\pi}{30} = 22{,}965KW$$

$$\therefore \eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} = \frac{22{,}965}{26{,}25} = 0{,}875 \equiv 87{,}5\%$$

*b)*

$$E = V - R_a \times 1{,}25I_a = 500 - 0{,}5 \times \frac{125}{100} \times 50 = 468{,}75V = K_a \times \phi_d \times W$$

$$\Rightarrow \quad K_a \times \phi_d = \frac{468{,}75}{2000 \times \frac{\pi}{30}} = 2{,}238$$

$$T_e = K_a \times \phi_d \times 1{,}25I_a = 2{,}238 \times 1{,}25 \times 50$$

$$\therefore \quad T_e = 139.875N - m$$

***PROBLEMA N° 6.9 :*** *Un motor Shunt DC de 500 V tiene una eficiencia del 90% cuando entrega 40 KW a una carga impulsada a 500 r.p.m. La resistencia del circuito de armadura y del circuito de campo son de 0,23 Ohmios y 400 Ohmios respectivamente.*
*La siguiente expresión que representa la característica del motor fue obtenida cuando el motor se ensayó como generador en vacío y a 600 r.p.m.*

$$E(Voltios) = \frac{3{,}128 \times 10^3 \times I_f}{4{,}35 + I_f}$$

*Calcular:*

*a) La corriente de armadura.*
*b) El torque eléctrico.*
*c) El torque de pérdidas rotacionales.*
*d) La resistencia adicional de campo necesaria para que el motor gire a 1200 r.p.m., con una corriente de armadura y torque de pérdidas constantes y a voltaje nominal.*
*Calcular además la potencia en estas condiciones.*

*SOLUCIÓN:*

*Tenemos el circuito equivalente del motor Shunt:*

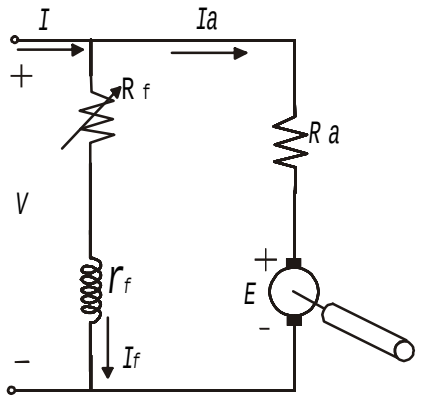



***Figura** P6.9.1*

*a)*

$$Como\ \eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} = \frac{40\times 10^3}{V\times I} = 0{,}9 \quad y\ como\ V = 500V \quad \Rightarrow \quad I = 88{,}89A$$

$$Como\ R_a = 0{,}23\Omega\ y\ r_f = 400\Omega \quad \rightarrow \quad I_f \approx \frac{500}{400} = 1{,}25A$$

$$\therefore \quad I_a = I - I_f = 88{,}89 - 1{,}25 = 87{,}64A$$

*b)*

$$Sabemos\ que\ el\ Torque\ Eléctrico\ está\ dado\ por: \quad T_e = K_a \times \phi_d \times I_a \quad y \quad E = K_a \times \phi_d \times W$$

$$y\ E = V - R_a \times I_a \quad \Rightarrow \quad K_a \times \phi_d = \frac{V - R_a \times I_a}{W}$$

$$\therefore \quad T_e = \frac{V - R_a \times I_a}{W} \times I_a = \left( \frac{500 - 0{,}23\times 87{,}64}{500 \times \frac{\pi}{30}} \right) \times 87{,}64 = 803{,}16N - m$$

*c)* $$Tenemos: \quad T_e = T_L + T_{perd.} \quad \Rightarrow \quad T_{perd.} = T_e - T_L$$

$$T_L = \frac{P_{sal}}{W} = \frac{40\times 10^3}{500\times \frac{\pi}{30}} = 763{,}944N - m$$

$$\therefore T_{perd} = 803{,}16 - 763{,}944 = 39{,}216N\text{ - }m$$

*d) Nos piden:* $R_f \Rightarrow tenemos:$

$$W = 1200r.p.m. = 40\pi rad/seg.$$

$$I_a = constante = 87{,}64A \quad T_{perd} = Constante = 39{,}216N - m$$

$$E = V - R_a \times I_a = 500 - 0{,}23\times 87{,}64 = 479{,}84V = E_1$$

*Para el nuevo W, tenemos:*

$$E = K_a \times \phi_d \times W \quad \Rightarrow \quad K_a \times \phi_d = \frac{479{,}84}{1200 \times \frac{\pi}{30}} = 3{,}8185$$

*Como tenemos E=f($I_f$) para un $W_1$. En nuestro caso:*

$$W_0 \neq W_1$$

*Donde:*

$$W_0 = 600 r.p.m. \text{ y } W_1 = 1200 r.p.m.$$

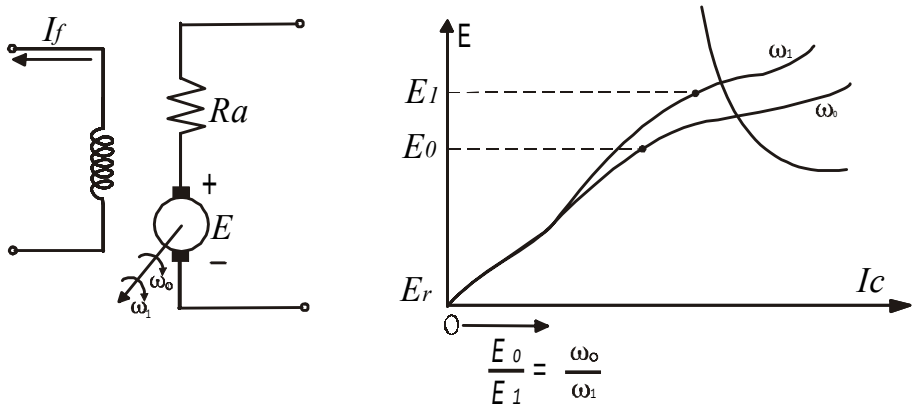



**Figura** *P6.9.2*

$$\therefore \quad E_1 = \frac{3{,}128 \times 10^3 \times I_f}{4{,}35 + I_f} \times \frac{W_1}{W_0}$$

$$\Rightarrow \quad 479{,}84 = \frac{3{,}128 \times 10^3 \times I_f}{4{,}35 + I_f} \times 2 \quad \Rightarrow \quad I_f = 0{,}3614 A$$

$$R_f + r_f = \frac{500}{0{,}3614} = 1383{,}5\Omega \quad \text{Pero como } r_f = 400\Omega$$

$$\therefore \quad R_f = 983{,}5\Omega$$

$$P_{sal} = T_e \times W - T_{perd} \times W = K_a \times \phi_d \times I_a \times W - 39{,}216 \times 1200 \times \frac{\pi}{30}$$

$$P_{sal} = 3{,}8185 \times 87{,}64 \times 1200 \times \frac{\pi}{30} - 39{,}216 \times 1200 \times \frac{\pi}{30}$$

$$\therefore \quad P_{sal} = 37{,}125 KW$$

**PROBLEMA N° 6.10 :** *Se dispone de un motor de derivación (Shunt) con los siguientes datos a plena carga:*

| | | |
|---|---|---|
| *Velocidad Nominal* | : | *1800 r.p.m.* |
| *Tensión Nominal* | : | *230 Voltios* |
| *Resistencia de Armadura* | : | *0,82 Ohmios* |
| *Corriente de Armadura* | : | *28,2 A* |
| *Caída de tensión en las escobillas* | : | *3 Voltios.* |

*Se pide calcular:*

*a) La resistencia externa para que en el momento del arranque ó puesta en marcha la corriente de armadura no supere el 150% del valor nominal.*

*b) La velocidad que alcanza el rotor a torque nominal si no se elimina esta resistencia.*

*c) La corriente de arranque de la armadura si no se intercala la resistencia externa en el circuito de armadura.*

*Con la finalidad de no superar la corriente de armadura en más del 150% arrancando a torque nominal, se pide:*

*d) Las resistencias de cada paso ó tramo hasta alcanzar su velocidad nominal.*

*SOLUCIÓN:*

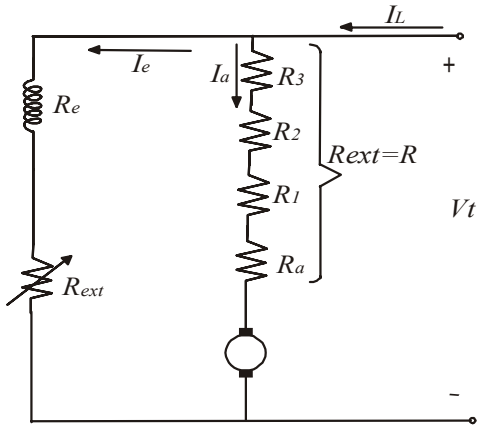



**Figura** *P6.10.1*

a) $$R = \frac{V_t - \Delta V_{esc.}}{1{,}5 \times I_{an}} - R_a = \frac{230-3}{1{,}5 \times 28{,}2} - 0{,}82 = 4{,}5464\Omega$$

b) $$E_o = (V_t - \Delta V_{esc.}) - (R + R_a) \times I_{an} = 227 - 5{,}3664 \times 28{,}2 = 75{,}6675V$$

$$E_N = 227 - I_{an} \times R_a = 227 - 28{,}2 \times 0{,}82 = 203{,}876V$$

$$W_{m0} = W_{nom} \times \frac{E_0}{E_N} = 1800 \times \frac{75{,}6675}{203{,}876} = 668 r.p.m.$$

c) $$V_t = \Delta V_{esc.} + R_a \times I_{arranque} \qquad (En\ el\ arranque)$$

$$I_{arranque} = \frac{V_t - \Delta V_{esc.}}{R_a} = \frac{230-3}{0{,}82} = 276{,}83A$$

d) $$V_t - \Delta V_{esc.} = E_o + (R_a + R_1) \times 1{,}5 \times I_{aN}$$

$$* R_1 = \frac{227 - 75{,}6675}{1{,}5 \times 28{,}2} - 0{,}82 = 2{,}7576\Omega$$

$$\Delta R_1 = R - R_1 = 1{,}7888\Omega$$

$$E_1 = 227 - I_{aN} \times (R_1 + R_a) = 227 - 28{,}2 \times 3{,}5776 = 126{,}112V$$

$$W_{m1} = 1800 \times \frac{E_1}{E_N} = 1800 \times \frac{126{,}112}{203{,}876} = 1113{,}43 r.p.m.$$

$$* \; R_2 = \frac{227 - E_1}{1,5 \times 28,2} - 0,82$$

$$\therefore \quad R_2 = 1,565\Omega$$

$$\Delta R_2 = R_1 - R_2 = 1,1926\Omega$$

$$E_2 = 227 - 28,2 \times (R_2 + R_a) = 227 - 28,2 \times 2,385$$

$$\therefore E_2 = 159,743V$$

$$W_{m2} = 1800 \times \frac{E_2}{E_N} = 1800 \times \frac{159,743}{203,876} = 1410,354 \quad r.p.m.$$

$$* \; R_3 = \frac{227 - E_2}{1,5 \times 28,2} - 0,82 = 0,7701\Omega$$

$$\Delta R_3 = R_2 - R_3 = 0,7949\Omega$$

$$E_3 = 227 - 28,2 \times (R_3 + R_a) = 227 - 28,2 \times 1,5901$$

$$E_3 = 182,1592V$$

$$W_{m3} = 1800 \times \frac{182,1592}{203,876} = 1608,2646 r.p.m.$$

$$* \; R_4 = \frac{227 - E_3}{1,5 \times 28,2} - 0,82 = 0,2401\Omega$$

$$\Delta R_4 = R_3 - R_4 = 0,53\Omega$$

$$E_4 = 227 - 28,2 \times (R_4 + R_a) = 227 - 28,2 \times 1,0601$$

$$E_4 = 197,1052V$$

$$W_{m4} = 1800 \times \frac{197,1052}{203,876} = 1740,22 r.p.m.$$

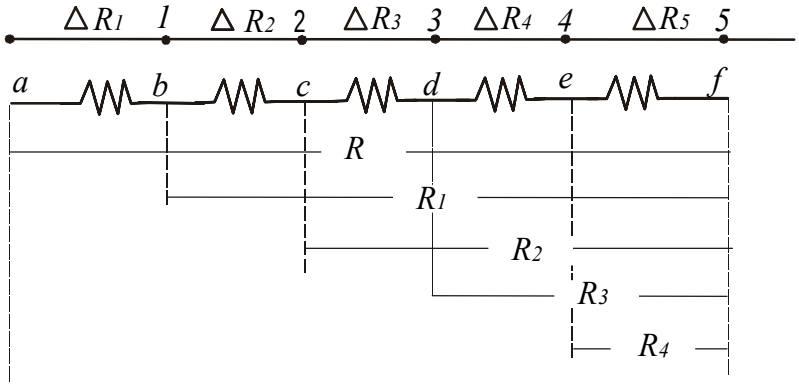



***Figura*** *P6.10.2*

***PROBLEMA N° 6.11 :*** *Un motor DC de 20HP, 230 V y I=76 A, tiene una característica de vacío:*

$$E = \frac{402,46 \times I_f}{0,6769 + I_f}$$

*tomada a 1800 r.p.m. Se sabe además que* $r_a$*=0,0814 Ohmios y* $r_f$*=260 Ohmios.*

*a) Calcular el torque eléctrico y la velocidad cuando el motor entrega su potencia nominal.*

*b) Calcule el torque de pérdidas rotacionales y considerar que su valor varía proporcionalmente con la velocidad.*

*c) En el esquema mostrado, el motor será dotado de 2 resistencias $R_a$ y $R_f$ para el arranque y el control de la velocidad. El motor impulsará una carga de 30N-m de característica constante con la velocidad.*

*En el arranque (W=0) $R_a$ se regula al máximo para limitar la corriente $I_a$ y $R_f$ se regula a cero para obtener el máximo flujo y un torque eléctrico mayor que el torque de la carga.*

*c1) Calcular $R_a$ , para limitar la corriente $I_a$=0,5 $I_{anom}$ y el torque eléctrico de arranque.*

*c2) Una vez que la carga se pone en movimiento, calcular la velocidad que alcanzará el sistema con $R_a$ obtenida y $R_f$=0 y la corriente $I_a$ .*

*c3) Si a continuación se reduce $R_a$ hasta cero, manteniendo $R_f$ =0, calcular la velocidad W alcanzada, E e $I_a$ .*

*c4) Para alcanzar la velocidad de 3000r.p.m. se debe incrementar la resistencia $R_f$ hasta un cierto valor. Calcular dicha resistencia y además E, $I_a$ , $T_e$ y la eficiencia.*

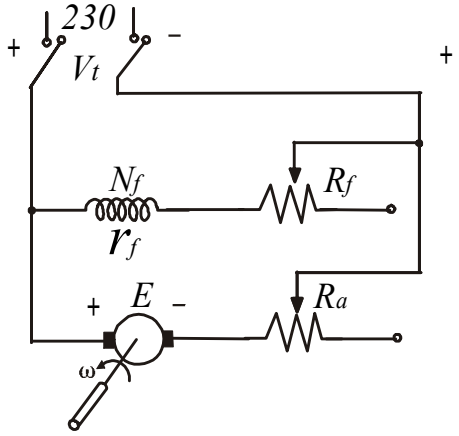



**Figura** *P6.11.1*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$I_f = \frac{230}{260} = 0{,}8846\,A \qquad I_a = I - I_f = 76 - 0{,}8846 = 75{,}115\,A$$

$$E(a\ 1800r.p.m.) = \frac{402{,}46 \times 0{,}8846}{0{,}6769 + 0{,}8846} = 227{,}996V$$

$$Pero\ E = K_a \times \phi_d \times W \quad \Rightarrow \quad K_a \times \phi_d = \frac{227{,}996}{1800 \times \frac{\pi}{30}} = 1{,}21$$

$$T_{e\,nom} = K_a \times \phi_d \times I_{a\,nom} = 1{,}21 \times 75{,}115 = 90{,}88915\,N-m$$

$$W_{nom} = \frac{E}{K_a \times \phi_d} = \frac{V_t - r_a \times I_a}{1{,}21} = \frac{230 - 0{,}0814 \times 75{,}115}{1{,}21} = 185{,}03 rad/seg$$

*b)*

$$V_t = E + r_a \times I_a$$

$$V_t \times I_a = E \times I_a + r_a \times I_a^{\ 2}$$

$$V_t \times I_a = P_{perd} + P_{sal} + r_a \times I_a^{\ 2}$$

$$V_t \times I_a = W \times T_{perd} + W \times T_L + r_a \times I_a^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad T_{perd} = \frac{V_t \times I_a - W \times T_L - r_a \times I_a^{\ 2}}{W}$$

$$\therefore T_{perd} = \frac{230 \times 75{,}115 - 20 \times 746 - 0{,}0814 \times 75{,}115^2}{185{,}03} = 10{,}253 N - m$$

*Por condiciones del problema:*

$$T_{perd} = K \times W \quad \Rightarrow \quad K = \frac{T_{perd}}{W} = \frac{10{,}253}{185{,}03} = 0{,}0554$$

$$\therefore \quad T_{perd} = 0{,}0554 \times W$$

*c) En el arranque: W=0 entonces E=0* $\quad I_{arranque} = \dfrac{V_t - E}{r_a} = \dfrac{V_t}{r_a + R_a}$

*c1)*

$$0{,}5 \times 75{,}115 = \frac{230}{r_a + R_a} \quad \Rightarrow \quad r_a + R_a = 6{,}12394\Omega$$

$$\rightarrow \quad R_a = 6{,}12394 - 0{,}0814 = 6{,}0425\Omega$$

$$T_{e\,arranque} = K_a \times \phi_d \times I_{arranque} = 1{,}21 \times 0{,}5 \times 75{,}115 = 45{,}4446 N - m$$

*c2)*

$$T_e = T_L + T_{perd} = K_a \times \phi_d \times I_a \qquad I_a = \frac{V_t - E}{r_a + R_a} \qquad E = K_a \times \phi_d \times W$$

$$T_L + T_{perd} = K_a \times \phi_d \times \frac{V_t - K_a \times \phi_d \times W}{r_a + R_a}$$

$$V_t - K_a \times \phi_d \times W = \frac{T_L + T_{perd}}{K_a \times \phi_d} \times (r_a + R_a)$$

$$V_t - \frac{(r_a + R_a)}{K_a \times \phi_d} \times (T_L + K \times W) = K_a \times \phi_d \times W$$

$$230 - \frac{6{,}12394}{1{,}21} \times (30 + 0{,}0554 \times W) = 1{,}21 \times W$$

*Resolviendo la expresión anterior:*

$$W = 52{,}447 rad / seg = 500{,}832 r.p.m.$$

$$E = K_a \times \phi_d \times W = 1{,}21 \times 52{,}447 = 63{,}46V$$

$$I_a = \frac{V_t - E}{r_a + R_a} = \frac{230 - 63{,}46}{6{,}12394} = 27{,}195 A$$

*c3) De la expresión:*

$$V - \frac{r_a + R_a}{K_a \times \phi_d} \times (T_L + K \times W) = K_a \times \phi_d \times W \quad \text{para este caso : } R_a = 0$$

$$\Rightarrow 230 - \frac{0{,}0814}{1{,}21} \times (30 + 0{,}0554 \times W) = 1{,}21 \times W$$

$$W = 187{,}84 rad/seg = 1793{,}74 r.p.m.$$

$$E = K_a \times \phi_d \times W = 1{,}21 \times 187{,}84 = 227{,}2864V$$

$$I_a = \frac{V_t - E}{r_a} = \frac{230 - 227{,}2864}{0{,}0814} = 33{,}337A$$

*c4)*

$$T_e = T_{perd} + T_L \quad ; \quad W = 3000 r.p.m. = 314{,}16 rad/seg$$

$$T_e = K \times W + T_L = 0{,}0554 \times 314{,}16 + 30 = 47{,}41 N - m$$

$$T_e = K_a \times \phi_d \times \left( \frac{V_t - E}{r_a} \right) = K_a \times \phi_d \times \left( \frac{V_t - K_a \times \phi_d \times W}{r_a} \right)$$

$$(K_a \times \phi_d)^2 - \frac{V_t}{W} \times K_a \times \phi_d + \frac{T_e \times r_a}{W} = 0$$

*Haciendo* $X = K_a \times \phi_d$

$$\Rightarrow \quad X^2 - \frac{230}{314{,}16} X + \frac{47{,}41 \times 0{,}0814}{314{,}16} = 0$$

$$X^2 - 0{,}732 X + 0{,}01228 = 0$$

*Resolviendo la ecuación cuadrática llegamos a obtener: X=0,71482*

$$\text{Es decir : } K_a \times \phi_d = 0{,}71482$$

$$\therefore E = 0{,}71482 \times 314{,}16 = 224{,}5678V$$

$$I_a = \frac{V_t - E}{r_a} = \frac{230 - 224{,}5678}{0{,}0814} = 66{,}735A$$

$$T_e = K_a \times \phi_d \times I_a = 0{,}71482 \times 66{,}735 = 47{,}7 N - m$$

*Calculando* $R_f$ *:*

$$E(a\ 1800 r.p.m.) = K_a \times \phi_d \times W = 0{,}71482 \times 1800 \times \frac{\pi}{30} = 134{,}74V$$

$$E = \frac{402{,}46 \times I_f}{0{,}6769 + I_f} = 134{,}74 \quad \Rightarrow \quad I_f = 0{,}34068A$$

$$\Rightarrow \quad R_f + r_f = \frac{230}{0{,}34068} = 675{,}12\Omega$$

$$R_f = 675{,}12\Omega - 260 = 415{,}12\Omega$$

*Eficiencia :*

$$I = I_a + I_f = 66{,}735 + 0{,}34068 = 67{,}07568\,A$$

$$P_{ent} = V_t \times I = 230 \times 67{,}07568 = 15427{,}4064W$$

$$P_{sal} = T_L \times W = 30 \times 314{,}16 = 9424{,}8W$$

$$\therefore \eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} = \frac{9424{,}8}{15427{,}4064} = 0{,}611 \equiv 61{,}1\%$$

***PROBLEMA N° 6.12 :*** *Un motor de derivación de CD se acopla mecánicamente a un generador trifásico sincrónico de rotor cilíndrico. El motor de CD está conectado a un suministro de 230V constantes, de CD, y el generador de CA se conecta a un suministro trifásico de frecuencia y voltaje constantes, de 460 voltios línea a línea. La máquina sincrónica de 4 polos, conectada en estrella tiene capacidades nominales de 25KVA, 460V y una reactancia sincrónica de 5,85 Ohmios/fase. Los datos de la máquina de CD de 4 polos son 25KW, 220V. Se desprecian todas las pérdidas.*

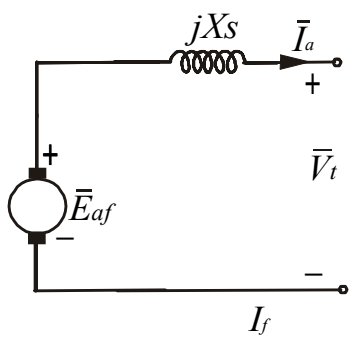
*a) Si las dos máquinas trabajan como conjunto motor-generador que recibe la potencia de las tomas de CD y la entrega al suministro de CA. ¿Cuál es el voltaje de excitación de la máquina de CA en voltios por fase (línea a neutro) cuando entrega los kilovoltamperes nominales a factor de potencia 1?*

*b) Si se deja la corriente del campo de la máquina de CA como en la parte a). ¿Qué ajuste se puede hacer para reducir la transferencia de potencia (entre CA y CD) a cero?. Con esta condición de cero transferencia: ¿Cuál es la corriente de la máquina de CD?. ¿Cuál es la corriente de armadura de la máquina de CA?*

*c) Si se deja la corriente de campo de la máquina de CA como en las partes a) y b), ¿Qué ajuste se puede hacer para que se tomen 25KW del suministro de CA y se entregue al de CD?. Con estas condiciones: ¿Cuál es la corriente de armadura de la máquina de CD?. ¿Cuáles son la magnitud y la fase de la corriente de la máquina de CA?*

*SOLUCIÓN:*

*a)*




$$V_t = \frac{460}{\sqrt{3}} = 266V$$

$$I_a = \frac{25000}{\sqrt{3} \times 460} = 31{,}4\,A$$

$$\overline{E}_{af} = V_t + jX_S \times I_a = 266 + j5{,}85 \times 31{,}4$$

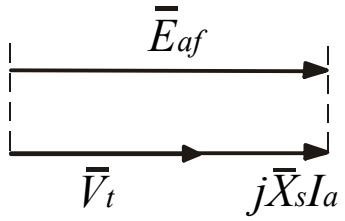
$$\overline{E}_{af} = 323\angle 34{,}6°\ V_{L-n}$$

$$E_{af} = 560V_{L-L}$$

**Figura** *P6.12.1*

*b) Puesto que la máquina CA se mantiene a velocidad constante, la transferencia de potencia podrá ser podrá ser reducida a cero por un incremento de la excitación del motor DC hasta que el voltaje interno sea igual al voltaje terminal.*

$$\therefore \quad I_a = 0 \text{ para la máquina CD}$$




$$I_a = \frac{E_{af} - V_t}{X_S} = \frac{323 - 266}{5{,}85}$$

$$I_a = 9{,}74\,A \quad \text{Motor CA}$$

**Figura** *P6.12.2*

*c)*

$$\text{Motor CD}: \quad I_a = \frac{25000}{230} = 108{,}7\,A$$

$$\text{Motor CA}: \quad I_a = 31{,}4\,A$$

***PROBLEMA N° 6.13 :*** *Un motor en derivación toma una corriente de armadura a plena carga de 38,5 A de la línea de 230V, y trabaja a una velocidad de 1200r.p.m. tanto sin carga como a plena carga. Se dispone de los siguientes datos para este motor:*
*Resistencia del circuito de armadura (incluyendo escobillas) = 0,21 Ohmios.*
*Vueltas por polo en el campo en derivación = 1800 vueltas.*

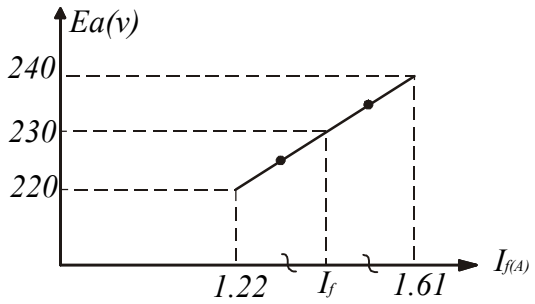
*La curva de magnetización como generador sin carga y a 1200r.p.m. es:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_a$(V) | 180 | 200 | 220 | 240 | 250 |
| $I_f$(A) | 0,82 | 0,96 | 1,22 | 1,61 | 1,89 |

*a) Calcule la corriente del campo en derivación de este motor sin carga y a 1200 r.p.m. cuando se conecta a la línea de 230V. Suponga despreciable la caída de voltaje por resistencia del circuito de armadura, así como la reacción de armadura.*
*b) Calcule la reacción efectiva de la armadura a plena carga en ampere-vueltas por polo.*
*c) ¿Cuántas vueltas se deben añadir a un campo en serie para transformar a esta máquina en un motor compuesto acumulativo en conexión larga, cuya velocidad será 1115r.p.m. cuando la corriente de armadura sea 38,5 A y el voltaje aplicado 230V?. El campo serie tendrá una resistencia de 0,046 Ohmios.*
*d) Si se instala un campo serie con 25 vueltas por polo y resistencia de 0,046 Ohmios, determine la velocidad cuando la corriente de armadura es 38,5 A y el voltaje aplicado es de 230V.*

*SOLUCIÓN:*

*a)* $E_a$=230V

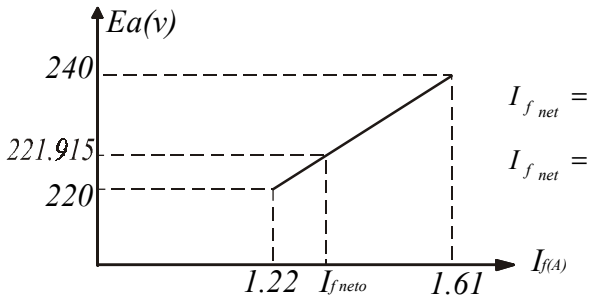



$$I_f = \frac{1{,}22 + 1{,}61}{2} = 1{,}415\,A$$

**Figura** *P6.13.1*

*b)* $E_a = 230 - R_a \times I_a = 230 - 0{,}21 \times 38{,}5$

$E_a = 221{,}915V$




$$I_{f\,net} = 1{,}22 + (221{,}915 - 220) \times \frac{(1{,}61 - 1{,}22)}{(240 - 220)}$$

$$I_{f\,net} = 1{,}257\ A$$

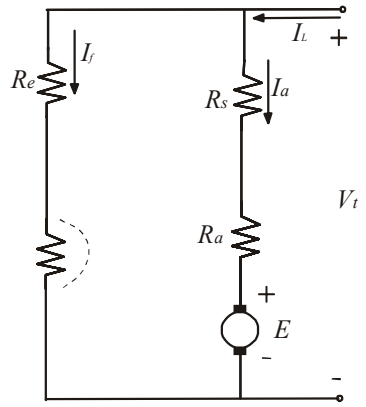
**Figura** *P6.13.2*

$$reacción\ de\ Armadura = (I_f - I_{f\,net}) \times 1800$$

$$reacción\ de\ Armadura = (1{,}415 - 1{,}257) \times 1800$$

$$\therefore\ \ reacción\ de\ Armadura = 284{,}4\,A - vuelta\ /\ polo$$

*c)*

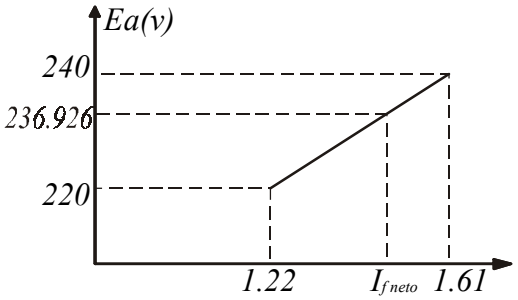



$$E_a = 230 - (R_a + R_S) \times I_a = 230 - (0{,}21 + 0{,}046) \times 38{,}5$$

$$E_a = 220{,}144V \quad ; \quad 1115\,r.p.m.$$

$$E_{a0} = \frac{1200}{1115} \times 220{,}144 = 236{,}926V$$

**Figura** *P6.13.3*




$$I_{f\,net} = 1{,}22 + (236{,}926 - 220) \times \frac{(1{,}61 - 1{,}22)}{(240 - 220)}$$

$$I_{f\,net} = 1{,}55A$$

**Figura** *P6.13.4*

$$N_S \times I_S = I_{f\,net} \times 1800 + reacción\ de\ armadura - I_f \times 1800$$

$$N_S \times I_S = 1{,}55 \times 1800 + 284{,}4 - 1{,}415 \times 1800$$

$$N_S \times I_S = 527{,}4\,A - vuelta$$

$$N_S = \frac{527{,}4}{38{,}5} = 13{,}7 \qquad \therefore \quad N_S = 14 vueltas / polo$$

*d)*

$$N_S \times I_S = N_S \times I_a = 25 \times 38{,}5 = 962{,}5\,A - vuelta$$

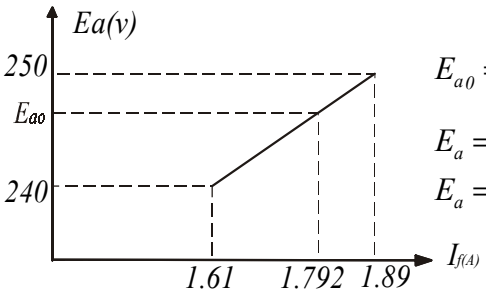
$$N_C \times I_f = 1800 \times 1{,}415 = 2547\,A - vuelta$$

$$reacción\ de\ armadura = 284{,}4\,A - vuelta$$

$$N_C \times I_{f\,net} = N_C \times I_f + N_S \times I_S - reacción\ de\ armadura = 2547 + 962{,}5 - 284{,}4$$

$$N_C \times I_{f\,net} = 3225{,}1\,A - vuelta$$

$$I_{f\,net} = \frac{3225{,}1}{1800} = 1{,}792\,A$$




$$E_{a0} = 240 + (1{,}792 - 1{,}61) \times \frac{(250 - 240)}{(1{,}89 - 1{,}61)} = 246{,}5V$$

$$E_a = 230 - (R_a + R_C) \times I_a = 230 - (0{,}21 + 0{,}046) \times 38{,}5$$

$$E_a = 220{,}144V$$

**Figura** *P6.13.5*

$$\frac{W_m}{E_a} = \frac{1200}{E_{a0}} \quad \Rightarrow \quad W_m = \frac{E_a}{E_{a0}} \times 1200 = \frac{220{,}144}{246{,}5} \times 1200 = 1071{,}7$$

$$\therefore W_m = 1072 r.p.m.$$

***PROBLEMA N° 6.14 :*** *Un motor en derivación de 10HP, 230V, tiene 1800vueltas por polo en el campo en derivación, una resistencia de armadura de 0,23 Ohmios (incluyendo escobillas) y una resistencia de campo en conmutación de 0,041 Ohmios.*

*La resistencia del campo en derivación, sin el reóstato, es de 275 Ohmios. Cuando se trabaja el motor sin carga con voltaje nominal entre terminales y resistencia variable en el campo, se toman los siguientes datos:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Velocidad (r.p.m.)* | *1110* | *1130* | *1160* | *1200* | *1240* |
| $I_f$ *(A)* | *0,746* | *0,704* | *0,664* | *0,616* | *0,580* |

*La corriente de armadura sin carga es despreciable. Cuando el motor trabaja a plena carga y a voltaje nominal entre terminales, la corriente de armadura es 37,5 A, la corriente de campo es 0,616 y la velocidad es 1180r.p.m.*

*a) Calcule la reacción de armadura a plena carga en A-vueltas por polo, de desmagnetización equivalente.*
*b) Calcule el par electromagnético a plena carga.*
*c) ¿Qué par de arranque ejercerá el motor con corriente máxima en el campo si la corriente en la armadura se limita a 75 A?. En esas condiciones, la reacción de armadura es de 160 A-vueltas por polo.*
*d) Diseñe un campo en serie para obtener una velocidad a plena carga de 1075r.p.m. cuando la velocidad en vacío sea 1200 r.p.m.*

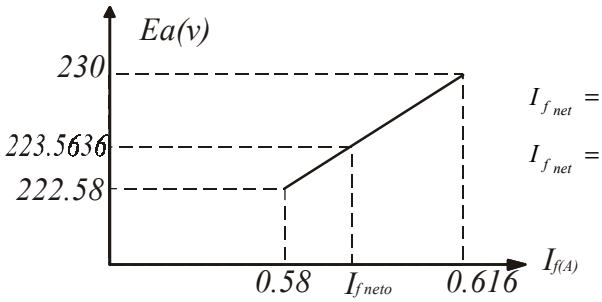
*SOLUCIÓN:*

$$I_f = 0{,}616\,A\,,\quad W_m = 1180 r.p.m.\,,\quad E_a = 230 - (R_a + R_{CC}) \times I_a$$

$$E_a = 230 - (0{,}23 + 0{,}041) \times 37{,}5 = 219{,}8375V$$

$$Para:\quad W_m = 1200 r.p.m. \quad \Rightarrow \quad E_{a0} = \frac{1200}{1180} \times 219{,}8375V = 223{,}5636V$$

| *Velocidad (r.p.m.)* | *1110* | *1130* | *1160* | *1200* | *1240* |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_f(A)$ | *0,746* | *0,704* | *0,664* | *0,616* | *0,580* |
| $E_{a0} = 230 \times \frac{1200}{W_m}$ | *248,65* | *244,25* | *237,931* | *230* | *222,58* |




$$I_{f\,net} = 0{,}58 + (223{,}5636 - 222{,}58) \times \frac{(0{,}616 - 0{,}58)}{(230 - 222{,}58)}$$

$$I_{f\,net} = 0{,}585\,A$$

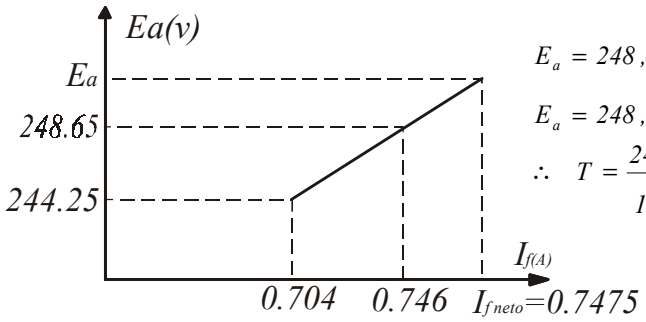
**Figura** *P6.14.1*

$$reacción\ de\ armadura = (0{,}616 - 0{,}585) \times 1800$$

$$\therefore\quad reacción\ de\ armadura = 55{,}8\,A - vuelta\,/\,polo$$

b)
$$T = \frac{E_a \times I_a}{W_m} = \frac{223{,}5636 \times 37{,}5}{1180 \times \frac{\pi}{30}} = 67{,}85 N - m$$

c)
$$I_{f\,max} = \frac{230}{R_C} = \frac{230}{275} = 0{,}8364 A$$
$$I_{f\,max} \times N_C = I_{f\,net} \times N_C + reacción\ de\ armadura$$
$$I_{f\,net} = I_{f\,max} - \frac{reacción\ de\ armadura}{N_C}$$
$$I_{f\,net} = 0{,}8364 - \frac{160}{1800} = 0{,}7475 A$$
$$T = \frac{E_a \times I_a}{W_m}$$



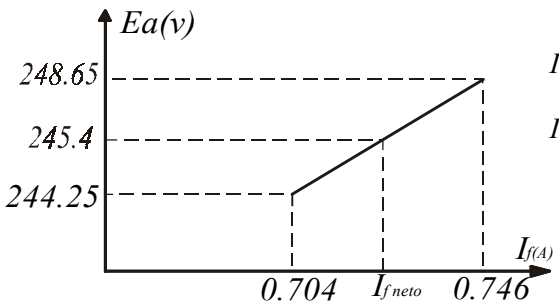

$$E_a = 248{,}65 + (0{,}7475 - 0{,}746) \times \frac{(248{,}65 - 244{,}25)}{(0{,}746 - 0{,}704)}$$
$$E_a = 248{,}81 V$$
$$\therefore \quad T = \frac{248{,}81 \times 75}{1200 \times \frac{\pi}{30}} = 148{,}5 N - m$$

**Figura** *P6.14.2*

*d) A plena carga: $I_a$ =37,5 A e $I_f$ =0,616 A*

*Despreciando la resistencia del campo serie:*

$$E_a = 230 - (R_a + R_{CC}) \times I_a = 230 - (0{,}23 + 0{,}041) \times 37{,}5$$
$$E_a = 219{,}8375 V$$
$$\frac{E_{a0}}{1200} = \frac{E_a}{1075} \quad \rightarrow \quad E_{a0} = \frac{1200}{1075} \times 219{,}8375 = 245{,}4 V$$




$$I_{f\,net} = 0{,}704 + (245{,}4 - 244{,}25) \times \frac{(0{,}746 - 0{,}704)}{(248{,}65 - 244{,}25)}$$
$$I_{f\,net} = 0{,}715 A$$

**Figura** *P6.14.3*

$$N_C \times I_f + N_S \times I_S = N_C \times I_{f\,net} + \text{reacción de armadura}$$
$$N_S \times I_S = N_C \times I_{f\,net} + \text{reacción de armadura} - N_C \times I_f$$
$$N_S \times I_a = 1800 \times 0{,}715 + 55{,}8 - 1800 \times 0{,}616 = 234$$
$$N_S = \frac{234}{I_a} = \frac{234}{37{,}5} = 6{,}24$$
$$\therefore N_S = 6 \text{vueltas / polo}$$

***PROBLEMA N° 6.15 :*** *Cuando se trabaja con voltaje nominal, un motor en derivación de 230 V trabaja a 1800 r.p.m. a plena carga y sin ella. La corriente de armadura a plena carga es 50 A. El devanado del campo en derivación tiene 1500 vueltas por polo. La resistencia del circuito de armadura (incluyendo escobillas e interpolos) es 0,2 Ohmios. La curva de magnetización a 1800 r.p.m. es:*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_a(V)$ | 200 | 210 | 220 | 230 | 240 | 250 |
| $I_f(A)$ | 0,15 | 0,59 | 0,65 | 0,73 | 0,81 | 0,95 |

*a) Calcule el efecto desmagnetizante de la reacción de armadura a plena carga en amper-vuelta por polo.*
*b) Se agrega a la máquina un devanado de campo en serie acumulativo en conexión larga que tiene 6 vueltas por polo y una resistencia igual a 0,055 Ohmios. Calcule la velocidad a corriente de plena carga y voltaje nominal, con la misma resistencia del circuito del campo en derivación que en la parte a).*
*c) Habiendo instalado el devanado de campo serie de la parte b), calcule el par interno de arranque en N-m si se limita la corriente de arranque en la armadura de 90 A y la corriente del campo en derivación tiene su valor normal. Suponga que el efecto desmagnetizante de la reacción de armadura correspondiente es 230 A-vuelta por polo.*

*SOLUCIÓN:*

*a) A plena carga:*

$$E_a = 230 - R_a \times I_a = 230 - 0{,}2 \times 50 = 220V$$
$$W_m = 1800 r.p.m.$$
$$\text{Sin carga: } E_a = 230V \quad ; \quad W_m = 1800 r.p.m.$$

*De la curva de magnetización:*
$$I_{f\,net} = 0{,}65A \quad ; \text{a plena carga.}$$
$$I_f = 0{,}73 \quad ; \text{sin carga}$$

$$\text{reacción de armadura} = (I_f - I_{f\,net}) \times 1500 = (0{,}73 - 0{,}65) \times 1500$$
$$\text{reacción de armadura} = 120A - \text{vuelta / polo}$$

*b)*

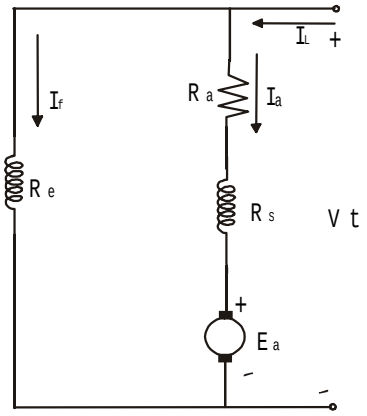
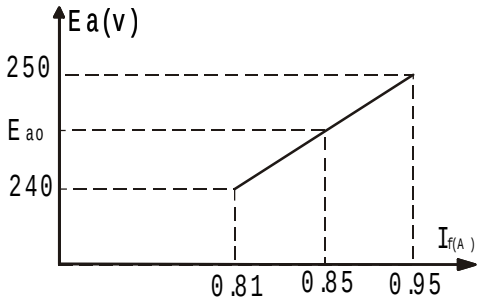



***Figura*** *P6.15.1*

$$N_C \times I_f + N_S \times I_S = N_C \times I_{f\,net} + reacción\ de\ armadura$$
$$N_C \times I_{f\,net} = N_C \times I_f + N_S \times I_S - reacción\ de\ armadura$$
$$1500 \times I_{f\,net} = 1500 \times 0{,}73 + 6 \times 50 - 120$$
$$I_{f\,net} = 0{,}85\,A$$




$$E_{a0} = 240 + (0{,}85 - 0{,}81) \times \frac{(250 - 240)}{(0{,}95 - 0{,}81)}$$
$$E_{a0} = 242{,}857V \quad ; \quad W_m = 1800 r.p.m.$$

***Figura*** *P6.15.2*

$$E_a = 230 - (R_a + R_S) \times I_a = 230 - (0{,}2 + 0{,}055) \times 50$$
$$E_a = 217{,}25V \quad ; \quad W_m = ?$$
$$W_m = \frac{E_a}{E_{a0}} \times 1800 = \frac{217{,}25}{242{,}857} \times 1800 = 1610 \quad r.p.m.$$

*c)*

$$I_{f\,net} = I_f + \frac{N_S}{N_C} \times I_S - \frac{reacción\ de\ armadura}{N_C}$$
$$I_{f\,net} = 0{,}73 + \frac{6}{1500} \times 90 - \frac{230}{1500} = 0{,}9367\,A$$
$$E_{a0} = 240 + (0{,}9367 - 0{,}81) \times \frac{(250 - 240)}{(0{,}95 - 0{,}81)} = 249{,}05V$$
$$T = \frac{E_{a0} \times I_a}{W_m} = \frac{249{,}05 \times 90}{1800 \times \frac{\pi}{30}} = 119 N - m$$

***PROBLEMA N° 6.16 :*** *Se encuentra que una troqueladora trabaja bien cuando está impulsada por un motor compuesto de 10 HP y 230 V que tiene una velocidad sin carga igual a 1800 r.p.m., y una velocidad a plena carga igual a 1200 r.p.m.; cuando el par es 43,8 Lb-pie se saca provisionalmente de servicio el motor, y el único repuesto para él es un motor compuesto con las siguientes características:*

*Capacidad: 230 V, 12,5 HP* — *Corriente sin carga: 4 A*
*Velocidad en vacío: 1820 r.p.m.* — *Velocidad a plena carga: 1500 r.p.m.*
*Corriente a plena carga: 57 A* — *Par a plena carga: 43,8 Lb-pie*
*Resistencia del circuito de armadura: 0,2 Ohmios*
*Corriente de campo en derivación: 1,6 A*

*Se desea emplear este motor como impulsor de emergencia para la troqueladora, sin cambiar sus devanados de campo.*
*a) ¿Cómo se puede hacer para tener la regulación de velocidad necesaria?*
*b) Trace el diagrama pertinente del circuito y de las especificaciones completas de los aparatos necesarios.*

*SOLUCIÓN:*

*Motor Repuesto:*

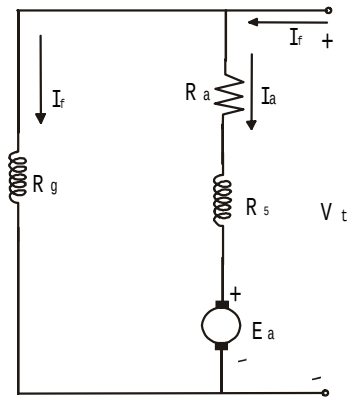



***Figura*** *P6.16.1*

*Sin carga:*

$W_m = 1820 \quad r.p.m.$

$I_a = 4 - 1{,}6 = 2{,}4 \quad A$

$E_a = 230 - 2{,}4 \times 0{,}2 = 229{,}52 \quad V$

*Con carga:*

$T = 43{,}8 Lb - pie = 59{,}4 N - m$

$I_a = 57 - 1{,}6 = 55{,}4 A$

$E_a = 230 - 55{,}4 \times 0{,}2 = 218{,}92 V$

$W_m = 1600 r.p.m.$

*Para este tipo de motor se cumple:*

$N_C \times I_f + N_S \times I_S = N_C \times I_{f\,net} + \text{reacción de armadura}$

*Despreciando la reacción de armadura tenemos:*

$$I_{f\,net} = I_f + \frac{N_S \times I_S}{N_c} \quad ; \quad I_S = I_a$$

$$I_{f\,net} = I_f + K \times I_a$$

$$E_a = K_a \times \phi_d \times W_m = K_a \times K_d \times I_{f\,net} \times W_m$$

$$\frac{E_a}{I_{f\,net} \times W_m} = H = Constante$$

$$\frac{229{,}52}{(1{,}6 + 2{,}4 \times K) \times 1820 \times \frac{\pi}{30}} = \frac{218{,}92}{(1{,}6 + 55{,}4 \times K) \times 1600 \times \frac{\pi}{30}} = H$$

$$\therefore \quad K = 2{,}575 \times 10^{-3} \quad y \quad H = 0{,}7498$$

*a), b) Queremos que:*

$$W_m = 1800 r.p.m. \quad sin\ carga$$
$$W_m = 1200 r.p.m. \quad plena\ carga$$

1. *Agregamos una resistencia $R_A$ en serie con la resistencia de armadura.*
2. *Agregamos una resistencia $R_F$ en serie con la resistencia de campo en derivación.*

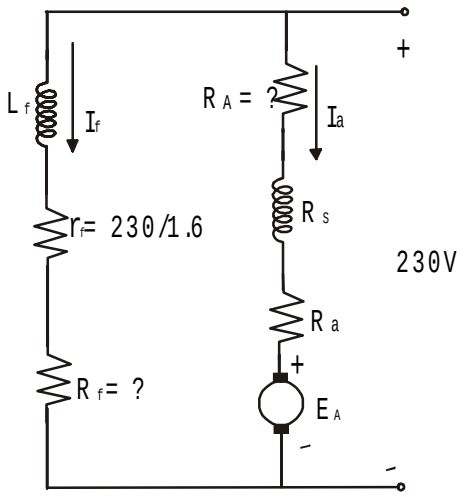



**Figura** *P6.16.2*

*SIN CARGA:*

$$W_m = 1800 \times \frac{\pi}{30} = 60\pi \qquad E_a = 230 - 2{,}4 \times 0{,}2 - 2{,}4 \times R_A$$

$$E_a = 229{,}52 - 2{,}4 \times R_A$$

$$I_{f\,net} = I_f + 2{,}4 \times K = \frac{229{,}52 - 2{,}4 \times R_A}{60\pi \times 0{,}7498} \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ (\alpha)$$

*CON CARGA:*

$$W_m = 1200 \times \frac{\pi}{30} = 40\pi \qquad E_a = 230 - 55{,}4 \times 0{,}2 - 55{,}4 \times R_A$$

$$E_a = 218{,}92 - 55{,}4 \times R_A$$

$$I_{f\,net} = I_f + 55{,}4 \times K = \frac{218{,}92 - 55{,}4 \times R_A}{40\pi \times 0{,}7498} \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ (\beta)$$

*de ($\alpha$) y ($\beta$):*

$$I_f = 1{,}59\,A$$

$$\therefore \quad R_A = 0{,}986\,\Omega$$

$$R_F + r_f = \frac{230}{1{,}59}$$

$$R_F = \frac{230}{1{,}59} - \frac{230}{1{,}6}$$

$$\therefore \quad R_F = 0{,}9\,\Omega$$

***PROBLEMA N° 6.17 :*** *Se van a emplear dos máquinas en derivación idénticas de 10 HP, 230 V, 36 A, como generador y motor, respectivamente en un sistema Ward-Leonard. El generador está impulsado por un motor sincrónico cuya velocidad es de 1200 r.p.m. y constante. La resistencia del circuito de armadura de cada máquina es 0,22 Ohmios (incluyendo escobillas). La reacción de armadura es despreciable. Los datos de la curva de magnetización para cada máquina a 1200 r.p.m. son las siguientes:*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_f$ (A) | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,2 | 1,5 | 1,8 |
| $E_a$ (V) | 108 | 183 | 230 | 254 | 267 | 276 |

*a) Calcule los valores máximo y mínimo de la corriente del campo del generador que se necesita para dar al motor un rango de velocidades de 300 a 1500 r.p.m. a la corriente de armadura de plena carga (36 A) manteniendo constante la corriente del campo del motor a 0,8 A.*

*b) Calcule la regulación de velocidad del motor para las condiciones de velocidad máxima y mínima que se encontraron en a).*

*c) Calcule la velocidad máxima del motor que se puede obtener con corriente de armadura de plena carga, si se reduce la corriente del campo en el motor a 0,3A y no se permite que la corriente del campo del generador exceda 1,6 A.*

*SOLUCIÓN:*

*a) Corriente de campo del motor: 0,8 A*

*De la curva de magnetización:*

$$E_{a0} = 183 + (0{,}8 - 0{,}6) \times \frac{(230 - 183)}{(0{,}9 - 0{,}6)} = 214{,}33 \;\; V \quad ; \quad W_m = 1200 \;\; r.p.m.$$

$$E_{a0} = 53{,}5825 \;\; V \quad ; \quad W_m = 300 \;\; r.p.m.$$

$$E_{a0} = 267{,}9125 \;\; V \quad ; \quad W_m = 1500 \;\; r.p.m.$$

$$53{,}5825 \;\; V \le E_{am} \le 267{,}9125 \;\; V$$

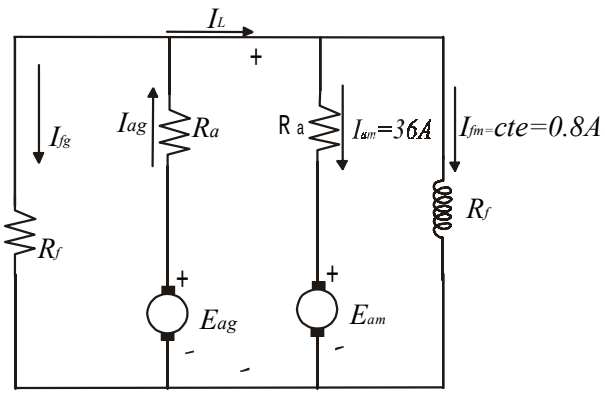



***Figura*** *P6.17.1*

$$V_t = E_{am} + R_a \times I_{am}$$

$$I_l = I_{am} + I_{fm} = I_{ag} - I_{fg}$$

$$I_{ag} = I_{am} + I_{fm} + I_{fg}$$

$$E_{ag} = R_a \times I_{ag} + V_t$$

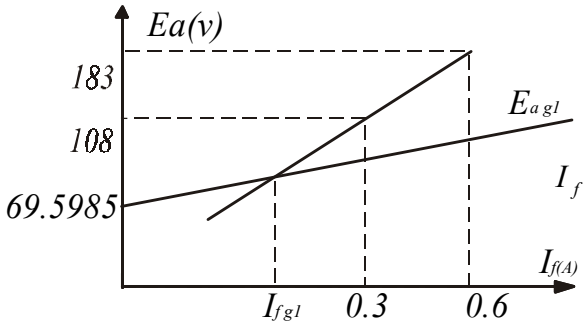
$$E_{ag} = E_{am} + 2 \times R_a \times I_{am} + R_a \times I_{fm} + R_a \times I_{fg}$$

$$E_{ag} = E_{am} + 2 \times 0{,}22 \times 36 + 0{,}22 \times 0{,}8 + 0{,}22 \times I_{fg}$$

$$E_{ag} = E_{am} + 16{,}016 + 0{,}22 \times I_{fg}$$

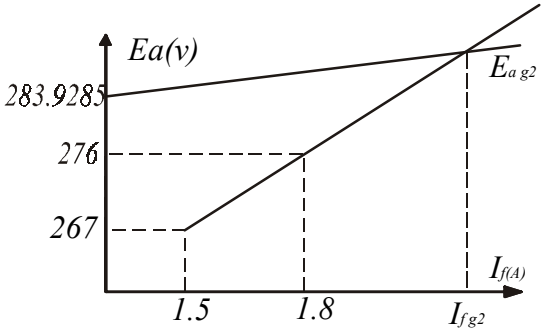
$$E_{ag1} = 69{,}5985 + 0{,}22 \times I_{fg}$$

$$E_{ag2} = 283{,}9285 + 0{,}22 \times I_{fg}$$




$$I_{fg1} = 0{,}1465\,A \quad ; \quad E_{ag1} = 69{,}631V$$

***Figura*** *P6.17.2*




$$I_{fg2} = 2{,}1A \qquad E_{ag2} = 284{,}386V$$

$$\therefore \quad 0{,}1465\,A < I_{fg} < 2{,}1A$$

***Figura*** *P6.17.3*

*b)*

*1. Para* $I_{fg} = 0{,}1465A \quad \Rightarrow \quad E_{ag} = 69{,}631V$

*Motor a plena carga:* $W_m = 300r.p.m.$

*Motor sin carga:* $W_{m0} = 1200 \times \dfrac{69{,}631}{214{,}33} = 389{,}853r.p.m.$

$$\frac{\Delta W_m}{W_m} = \frac{389{,}853 - 300}{300} = 0{,}29951 \equiv 29{,}951\%$$

*2. Para* $I_{fg} = 2{,}1A \quad \Rightarrow \quad E_{ag} = 284{,}386V$

*Motor a plena carga:* $W_m = 1500r.p.m.$

*Motor sin carga:* $W_{m0} = 1200 \times \dfrac{284{,}386}{214{,}33} = 1592{,}233r.p.m.$

$$\frac{\Delta W_m}{W_m} = \frac{1592{,}233 - 1500}{1500} = 0{,}0613 \equiv 6{,}13\%$$

*c)*

$$I_{fg} = 1{,}6A \quad \Rightarrow \quad E_{ag} = 267 + (1{,}6 - 1{,}5) \times \frac{(276 - 267)}{(1{,}8 - 1{,}5)} = 270V$$

$$I_{fm} = 0{,}3A \quad \Rightarrow \quad E_{a0m} = 108V \quad ; \quad W_m = 1200r.p.m.$$

$$E_{am} = E_{ag} - 2 \times R_a \times I_{am} - R_a \times I_{fm} - R_a \times I_{fg}$$

$$E_{am} = 270 - 2 \times 0{,}22 \times 36 - 0{,}22 \times 0{,}3 - 0{,}22 \times 1{,}6 = 253{,}742V$$

$$W_m = \frac{E_{am}}{E_{a0m}} \times 1200 = \frac{253{,}742}{108} \times 1200 = 2819{,}4r.p.m.$$

***PROBLEMA N° 6.18 :*** *Un motor en derivación de 20 HP, 230 V, tiene una resistencia de armadura de 0,124 Ohmios y una resistencia del circuito de campo igual a 95 Ohmios. El motor entrega la potencia nominal de salida a voltaje nominal cuando su corriente de armadura es 73,5 A. Cuando trabaja el motor a voltaje nominal, se observa que su velocidad es 1150 r.p.m. cuando la carga de la máquina es tal que su corriente de armadura es 41,5 A.*
*a) Calcule la velocidad de este motor a plena carga.*

*Para proteger tanto el motor como la fuente de DC en condiciones de arranque, se conectará una resistencia externa en serie con el devanado de armadura (con el devanado de campo conectado directamente con el suministro de 230 V). Entonces esta resistencia se ajustará automáticamente en pasos, de manera que la corriente de armadura no excede el 200% de la corriente nominal. El tamaño de los pasos será tal que, hasta que salga toda la resistencia externa, no se permitirá que la corriente de armadura baje del valor nominal. En otras palabras, la máquina debe arrancar con 200% de la corriente armadura nominal y tan pronto como la corriente baje al valor nominal, se debe quitar resistencia en serie suficiente para que la corriente vuelva a ser 200%. Se repitirá este proceso hasta que se hallan eliminado todas las resistencias en serie.*

*b) Calcule el valor máximo de la resistencia en serie.*
*c) ¿Cuánta resistencia se debe quitar en cada paso en la operación de arranque, y a que velocidades se deben presentar esos pasos.?*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

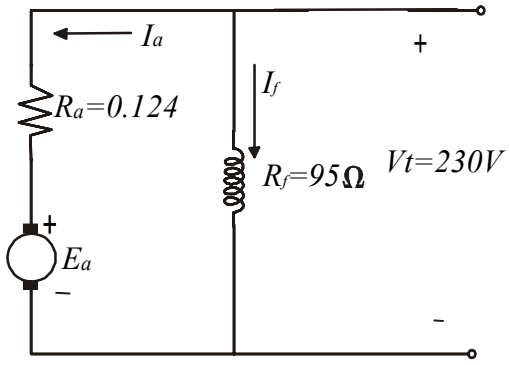



**Figura** *P6.18.1*

$W_m = 1150 \quad r.p.m. \qquad I_a = 41,5 \quad A \qquad E_a = 230 - 0,124 \times 41,5 = 224,854 \quad V$

*A plena carga:*

$I_a = 73,5 A$

$E_a = 230 - 0,124 \times 73,5 = 220,886 \quad V$

$$\frac{W_m}{220,886} = \frac{1150}{224,854} \qquad \therefore W_m = 1130 \quad r.p.m.$$

*b)*

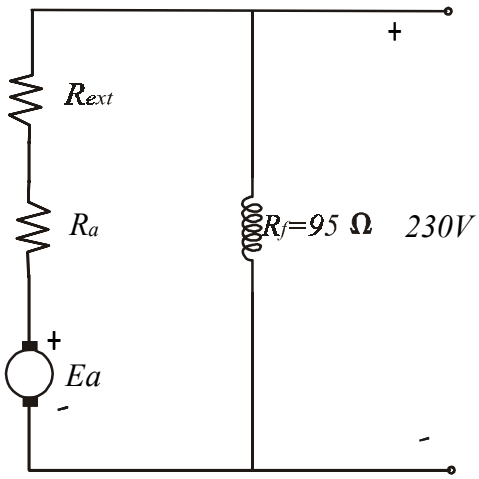



**Figura** *P6.18.2*

$$\frac{230}{R_a + R_{ext\,max}} = 2 \times 73,5$$

$R_a + R_{ext\,max} = 1,565 \quad \Rightarrow \quad R_{ext\,max} = 1,565 - 0,124$

$\therefore R_{ext\,max} = 1,44\Omega$

*c)*

| # de Paso | $R_{ext}$ | $E_{a\ min}$ | $E_{a\ max}$ | $W_{min}$ | $W_{max}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,44 | 0V | 115V | 0 | 588 |
| 2 | 0,658 | 115V | 173V | 588 | 885 |
| 3 | 0,264 | 173V | 201V | 885 | 1028 |
| 4 | 0,073 | 201V | 216V | 1028 | 1105 |

***PROBLEMA N° 6.19 :*** *Se va a agregar un devanado débil de campo en derivación a un motor en serie de 50 HP, 230 V, 600 r.p.m. de una grúa para evitar que las velocidades sean muy grandes cuando las cargas sean muy pequeñas. Su resistencia será de 230 Ohmios. La resistencia combinada de los devanados de interpolos y armadura (incluyendo escobillas) es 0,046 Ohmios. El devanado de campo en serie tiene 26 vueltas por polo con una resistencia total igual a 0,023 Omhios. Para determinar su diseño, se obtuvieron los siguientes datos de prueba antes de instalar el devanado de campo en derivación:*

*Prueba con carga como motor en serie (no se midió la salida):*

$$V_t = 230 \quad V \qquad I_a = 184 \quad A \qquad W = 600 \quad r.p.m.$$

*Prueba sin carga con excitación separada en el campo serie:*

| Voltaje aplicado a la armadura | Velocidad r.p.m. | Corriente de armadura (A) | Corriente de campo Serie (A) |
|---|---|---|---|
| 230 | 1500 | 10 | 55 |
| 230 | 1200 | 9,2 | 68 |
| 230 | 900 | 8 | 95 |
| 215 | 700 | 7,7 | 125 |
| 215 | 600 | 7,5 | 162 |
| 215 | 550 | 7,2 | 186 |
| 215 | 525 | 7,1 | 208 |
| 215 | 500 | 7,0 | 244 |

*a) Calcule el número de vueltas por polo del campo en derivación si la velocidad sin carga a voltaje nominal debe ser 1450 r.p.m. Sin carga las caídas de voltaje en el devanado de armadura, en el campo serie y en el devanado de interpolos, son despreciables.*

*b) Calcule la velocidad después de instalar el campo en derivación cuando trabaja el motor a voltaje nominal con una carga que provoca una corriente de línea de 175 A. Suponga que la desmagnetización por fuerza magnetomotríz de la reacción de armadura no cambia por la adición del campo en derivación.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

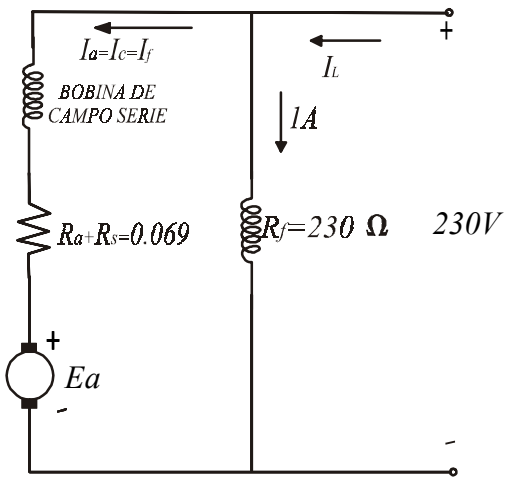
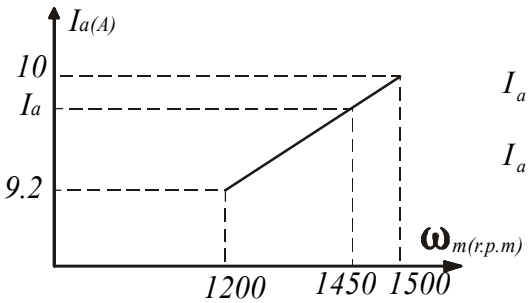



**Figura** *P6.19.1*

$$f.m.m. = I_f \times N_f + I_C \times N_C = I_f \times N_f + I_a \times N_C$$
$$f.m.m. = I_f \times N_f + 26 \times I_a$$

*De los datos sin carga:*

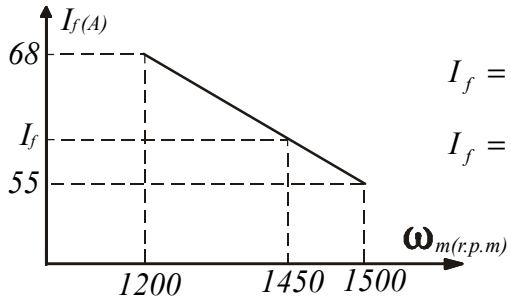
$W_m = 1450 r.p.m. \qquad I_a = ??$




$$I_a = 9{,}2 + (1450 - 1200) \times \frac{(10 - 9{,}2)}{(1500 - 1200)}$$

$$I_a = 9{,}87\,A$$

**Figura** *P6.19.2*




$$I_f = 55 + (1500 - 1450) \times \frac{(68 - 55)}{(1500 - 1200)}$$

$$I_f = 57{,}16\,A$$

**Figura** *P6.19.3*

$$f.m.m. = I_f \times N_C = 57{,}16 \times 26 = 1486{,}16\,A - vuelta$$

$$I_f \times N_f + 26 \times I_a = 1486{,}16$$

$$I_f \times N_f = 1486{,}16 - 26 \times 9{,}87$$

$$I_f \times N_f = 1229{,}54 \qquad I_f = 1A$$

$$\therefore \quad N_f = 1230 vueltas$$

*b)* $I_L = 175\,A$

*De los datos de plena carga:*

$$I_f = I_a = 184 \quad A \quad ; \quad f.m.m. = 184 \times 26 = 4784 \quad A - vuelta$$

$$E_a = 230 - 184 \times 0{,}069 = 217{,}304 \quad V \quad ; \quad W_m = 600 \quad r.p.m.$$

*Que corresponde a* $E_a = 215 \quad V \quad ; \quad W_m = 594 \quad r.p.m. \quad ; \quad I_f = 165 \quad A$

$$reacción\ de\ armadura = N_C \times (I_f - I_{f\,net}) = 26 \times (184 - 165)$$

$$\therefore \quad reacción\ de\ armadura = 494\,A - vuelta$$

*En el punto de operación determinado:*

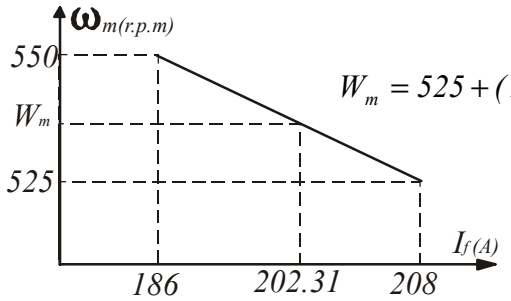
$$f.m.m. = N_C \times I_C + N_f \times I_f - reacción\ de\ armadura$$

$$\therefore \quad f.m.m. = 26 \times 174 + 1230 - 494 = 5260\,A - vuelta$$

$$Corriente\ efectiva\ del\ campo\ serie = \frac{f.m.m.}{N_C} = \frac{5260}{26} = 202{,}31A$$

$$\therefore I_{f\,net} = 202{,}31A$$

$$E_a = 230 - 0{,}069 \times 174 = 217{,}994V$$




$$W_m = 525 + (208 - 202{,}31)\frac{(550 - 525)}{(208 - 186)} = 531{,}466\,r.p.m.$$

**Figura** *P6.19.4*

$$\frac{W_m}{217{,}994} = \frac{531{,}466}{215} \qquad \therefore W_m = 538{,}87\,r.p.m.$$

# *CAPÍTULO VII*
# *MOTORES POLIFÁSICOS DE INDUCCIÓN*

*Son motores de corriente alterna que generalmente son conectados a redes de alimentación trifásica.*

## *7.1 MOTORES TRIFÁSICOS*

*- Se fabrican de las más diversas potencias.*
*- Características de velocidad sensiblemente constante*
*- Característica de par ó torque que varía ampliamente según los diseños*
*- Se construye para operar a todas las tensiones y frecuencias de servicio normalizadas.*

### *7.1.1 CONSTITUCIÓN DE UN MOTOR TRIFÁSICO*

*- Se compone de 3 partes, principalmente : estator, rotor y escudos.*
*- Estator compuesto de una carcasa de fundición, un núcleo formado por chapas magnéticas, y un arrollamiento constituido por bobinas individuales alojadas en las ranuras del núcleo.*
*- El rotor puede ser del tipo jaula de ardilla o bien bobinado.*

### *7.1.2 FUNCIONAMIENTO DEL MOTOR TRIFÁSICO*

*Las bobinas alojadas en las ranuras estatóricas están conectadas de modo que formen 3 arrollamientos independientes iguales, llamadas fases.*

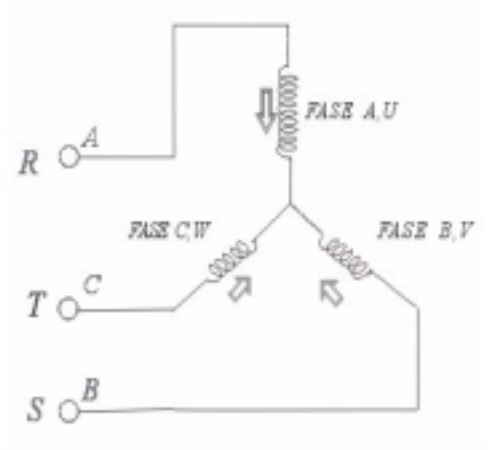
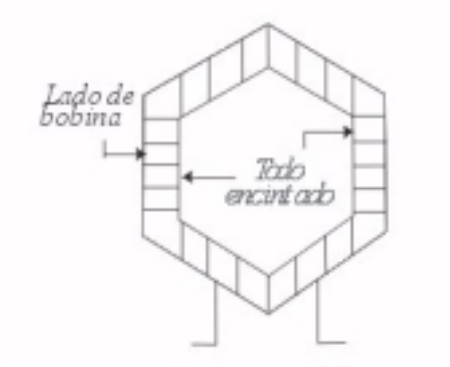



***Figura** 7.1.1*

*Normalmente se tiene que :*

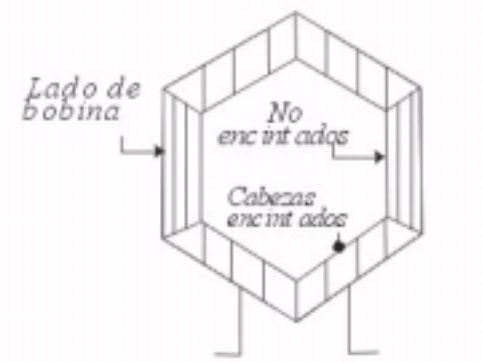
*- El N° de bobinas coincide con el N° de ranuras (doble capa).*

- *Algunos motores tienen doble N° de ranuras que de bobinas (arrollamiento de fondo de cesta). ( Capa simple).*
- *Los motores 3ϕ están normalmente previstos para trabajar a una ó dos tensiones de servicio y para girar a dos, tres ó cuatro velocidades de régimen, lo cual exige una gran variedad de conexiones ( en Δ, en Y, en serie, en paralelo y todas las combinaciones posibles entre éstas).*
- *Los motores 3ϕ de gran tamaño tienen las ranuras estatóricas abiertas, en los motores pequeños y de mediano tamaño las ranuras estatóricas son semicerradas.*
- *Las bobinas utilizados en motores de cierto tamaño tienen forma hexagonal, es decir seis lados.*




*Bobina hexagonal completamente encintada, usada en estatores provistas de ranuras abiertas.*

**Figura** *7.1.2*




*Bobina hexagonal parcialmente encintada, usada en estatores provistas de ranuras semicerradas.*

**Figura** *7.1.3*

*Las bobinas de los motores polifásicos se confeccionan siempre con auxilio de hormas ( plantillas ó moldes).*

*La cinta normalmente empleada a este respecto es la del algodón a veces es preferible el uso de batista barnizada o cinta de fibra de vidrio.*

*Las bobinas de motores de pequeño tamaño pueden confeccionarse inicialmente de forma rectangular y convertirse luego en hexagonales tirando por el centro de los lados mayores.*

### *7.1.3 CONEXIONES FUNDAMENTALES DE LOS MOTORES TRIFÁSICOS*

***FASES.-*** *Generalmente los motores 3ϕ están provistos de un arrollamiento estatórico en doble capa, es decir, con igual número de bobinas y de ranuras. Las bobinas van conectadas formando tres arrollamientos independientes llamados fases las cuales se designan generalmente; con las letras A, B y C (ó R, S y T ). Puesto que cada fase debe estar constituída por el mismo N° de bobinas, éste será igual a un tercio del N° total de bobinas existentes en el estator.*

*Las tres fases de un motor 3ϕ están siempre conectada en Y ó en Δ.*

***REGLA 1:*** *N° de bobinas por fase = N° total de bobinas establecidas por el N° de fases del motor.*

*Ejm.1. En un motor trifásico provisto de 36 bobinas, habrá :*

$$\frac{36\ bobinas}{3fases} = 12 \quad bobinas\ por\ fase \quad .....(7-1)$$

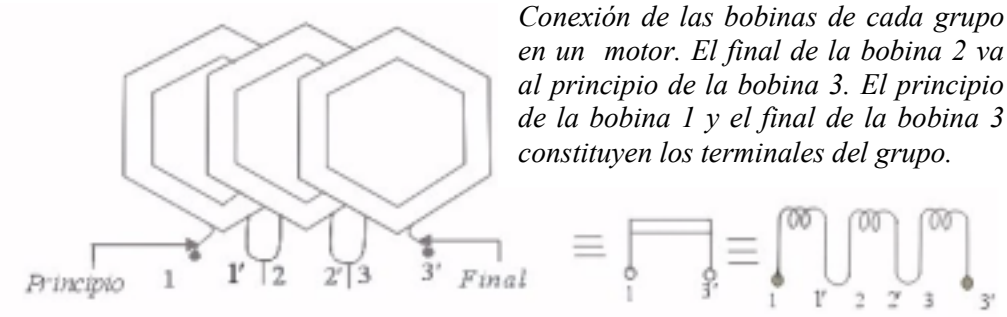
***POLOS.-*** *Las bobinas de un motor trifásico también están conectadas de modo que el estator del mismo conforme un determinado N° de polos iguales.*

***REGLA 2:*** *N° bobinas por polo = N° total de bobinas estatóricas por el N° de polos del motor.*

*Ejm.2. En un motor 3ϕ tetrapolar provisto de 36 bobinas habrá:*

$$\frac{36 bobinas}{4\,polos} = 9 \quad bobinas\ polo \quad .....(7-2)$$

***GRUPOS.-*** *Se llama grupo a un determinado N° de bobinas contiguas conectadas en serie. Los motores 3ϕ llevan siempre tres grupos iguales de bobinas en cada polo, uno por fase. Dicho en otros terminos, un grupo pertenece a la fase A, ótro a la fase B, y el tercero a la fase C . Es evidente que un grupo define el N° de bobinas por polo y fase.*




*Conexión de las bobinas de cada grupo en un motor. El final de la bobina 2 va al principio de la bobina 3. El principio de la bobina 1 y el final de la bobina 3 constituyen los terminales del grupo.*

***Figura*** *7.1.4*

**a)** ***CONEXIÓN EN ESTRELLA:*** *Se trata de conectar en estrella las 3 fases del motor 3ϕ ya considerado (4 polos, 36 bobinas estatóricas).*

1. *Se conectan primero todas las bobinas en grupos. Las tres bobinas de cada grupo se unen en serie. Si dichas bobinas han sido confeccionadas en grupos no será precisa esta operación.*
2. *Se conectan seguidamente entre si todos los grupos que pertenecen a la fase A. La conexión debe efectuarse de manera que por el primer grupo circule la "i" en sentido de las agujas del reloj, por el segundo grupo en sentido contrario, por el 3° nuevamente en el sentido horario, etc. De esta forma se obtendrán polaridades sucesivas de signo alterno.*

   *El principio de la fase A se empalma a un terminal flexible, que se lleva al exterior, el final de dicha fase se unirá posteriormente a las finales de las fases B y C.*

*Esta unión se encintará convenientemente.*

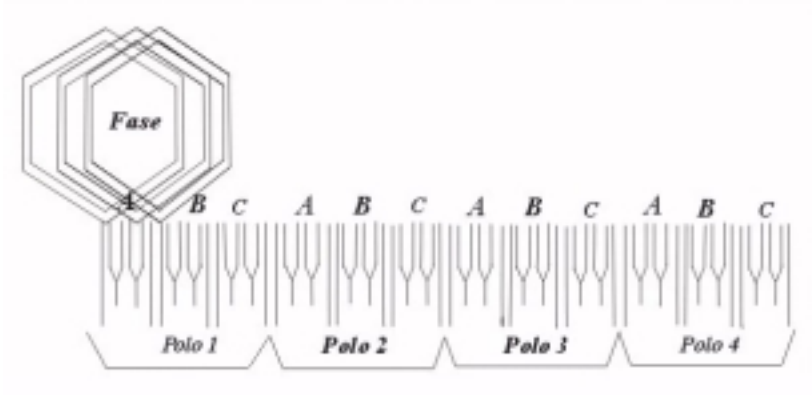



***Figura*** *7.1.5*

***REGLA 3:*** *Para determinar el N° de grupos de bobinas, se multiplica el N° de polos por el N° de fases del motor.*

*Ejem. 3 . En el motor 3ϕ tetrapolar que nos sirve de referencia habrá:*

$$4polos \times 3fases = 12 \quad grupos\ de\ bobinas \quad .....(7-3)$$

***REGLA 4:*** *Para determinar el N° de bobinas grupo, se divide el N° total de bobinas del motor por el N° de grupos*

*Ejem. 4. En el motor 3ϕ de referencia se tendrá:*

$$\frac{36 bobinas}{12 grupos} = 3\ bobinas / grupo \quad .....(7-4)$$

*En el motor del caso anterior se ha visto que hay 9 bobinas por polo, luego cada polo estará subdividido en 3 grupos, y cada grupo estará constituido por 3 bobinas de circulación de la corriente que figuran debajo de cada grupo*

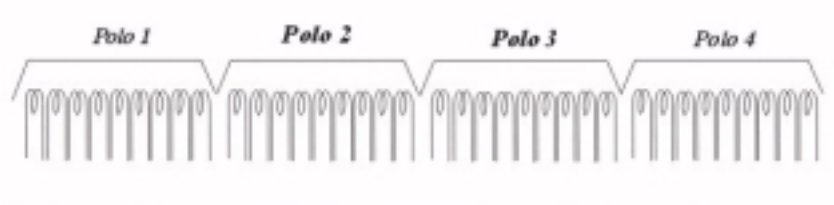
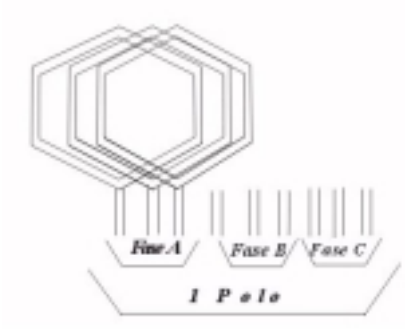



***Figura** 7.1.6*




*Subdivisión de los polos del motor en 3 grupos, uno por fase. Cada grupo comprende 3 bobinas.*

***Figura** 7.1.7*

*señalan sucesivamente direcciones opuestas : así. La primera flecha indica el sentido de las agujas del reloj, la 2da el sentido contrario, la 3ra el mismo sentido de la primera, la cuarta el mismo que la 2da etc. Este es uno de los métodos que permiten comprobar si la polaridad de cada grupo es correcta.*

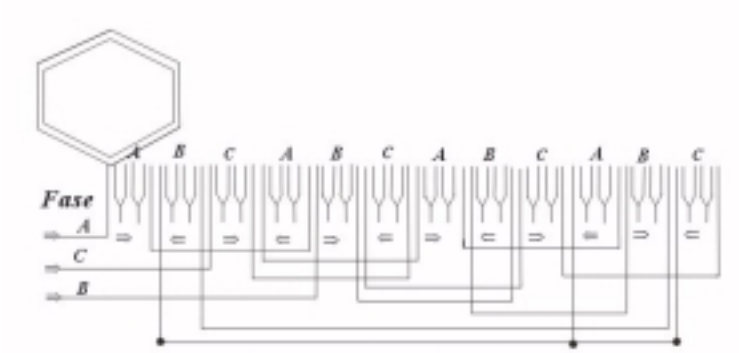



***Figura** 7.1.8*

*Los extremos de las tres fases van empalmadas entre sí; al punto de conexión se le llama punto neutro.*

*Conexión de los grupos de la fase B, idéntica a las anteriores, pero empezando por el 2do y terminando por el primero (conexión de grupo "saltado") la corriente que circula por la fase B es de sentido opuesto a las que circulan por las fases A y C, como indican las flechas.*

*Con el sentido de simplificar el esquema de arriba puede sustituirse cada grupo de bobinas por un pequeño rectángulo ó a veces también es costumbre emplear un esquema circular.*

*Las bobinas del motor 3ϕ conectadas formando 12 grupos iguales. Cada grupo se compone de 3 bobinas. Los cuatro polos son también iguales.*

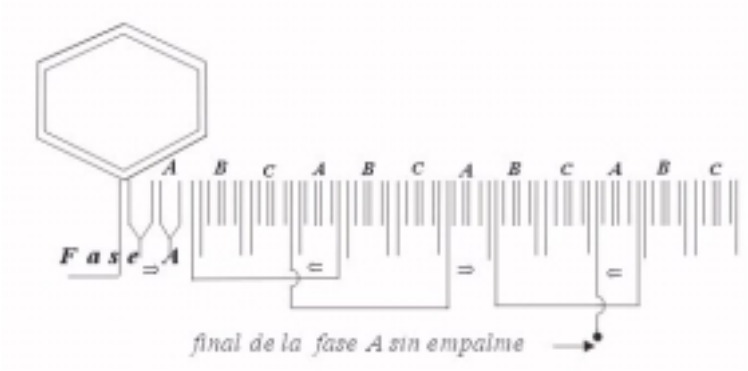



**Figura** *7.1.9*

3. *Se conectan ahora entre sí los grupos de la fase C, exactamente igual que los de la fase A. El primer grupo libre, perteneciente a la fase B, ha sido"saltado" intencionalmente con objeto de que la inyección del conexionado entre grupos pueda ser idéntica para las tres fases.*

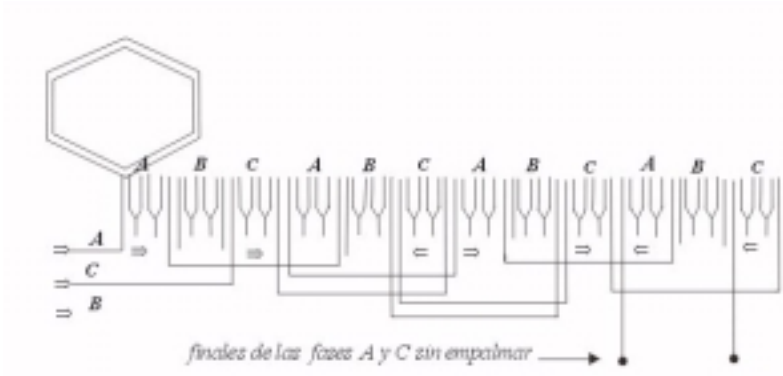



**Figura** *7.1.10*

4. *Finalmente, se conectan los grupos de la fase B del mismo modo que se ha procedido con los de la fase A y C, pero empezando por el segundo de dicha fase, es decir, el quinto a partir del principio. Gracias ha éste artificio llamado conexión con grupo "saltado", las flechas respectivas del sentido en cada Rectángulo representa un grupo de 3 bobinas.*

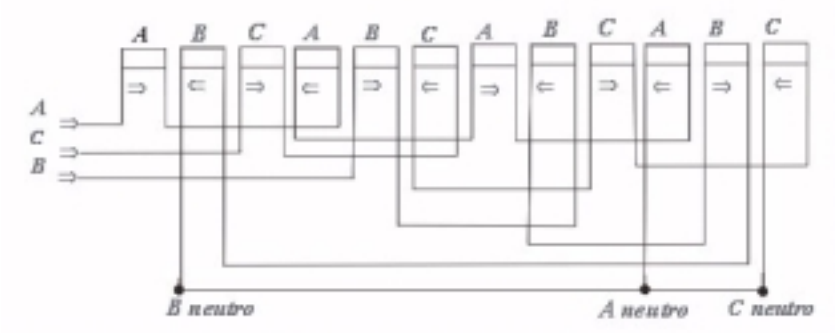



**Figura** *7.1.11*

*El diagrama siguiente permite poner más claramente de manifiesto la clase y las características de conexión del motor considerado hasta ahora.*

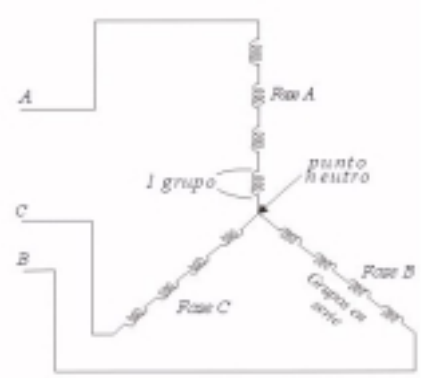
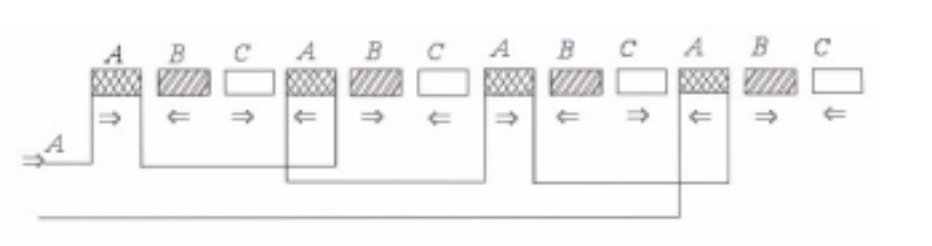



*Diagrama esquemático de un motor 3ϕ tetrapolar conectado en estrella (1Y).*

***Figura** 7.1.12*

***b) CONEXIÓN EN TRIÁNGULO :***

1. *Los grupos pertenecientes a la fase A se unen entre sí de igual manera que se hizo con la conexión en estrella, es decir, alternando el signo de sus polaridades.*
   *Es una buena norma poner encima de cada grupo la letra característica de la fase a la cual pertenece, y debajo de él la flecha indicativa del sentido de circulación de la corriente.*




*Conexión de los grupos que componen la fase A*
***Figura** 7.1.13.*

2. *Se unen ahora los grupos de la fase C exactamente igual como se ha procedido con los de la fase A. Conéctese entonces el final de la Fase A con el principio de la fase C.*

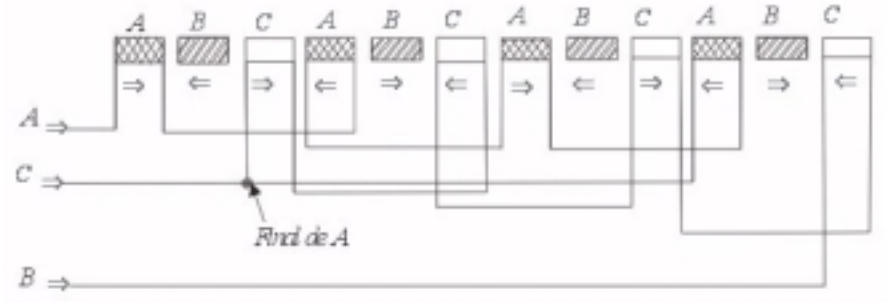



***Figura** 7.1.14*

3. *Se unen a continuación el final de la fase C con el principio del segundo grupo perteneciente a la fase B . Los grupos que componen dicha fase tendrán también polaridades alternadas y siempre de signo alternado.*

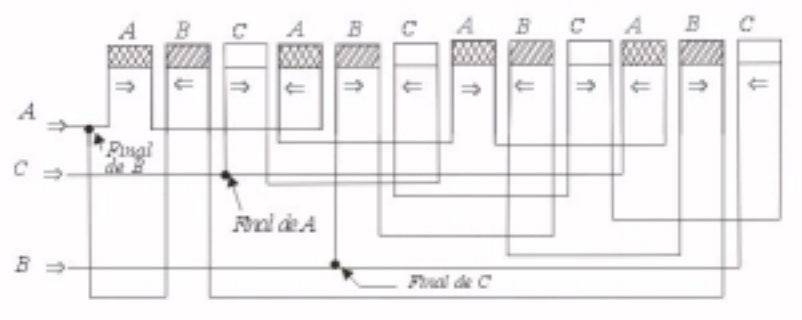



**Figura** *7.1.15*

### *7.1.3.1 CONEXIONES EN PARALELO:*

*Se muestra una conexión en estrella / doble paralelo (2Y), presenta dos vías al paso de la corriente, puesto que está formada por dos ramas iguales unidas en paralelo.*

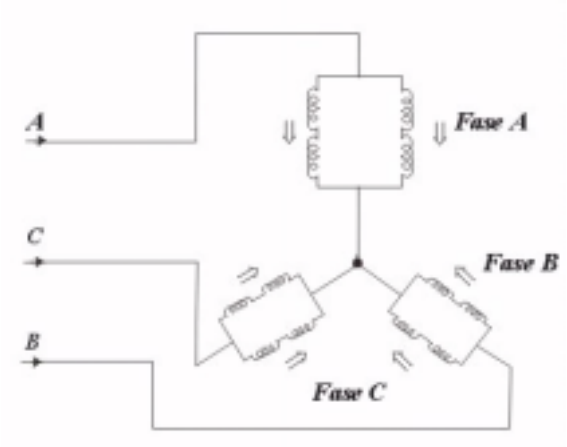



**Figura** *7.1.16*

*Se observa la conexión de los 4 grupos de la fase A en doble paralelo:*

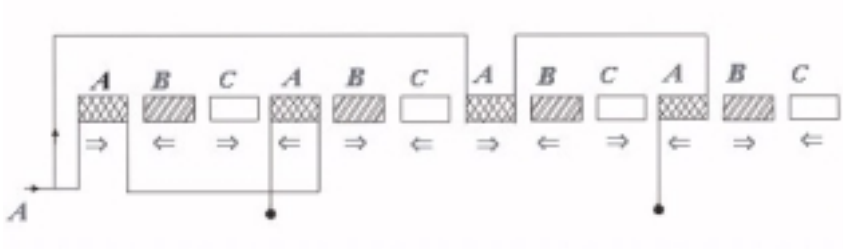



**Figura** *7.1.17*

*Conexión en doble paralelo de los cuatro grupos de la fase A. Los dos terminales libres irán conectados al punto neutro.*

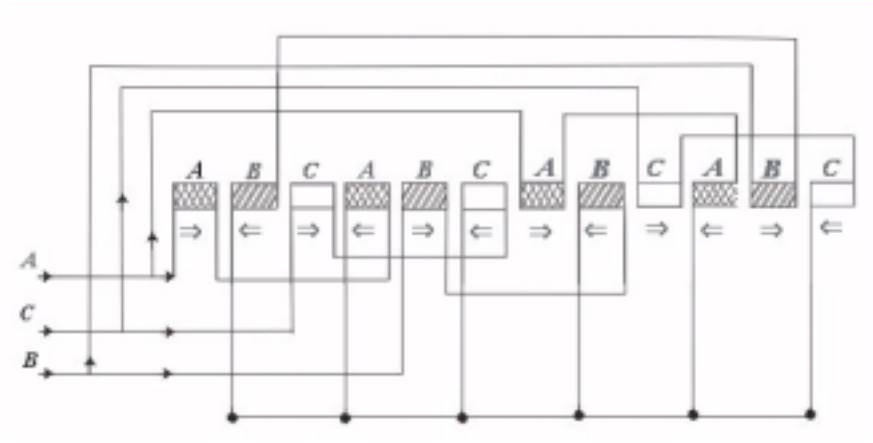



***Figura*** *7.1.18*

*Conexión en doble paralelo de los cuatro grupos de las fases A y C.*

*Ahora son cuatro los terminales libres pendientes de su unión al punto neutro.*

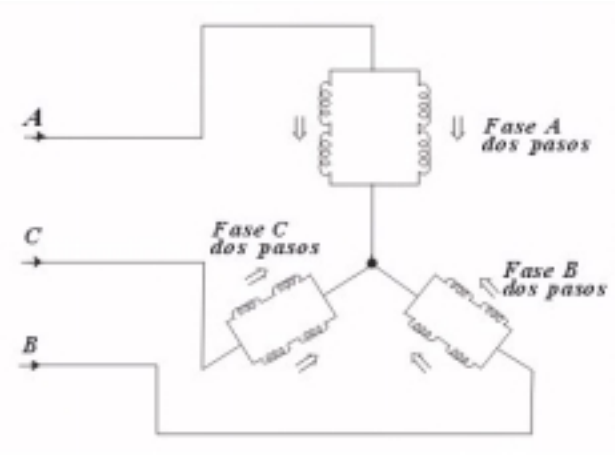



***Figura*** *7.1.19*

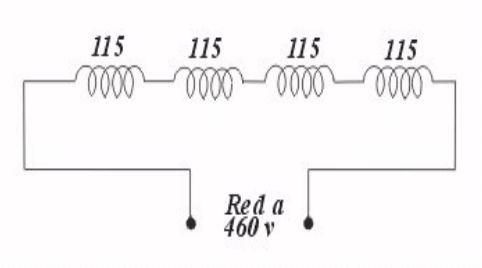
*Esquema final completo del motor 3ϕ tetrapolar conectado en estrella / doble paralelo (2Y) . Cada fase ofrece dos vías al paso de la corriente, puesto que está formada por dos ramas iguales unidas en paralelo.*

### *7.1.3.2 MOTORES TRIFÁSICOS PARA DOBLE TENSIÓN DE SERVICIO*

*Motores 3ϕ de tamaño pequeño y mediano: fabricados de modo que puedan conectarse a dos tensiones de alimentación distintas. La finalidad de ello es hacer posible el empleo de un mismo motor en localidades con red de suministro eléctrico a diferente tensión.*

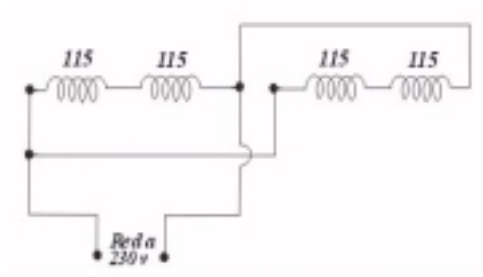
*Tensión de servicio mayor : conexión en serie de los arrollamientos parciales.*

*Tensión de servicio menor : conexión en doble paralelo de los mismos.*



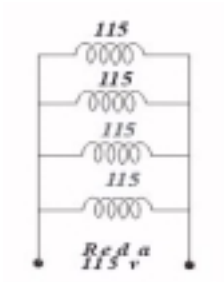

*Cuatro grupos iguales unidos en serie y conectados a 460 V. A cada grupo están aplicados 115 V.*

***Figura** 7.1.20*




*Los cuatro grupos unidos en doble paralelo y conectado a 230 V. La tensión en cada grupo sigue siendo de 115 V.*

***Figura** 7.1.21*




*Los cuatro grupos unidos ahora en cuádruple paralelo y conectados a 115 V. Cada grupo trabaja a 115 V.*

***Figura** 7.1.22*

### *7.1.3.3 MOTORES 3ϕ PARA DOS O MÁS VELOCIDADES DE RÉGIMEN*

*La velocidad de un motor 3ϕ de inducción depende de su N° de polos y de la frecuencia de la red de alimentación. Como ésta última permanece constante; para variar la velocidad de dicho motor será preciso modificar su N° de polos.*

### *7.1.4 INDUCIDOS DE CORRIENTE CONTÍNUA.*

*El arrollamiento de inducido consiste en una serie de bobinas alojadas en las ranuras de éste último cuyos terminales van conectados sucesivamente dos a dos a las delgas del colector.*

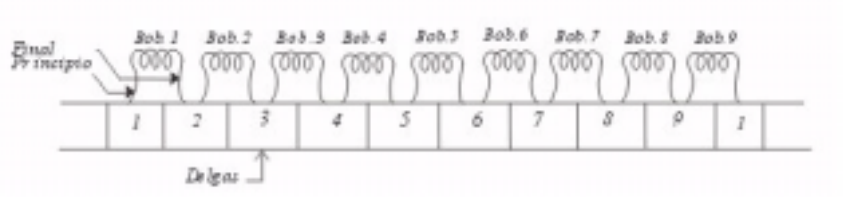



***Figura** 7.1.23*

*La figura anterior muestra el esquema lineal de un arrollamiento simple de inducido, a base de nueve bobinas, con colector de nueve delgas. El final de cada bobina y el principio de la siguiente van conectados a una misma delga. El final de la última bobina va unido a la misma delga que el principio de la primera bobina.*

*Los arrollamientos de inducido se clasifican en dos grupos principales: imbricados y ondulados. La diferencia entre ambos radica en las posiciones relativas de las delgas a las cuales van conectados los terminales de cada bobina.*

### *7.1.5 ARROLLAMIENTOS EN MÁQUINAS DE CORRIENTE ALTERNA*

*Por regla general, los devanados son de tipo abierto. Existen dos tipos de devanados :*

*a) Devanados Concéntricos y*
*b) Devanados Excéntricos.*

***a) DEVANADOS CONCÉNTRICOS :*** *Todas las bobinas de un grupo tienen el mismo eje magnético y número de vueltas diferentes. El paso de cada bobina es diferente.*

$$N_1 \neq N_2 \neq N_3 \neq .... \neq N_n \quad .....(7-5)$$

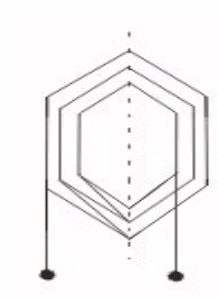
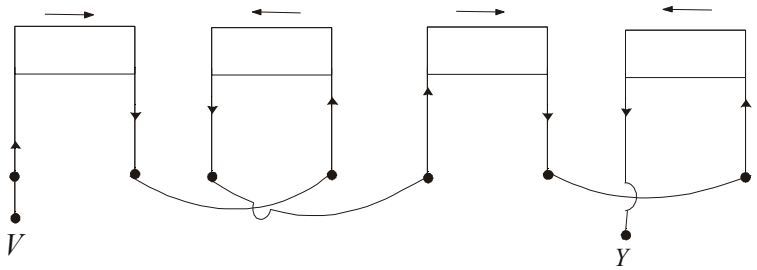


***Figura*** *7.1.24*

***FORMAS DE CONTRUCCIÓN:*** *Son de una capa, se construyen en dos clases:*

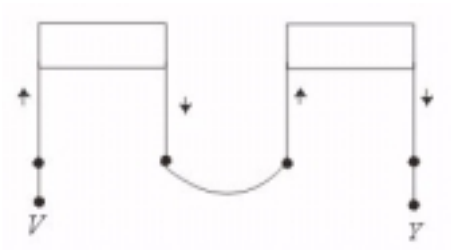
*I.- Devanados Concéntricos con "p" grupos / fase, cada fase está compuesta por un número de grupos en serie, que es igual al número de polos.*




*Devanados de fase de 4 polos, formado por 4 grupos en serie.*

***Figura*** *7.1.25*

*II.- Devanados Concéntricos con "P/2" grupos / fase, cada fase está constituida por "P/2" grupos en serie.*




*Devanado por fase de 4 polos formando por 2 grupos en serie*

***Figura*** *7.1.26*

**b) DEVANADOS EXCÉNTRICOS:** *Los devanados excéntricos pueden ser de simple ó doble capa, los grupos están constituídos por bobinas de igual paso e igual número de vueltas. Usualmente se realizan con "P" grupos / fase. Los devanados imbricados enteros están comprendidos en esta clasificación.*

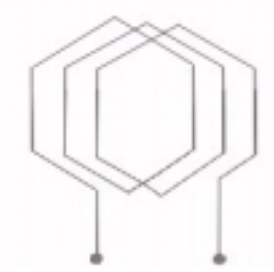


***Figura*** *7.1.27*

***FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE UN DEVANADO IMBRICADO ENTERO***

*DATOS GENERALES*

- *r: número de ranuras*
- *p: Número de polos*
- *q: Número de fases del devanado*
- *T: paso de bobina x* $\left(\frac{360°}{r}\right)$
- *b: Número de bobinas*
- *b = r (si es de doble capa)*
- $b = \frac{r}{2}$ *(si es de capa simple)*

***PROCEDIMIENTO:***

- *Número de bobinas por fase que deberán formar "p" grupos: b/q*
- *Número de bobinas por grupo :* $m = \frac{b/q}{p}$
- *Paso de grupo :* $\delta = \frac{r}{p}$
- *Paso de fase :* $\varepsilon_{3\phi} = \frac{r}{3p/2}$ , $\varepsilon_{2\phi} = \frac{r}{4p/2}$
- *Número efectivo de vueltas por fase ($N_{EF}$):*

$$N_{EF} = \text{número total de vueltas de la fase} \times K_p \times K_d \quad .....(7-6)$$

*Siendo:*

$$\text{Factor de distribución: } K_d = \frac{sen\left(\frac{m\,\gamma'}{2}\right)}{m\,sen\left(\frac{\gamma'}{2}\right)} \quad .....(7-7)$$

$$Factor\ de\ paso:\ K_p = sen\left(\frac{T'}{2}\right) \quad .....(7-8)$$

*Donde :*

$$Ángulo\ de\ ranura:\ \gamma = \gamma_{Geom} = \frac{360}{r} \quad .....(7-9)$$

$$Ángulo\ Magnético:\ \gamma_{mag} = \gamma' = \gamma\left(\frac{p}{2}\right) \quad .....(7-10)$$

$$T' = T\left(\frac{p}{2}\right) \quad .....(7-11)$$

$$T = paso\ de\ bobina \times \frac{360°}{r} \quad .....(7-12)$$

*Usualmente constituyen los devanados de : Los inducidos de las máquinas de corriente continua, de las máquinas síncronas y de las máquinas asíncronas trifásicas.*

***EJEMPLO:*** *Se tiene un motor asíncrono 3ϕ, de rotor bobinado, 4 polos, 220Volts , 60 Hz, tiene las siguientes características : λ = 0,4m , D = 0,35 m , g = 0,5 mm; el devanado estatórico tiene 36 ranuras, doble capa, 5 espiras/bobina, paso de bobina. YB = 1-11 conexión Y . Calcular:*

*a) La distribución de la fuerza magnetomotriz(Fmm) para cada una de las fases cuando circula 1 Amp.*
*b) El número efectivo de vueltas por fase.*

*SOLUCIÓN:*

$r = 36$ *ranuras* $\qquad$ *paso de grupo :* $\delta = \frac{36}{4} = 9$

$p = 4$ *polos* $\qquad$ *paso de fase :* $\varepsilon = \frac{36}{3\left(\frac{4}{2}\right)} = 6$

$q = 3$ *fases*

$b = 36$ *bobinas*

*N° de bobinas por fase = 36 / 3 = 12*

*N° de bobinas por fase por grupo =* $\frac{12}{4} = 3$

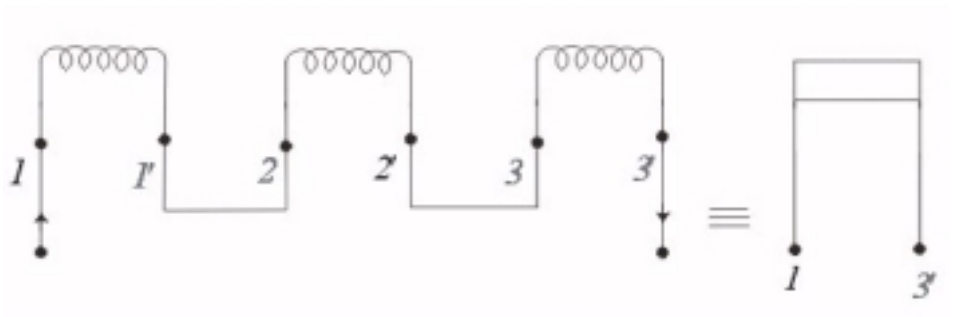



***Figura*** *7.1.28*

***FASE "R"***

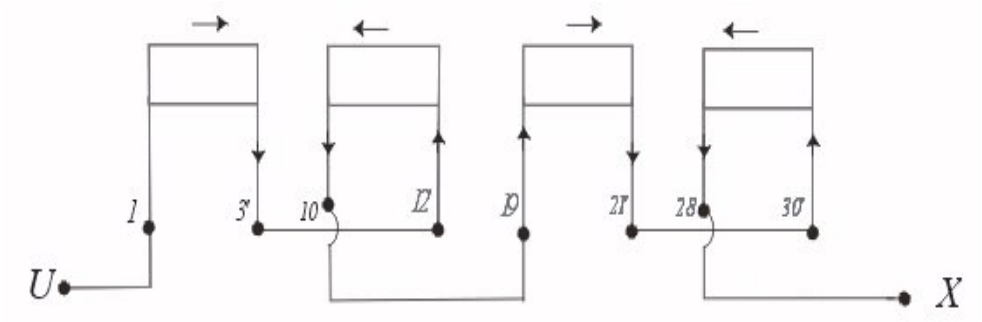



***Figura*** *7.1.29*

***FASE "S"***

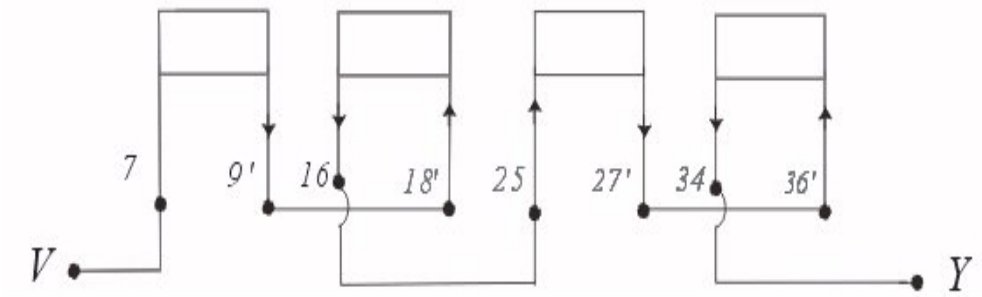



***Figura*** *7.1.30*

***FASE "T"***

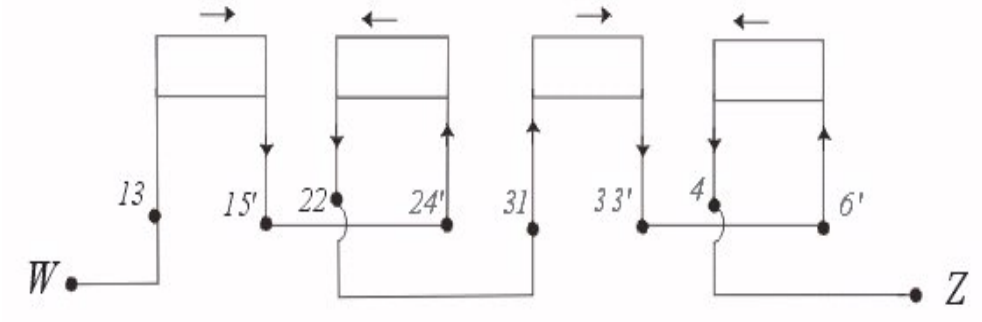



***Figura*** *7.1.31*

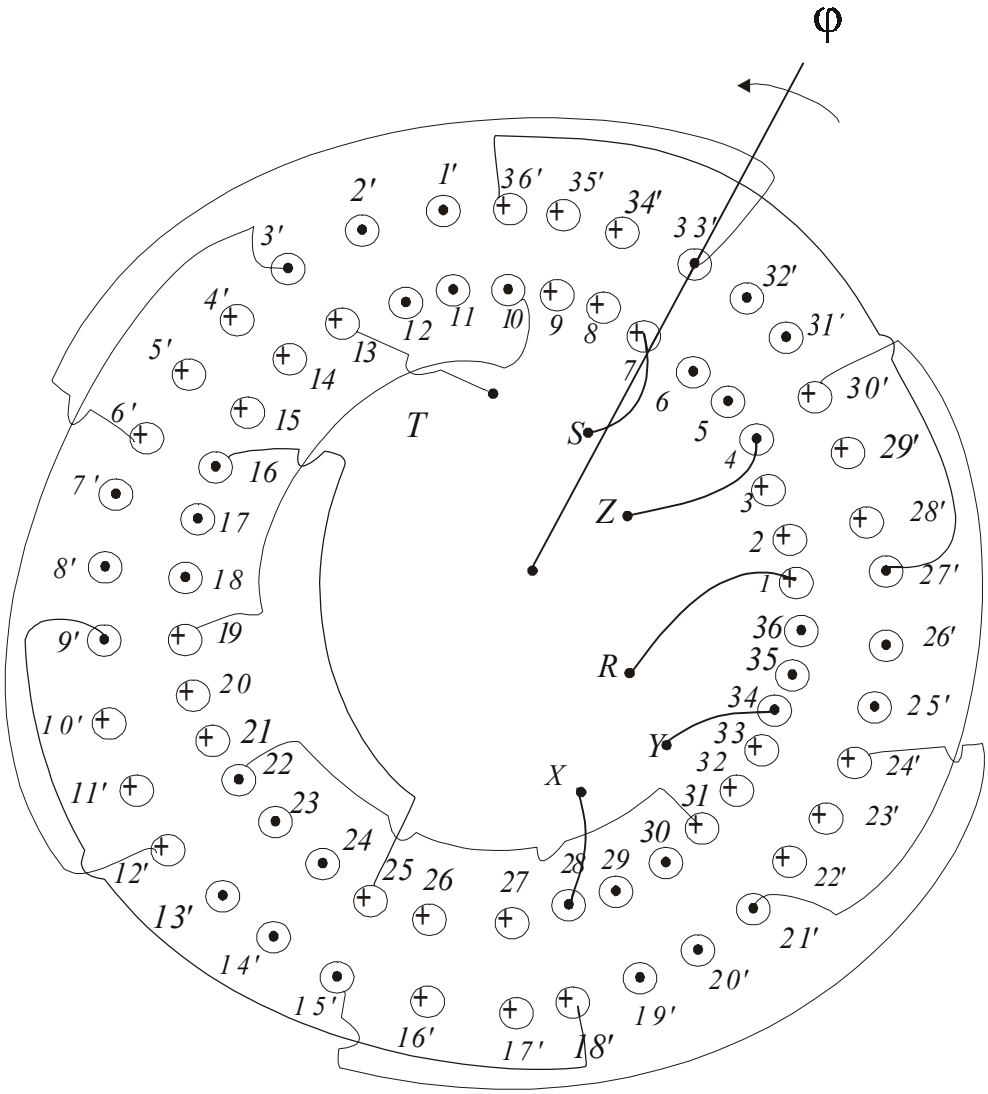



***Figura** 7.1.32*

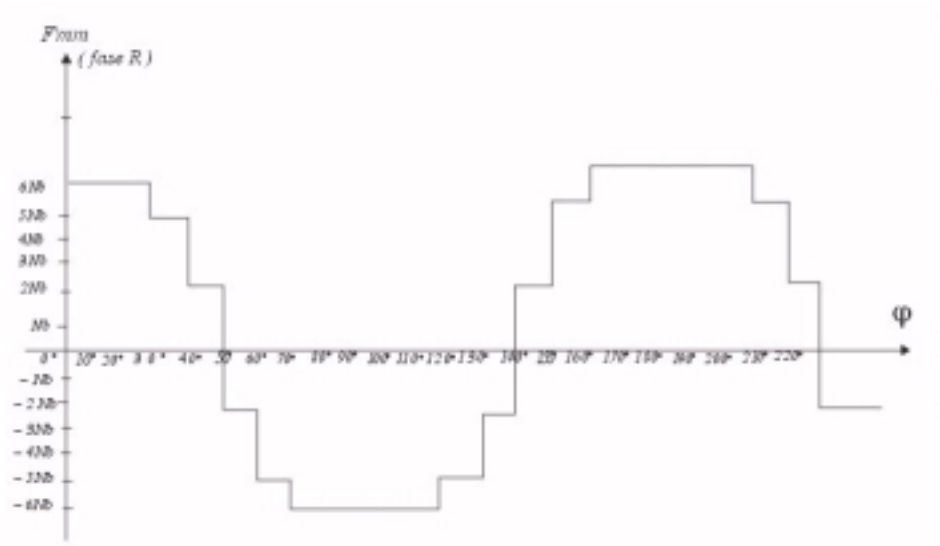



***Figura** 7.1.33*

*b) Número efectivo de vueltas ($N_{EF}$)*

$$N_{EF} = p \; x \; n$$

$$n = m \; x N_b \; x K_d x K_p$$

$$m = 3 \; , \; \gamma = \frac{360°}{36} = 10°$$

$$\gamma' = \gamma\left(\frac{P}{2}\right) = 20°$$

$$K_d = \frac{sen\left(m\frac{\gamma'}{2}\right)}{msen\left(\frac{\gamma'}{2}\right)} = \frac{sen\left(3\times\frac{20°}{2}\right)}{3sen\left(\frac{20°}{2}\right)} = 0{,}959$$

$$T = YB\left(\frac{360°}{r}\right) = (11-1)\times\frac{360°}{36} = 100°$$

$$T' = T\frac{P}{2} = 100°\times\frac{4}{2} = 200°$$

$$K_p = sen\left(\frac{T'}{2}\right) = sen\left(\frac{200°}{2}\right) = 0{,}985$$

$$N_{EF} = 4x3x5x0.959x0.985 = 56{,}71 \text{ espiras / fase}$$

$$N_{EF} = 57 \text{ espiras / fase}$$

## 7.2 MÁQUINA ASÍNCRONA TRIFÁSICA

*La máquina asíncrona trifásica representa un transformador en el caso que esté con rotor fijo.*

*Se distingue del transformador normal sólo por la existencia de un devanado repartido en el estator y en el rotor y la existencia de un entrehierro ( espacio de aire).*

*"La máquina asíncrona está sometida al principio de reciprocidad y puede funcionar en régimen de motor y en régimen de generador".*

*El estator de la máquina asíncrona trifásica es análogo al de una máquina síncrona trifásica y en él se coloca un devanado trifásico semejante, que se conecta a la red trifásica de corriente alterna.*

*Por su construcción del devanado rotórico tenemos dos tipos:*

*a) con colector.*
*b) sin colector.*

*La máquina asíncrona sin colector es la principal (la que más se usa) el rotor de la máquina asíncrona representa un cuerpo cilíndrico compuesto de chapas de acero al silicio con ranuras para instalar el devanado. Se distingue:*

1) ***Las máquinas asíncronas con rotor bobinado:*** *En este tipo los devanados rotórico y estatórico son similares. Los devanados en los rotores se conectan generalmente en estrella y sus terminales se sacan a través de anillos de colector y escobillas al exterior al reóstato de arranque.*

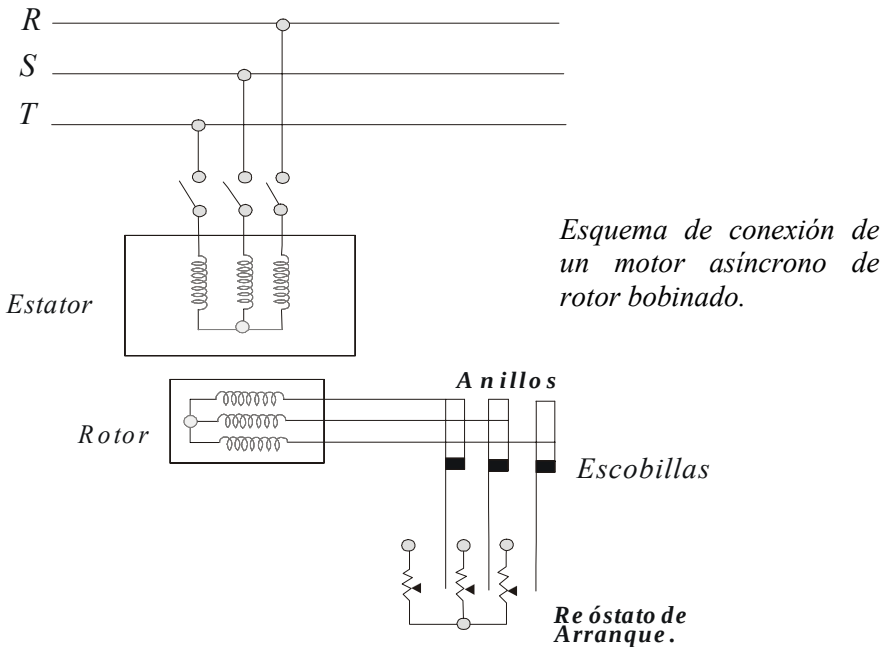



***Figura*** *7.2.1*

2) ***Las máquinas asíncronas con rotor en cortocircuito ó de jaula de ardillla:*** *Se dividen éstas en 3 modificaciones principales:*

*a. Con rotor en simple jaula de ardilla.*
*b. Con rotor de gran reactancia ( llamadas también de corriente foucault).*
*c. Con rotor de doble jaula de ardilla.*

*Estos tipos de máquinas difieren uno de otro, por sus particularidades de arranque.*

### *7.2.1 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA*

*El funcionamiento de una máquina asíncrona se basa en el principio de la interacción electromagnética entre el campo magnético giratorio, creado por un sistema de corrientes trifásicas suministrada desde la red al devanado del estator y las corrientes que se inducen en el devanado del rotor cuando el*

*campo giratorio cruza sus hilos conductores. Así pues el trabajo de la máquina asíncrona por su esencia física es semejante al funcionamiento de un transformador considerando el estator como devanado primario y el rotor como devanado secundario que en el caso general puede girar a una velocidad "$\omega_m$".*

*Cuando el campo giratorio tiene carácter sinusoidal su velocidad de rotación es :*

$p'$ = *Número de pares de polos.*
$\omega_S$ = *velocidad del campo giratorio.*
$f$ = *frecuencia de la red.*
$P$ =*Números de polos.*

$$\omega_S = \frac{2\pi f}{\frac{P}{2}}\left(\frac{rad}{seg}\right) \quad .....(7-13)$$

$$\omega_S = \frac{f}{p'}\left(\frac{ciclos}{seg}\right) \quad .....(7-14)$$

$$\omega_S = \frac{120f}{P}\ rpm \quad .....(7-15)$$

*La interacción electromagnética entre ambas partes de la máquina asíncrona (sin colector) sólo es posible cuando las velocidades del campo giratorio* $(\omega_S)$ *y del rotor* $(\omega_m)$ *son distintas es decir a condición de que* $(\omega_S \neq \omega_m)$ *puesto que si* $(\omega_S = \omega_m)$ *el campo sería inmóvil con respecto al rotor y en el devanado del rotor no se inducirá corriente alguna.*

### *7.2.2 DESLIZAMIENTO*

*La relación:*

$$S = \frac{\omega_S - \omega_m}{\omega_S} \quad .....(7-16)$$

*O bien:*

$$S\% = \frac{\omega_S - \omega_m}{\omega_S} \times 100\% \quad .....(7-17)$$

*Se denomina deslizamiento o resbalamiento de la máquina asíncrona.*

$\omega_m$ *: velocidad del rotor.*

$\omega_S$ *: velocidad del campo giratorio.*

### *7.2.3 REGÍMENES DE FUNCIONAMIENTO DE LA MÁQUINA ASÍNCRONA*

*De acuerdo a la relación entre las velocidades* $\omega_S$ *y* $\omega_m$ *la máquina asíncrona puede funcionar en :*

*a. Régimen de motor.*
*b. Régimen de generador.*
*c. Régimen de freno electromagnético.*

***a) Funcionamiento de la Máquina Asíncrona en régimen de Motor***

*Supongamos que al conectar el estator a una red de corriente trifásica hemos dejado el circuito de rotor abierto, en este caso* $\omega_m = 0$ *y la máquina asíncrona representará a un transformador en régimen de marcha en vacío. El campo magnético del estator gira con respecto al rotor a una velocidad* $\omega_S$ *e induce en el devanado del rotor una f.e.m.* $E_2$ *que tiene la misma frecuencia f que la red y dirección determinada por la regla de la mano derecha.*

*Si ahora cerramos el circuito del rotor, circulará por el devanado del rotor una corriente* $I_2$ *cuya componente activa coincide en sentido con el de la f.e.m.* $E_2$*. Como resultado de la interacción del flujo creado por esta corriente con el flujo del estator se formará el flujo resultante.*

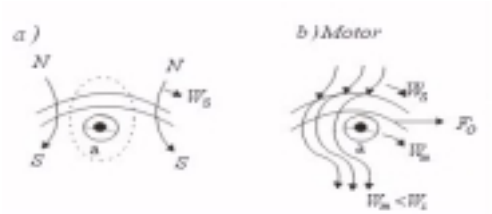



**Figura** *7.2.2*

*La fuerza* $\mathbf{F_o}$ *aplicada al hilo conductor* **a***, crea en el eje de la máquina un momento que tiende a girar el rotor en el sentido de giro del flujo.*

*El conjunto de los momentos creados por cada hilo conductor forma el momento de rotación resultante* **T** *de la máquina; si éste momento es mayor que el par de frenado en el eje, el rotor comenzará a girar y adquirirá una cierta velocidad* $\omega_m$ *. En este caso la energía eléctrica aplicada al estator desde la red se convierte en energía mecánica en el eje , es decir la máquina funcionará como motor.*

*La velocidad* $\omega_m$ *del motor depende de la carga colocada en el eje del motor. Durante la marcha en vacío la velocidad* $\omega_m$ *es casi igual a* $\omega_S$ *, pero no la alcanzará nunca puesto que si fuera* $(\omega_S = \omega_m)$ *entonces la máquina no podría funcionar como motor.*

*Así pues , la máquina Asíncrona funciona como motor cuando la velocidad se halla entre los límites de* $\omega_m$ *= 0 hasta* $(\omega_S = \omega_m)$ *, es decir, cuando el deslizamiento varía entre s = + 1 hasta s = 0.*

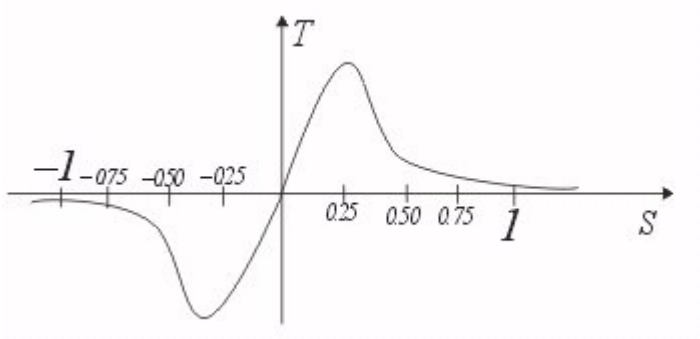



***Figura*** *7.2.3*

***b) Funcionamiento de la Máquina Asíncrona en régimen de Generador***

*Supongamos que con un motor primo se acelere el rotor de la máquina asíncrona de tal modo que* $\omega_m$ *resulta mayor que* $\omega_S$ *.*

*En este caso el deslizamiento se hace negativo y el sentido de rotación del flujo con respecto al rotor cambia por el contrario al sentido que tenía la máquina cuando funcionaba como motor.*

*En correspondencia con ésto cambia el sentido de la f.e.m. y de la corriente en el hilo conductor* ***a*** *y también el signo del momento.*

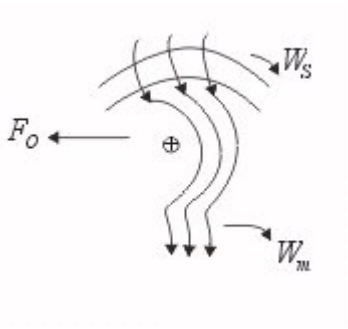



***Figura*** *7.2.4*

*Por consiguiente, el momento desarrollado por la máquina asíncrona se convierte en par de frenado con respecto al momento de rotación del motor primario. En éstas condiciones la máquina asíncrona funciona como generador convirtiendo la energía mecánica, aplicada a ella desde el eje del motor primario, en energía eléctrica que ésta entrega a la red.*

*El deslizamiento en este caso varía entre limites* $S = 0$ *hasta* $S = -\infty$**.**

**c) Funcionamiento de la Máquina Asíncrona en régimen de Freno Electromagnético.**

*Supongamos que bajo la acción de algún factor exterior el rotor de la máquina asíncrona comienza a girar en sentido al del flujo magnético. En este caso a la máquina asíncrona se le aplica energía desde dos fuentes : energía eléctrica desde la red y energía mecánica desde el motor primo . Este régimen de funcionamiento se llama régimen de freno electromagnético. Este comienza cuando* $\omega_m = 0$ *y teóricamente puede continuar hasta que* $\omega_m = -\infty$. *que corresponden a* $S = +1$ *y* $S = +\infty$.

*En la práctica el funcionamiento en régimen de freno electromagnético se utiliza generalmente en las máquinas de elevación y transporte para bajar la carga.*

### 7.2.4 RELACIONES PRINCIPALES

*En la máquina asíncrona el rotor gira con respecto al campo magnético a una velocidad igual a* $(\omega_S - \omega_m)$. *Por eso la f.e.m. inducida en el rotor tiene una frecuencia igual a :*

$$f_2 = p'(\omega_S - \omega_m) = p'\omega_S\left(\frac{\omega_S - \omega_m}{\omega_S}\right) = fS \quad .....(7-18)$$

*Donde:*

$f_2 \rightarrow$ *Frecuencia en el rotor*

$p' \rightarrow$ *Números de pares de polos.*

$\omega_m \rightarrow$ *Velocidad de rotor.*

$\omega_S \rightarrow$ *Velocidad del campo magnético giratorio.*

| Concepto | Valor de S | Signo de P (Potencia Mecánica) |
|---|---|---|
| a | 0 <S <1 | Positivo |
| b | S < 0 | Negativo |
| c | S > 1 | Negativo |

*a) Cuando el deslizamiento se encuentra entre cero y la unidad , la velocidad del motor está entre reposo y sincronismo y el sentido de la rotación es el mismo que el del campo magnético giratorio. Por tanto el signo positivo de P indica acción motriz.*

*b) Cuando el deslizamiento es menor que cero; es decir, es negativo, entonces el rotor está siendo impulsado hacia delante en el mismo sentido que el campo giratorio y la velocidad real es mayor que la velocidad de sicronismo. Por tanto se ha invertido el sentido relativo de rotación entre el rotor y el campo*

*magnético por lo que las fem's y corrientes del rotor están asimismo invertidas lo que indica que la máquina ha variado de acción motriz a acción generatriz. El signo negativo de P está de acuerdo con esta inversión de la función.*

*c) Cuando el deslizamiento es mayor que la unidad el motor está siendo impulsado hacia atrás dentro del campo magnético giratorio hacia delante. La* ***f.e.m*** *del rotor continúa teniendo el mismo sentido que en reposo (ó que a cualquier velocidad entre sincronismo y reposo); pero se hace mayor en magnitud a causa de la gran velocidad relativa con que corta las líneas de inducción. La máquina se ha convertido en un freno eléctrico, lo que está acorde con el signo negativo de* ***P****.*

### *7.2.5 CIRCUITO EQUIVALENTE*

*La máquina de inducción es muy semejante a un transformador cuyo primario es el estator y cuyo secundario es el rotor. Suponiendo que el rotor está parado ($\omega_m = 0, S = 1$) podemos construir un circuito equivalente monofásico igual al del transformador tal como se indica en la figura siguiente:*

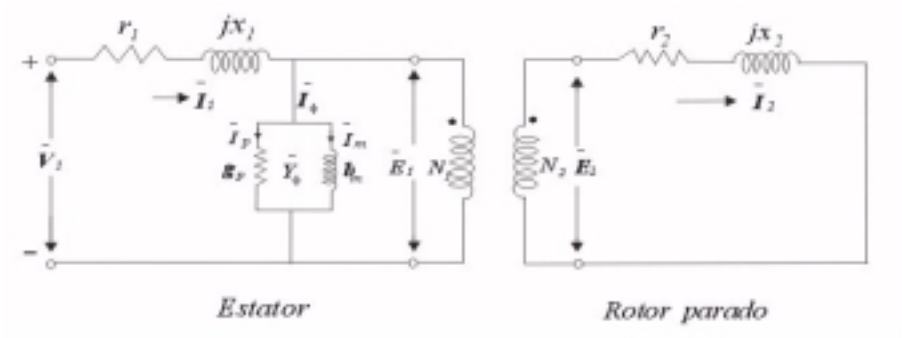



***Figura*** *7.2.5* $\boldsymbol{a = N_1 / N_2}$

*Donde:*

$Z_1 = r_1 + j\,x_1 \rightarrow$ *Impedancia de dispersión del estator.*
$Z_2 = r_2 + j\,x_2 \rightarrow$ *Impedancia de dispersión del rotor.*
$Y = g_P - jb_m \rightarrow$ *Admitancia de excitación.*
$g_p \rightarrow$ *toma en cuenta las pérdidas en el fierro.*
$b_m \rightarrow$ *La corriente de magnetización ($I_m$) al circular por $b_m$ (suceptancia magnética) produce el campo giratorio.*

*Cuando el rotor esta parado:*

$\bar{E}_1 \rightarrow$ *f.e.m. inducida en el estator por el campo giratorio resultante.*
$\bar{E}_2 \rightarrow$ *f.e.m. inducida en el rotor por el campo giratorio resultante*
$\bar{I}_2 \rightarrow$ *Corriente rotórica* $= \dfrac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2}$*; mientras el rotor está parado ésta corriente tendrá la misma frecuencia* ***f*** *de la corriente del estator.*

*Cuando el rotor se pone en movimiento:*

*La frecuencia del rotor se reduce a* ***Sf****, y la f.e.m. del rotor a* $S\bar{E}_2$ *ya que disminuye la velocidad relativa entre el campo giratorio y el rotor, la variación de frecuencia afecta a la reactancia de dispersión del rotor que se reduce a* $SX_2$.

∴ *El rotor en movimiento debe representarse como se indica en la figura siguiente:*

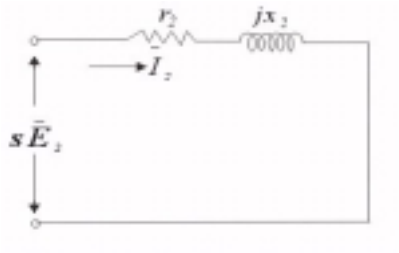



***Figura*** *7.2.6*

*Conviene realizar el siguiente artificio:*

$$\bar{I}_2 = \frac{S\bar{E}_2}{r_2 + jSX_2} = \frac{\dfrac{S\bar{E}_2}{S}}{\dfrac{r_2 + jSX_2}{S}} \quad .....(7-19)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\dfrac{r_2}{S} + jX_2} \quad .....(7-20)$$

*Este artificio nos permite construir el siguiente circuito:*

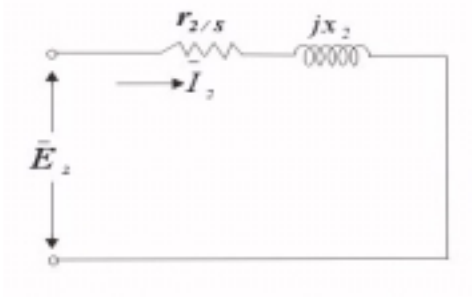



***Figura*** *7.2.7*

*Este circuito tiene la ventaja de tener aplicada la f.e.m.* $\bar{E}_2$ *de rotor parado luego tenemos:*

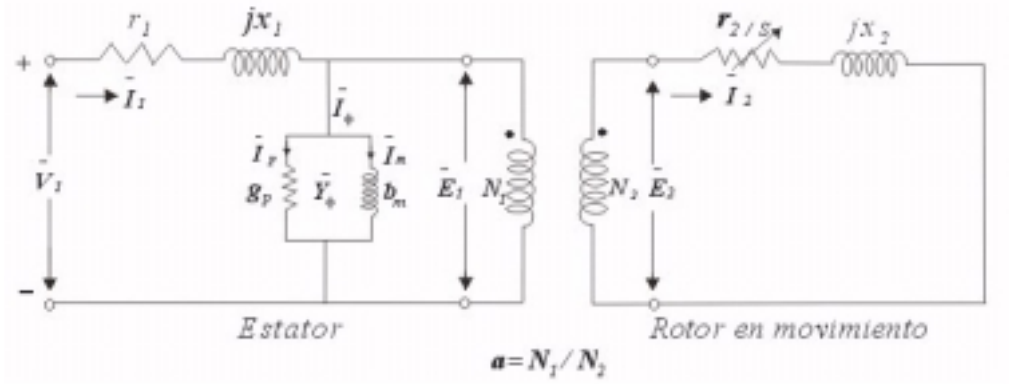


***Figura** 7.2.8*

*Podemos eliminar el transformador ideal utilizando las impedancias referidas al primario o estator.*

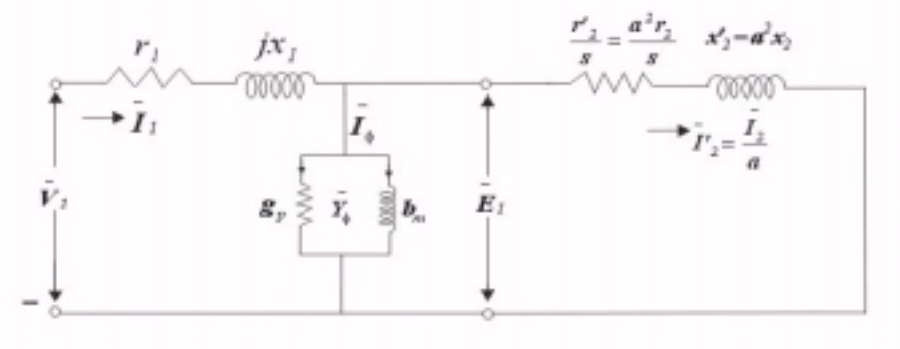



***Figura** 7.2.9*

*Este es el circuito equivalente exacto de la máquina de inducción:*

$$\frac{r_2'}{S} = \frac{a^2 r_2}{S} \quad .....(7-21)$$

*Resistencia variable que toma en cuenta la carga mecánica de la máquina y resistencia interna del rotor*

$$\frac{r_2'}{S} = r_2' + r_2'\left(\frac{1-S}{S}\right) \quad .....(7-22)$$

$$r_2'\left(\frac{1-S}{S}\right) \quad .....(7-23)$$

*Ayuda representar la potencia mecánica de la máquina*

$r_2'$ → *Representa las pérdidas internas del rotor*

*Potencia en eje del motor de inducción* = *Potencia en la resistencia* - *Pérdidas en el hierro* - *Pérdidas mecánicas* { *P rotacionales*, *P dispersas* }

*Si no se incluyen las pérdidas en el hierro en el estator.*

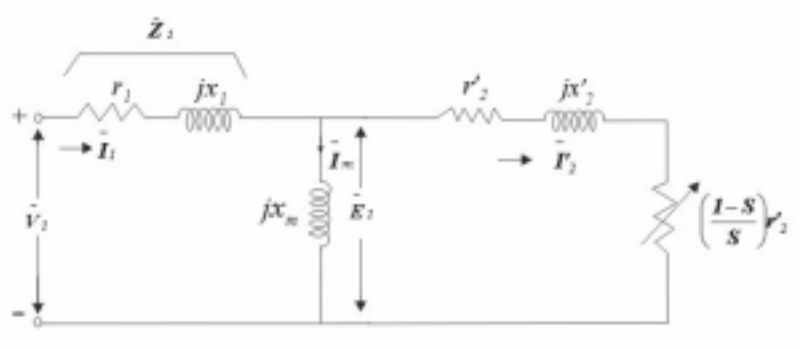


***Figura*** *7.2.10*

*Con respecto a éstos circuitos equivalentes es importante tener presente que si bien todos los parámetros están referidos a la frecuencia del estator, en realidad, en el rotor la frecuencia es siempre igual a Sf, es decir $\bar{I}_2$ e $\bar{I}'_2$ tiene una frecuencia igual a* ***Sf****.*

### *7.2.6 ECUACIONES DEL MOTOR DE INDUCCIÓN*

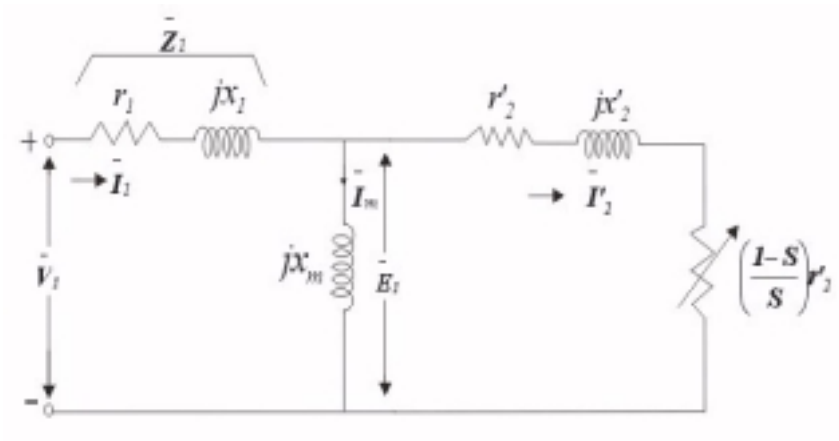



***Figura*** *7.2.11*

*Aplicando el método de mallas al circuito de la figura:*

$$\overline{Z}_1 = r_1 + jX_1 \quad .....(7-24)$$

$$\overline{X}_m = jX_m \quad .....(7-25)$$

$$\overline{Z}'_2 = \frac{r'_2}{S} + jX'_2 \quad .....(7-26)$$

$$\overline{V}_1 = \left(\overline{Z}_1 + \overline{X}_m\right)\overline{I}_1 - \overline{X}_m \overline{I}'_2 \quad .....(7-27)$$

$$0 = -\overline{X}_m \overline{I}_1 + \left(\overline{Z}'_2 + \overline{X}_m\right)\overline{I}'_2 \quad .....(7-28)$$

*Resolviendo las ecuaciones 7-27 y 7-28, tenemos:*

$$\overline{I}_1 = \frac{\left(\overline{Z}'_2 + \overline{X}_m\right)\overline{V}_1}{\left(\overline{Z}_1 + \overline{X}_m\right)\left(\overline{Z}'_2 + \overline{X}_m\right) + X_m^2} = \frac{\left(\overline{Z}_2 + \overline{X}_m\right)\overline{V}_1}{\overline{Z}_1\overline{Z}'_2 + \overline{X}_m\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}'_2\right)} \quad .....(7-29)$$

$$\overline{I}'_2 = \frac{\overline{X}_m \overline{V}_1}{\overline{Z}_1 \overline{Z}'_2 + \overline{X}_m \left(\overline{Z}'_1 + \overline{Z}'_2\right)} \quad .....(7-30)$$

*La potencia mecánica interna desarrollada por el motor 3ϕ será:*

$$P_{mec} = 3r'_2 \left(\frac{1-S}{S}\right) I'^{\,2}_2 \quad .....(7-31)$$

$\Delta P_2 \rightarrow$ *Pérdidas en el rotor*

$$\Delta P_2 = 3r'_2 I'^{\,2}_2 \quad .....(7-32)$$

$P_{EM} \rightarrow$ *Potencia transferida del estator al rotor a través del entrehierro*

$$P_{EM} = P_{MEC} + \Delta P_2 = 3r'_2 I'^{\,2}_2 \quad .....(7-33)$$

*Comparando las ecuaciones 7-31 y 7-33 podemos escribir:*

$$P_{MEC} = (1-S) P_{EM} \quad .....(7-34)$$

*Comparando las ecuaciones 7-32 con la ecuación 7-33 deducimos:*

$$\Delta P_2 = S P_{EM} \quad .....(7-35)$$

*Teniendo presente que el torque interno está dado por :*

$$T = \frac{P_{MEC}}{\omega_m} \quad .....(7-36)$$

*Donde:*

$\omega_m \rightarrow$ *velocidad del rotor*
$\omega_s \rightarrow$ *velocidad síncrona*

*Y sabiendo que :* $\omega_m = (1-S)\omega_S$

*Obtenemos:*

$$T = \frac{P_{MEC}}{(1-S)\omega_S} \quad .....(7-37)$$

*Teniendo en cuenta la ecuación 7-34*

$$T = \frac{P_{EM}}{\omega_S} \quad .....(7-38)$$

*Este es el torque interno de la máquina. Para determinar el torque en el eje hay que restarle el torque producido por las pérdidas rotacionales y pérdidas dispersas.*

*Reemplazando la ecuación 7-33 en la ecuación 7-38 obtenemos:*

$$T = 3\frac{r_2' \, I_2'^{\,2}}{S\omega_S} \quad .....(7-39)$$

*Ahora en esta ecuación podríamos reemplazar el valor de* $I_2'$ *que se obtiene de la ecuación 7-30 y así tendríamos el torque en función de los parámetros del circuito de la tensión aplicada y del deslizamiento S.*

*Puede llegarse al mismo resultado si se transforma la fuente de tensión* $\mathbf{V_1}$ *del circuito equivalente de la figura anterior en una fuente de corriente* **I** *, tal como se indica en la figura:*

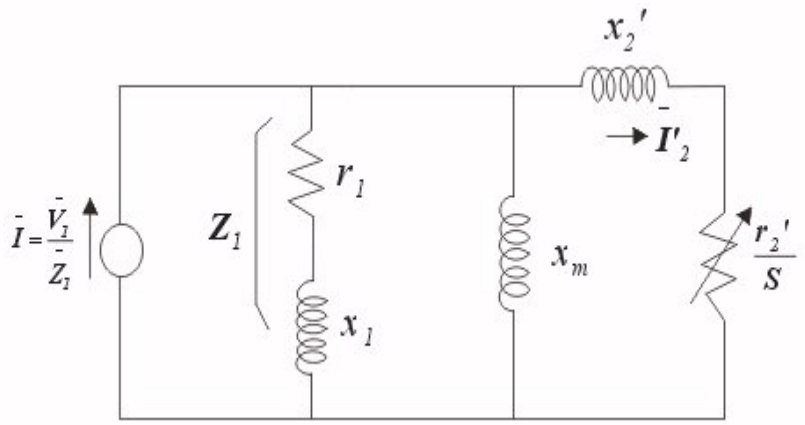



**Figura** *7.2.12*

*Reemplazando las dos impedancias en paralelo* $Z_1$ *y* $X_m$ *por la impedancia* $Z = R + jX$ *obtenemos el siguiente circuito :*

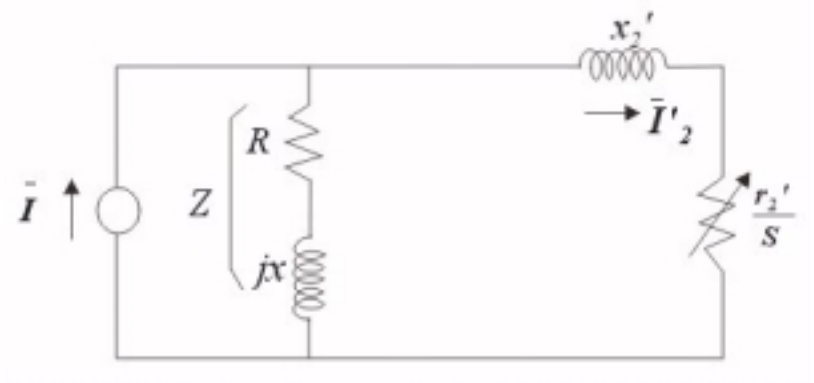



**Figura** *7.2.13*

*En este circuito deducimos inmediatamente :*

$$\bar{I}'_2 = \bar{I}\frac{(R+jX)}{R+\frac{r'_2}{S}+j\left(X+X'_2\right)} \quad .....(7-40)$$

*Entonces:*

$$\left|\bar{I}'_2\right|^2 = \left|\bar{I}\right|^2 \frac{\left(R^2+X^2\right)}{\left(\left(R+\frac{r'_2}{S}\right)^2+\left(X+X'_2\right)^2\right)} \quad .....(7-41)$$

*Pero:*

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1} \quad .....(7-42)$$

*Entonces:*

$$\left|\bar{I}\right|^2 = \frac{V_1^2}{r_1^2+X_1^2} \quad .....(7-43)$$

*Reemplazando en la ecuación 7-41:*

$$\left|\bar{I}'_2\right|^2 = \frac{V_1^2\left(R^2+X^2\right)}{\left(r_1^2+X_1^2\right)\left[\left(R+\frac{r'_2}{S}\right)^2+\left(X+X'_2\right)^2\right]} \quad .....(7-44)$$

*Reemplazando este resultado en la ecuación 7-39*

$$T = \frac{3r'_2}{S\omega_S}\frac{\left(R^2+X^2\right)V_1^2}{\left(r_1^2+X_1^2\right)\left[\left(R+\frac{r'_2}{S}\right)^2+\left(X+X'_2\right)^2\right]} \quad .....(7-45)$$

*Esta ecuación nos indica que el torque interno es función del deslizamiento* **S.**
*Si graficamos la ecuación 7-45 tenemos la curva indicada en la figura siguiente:*

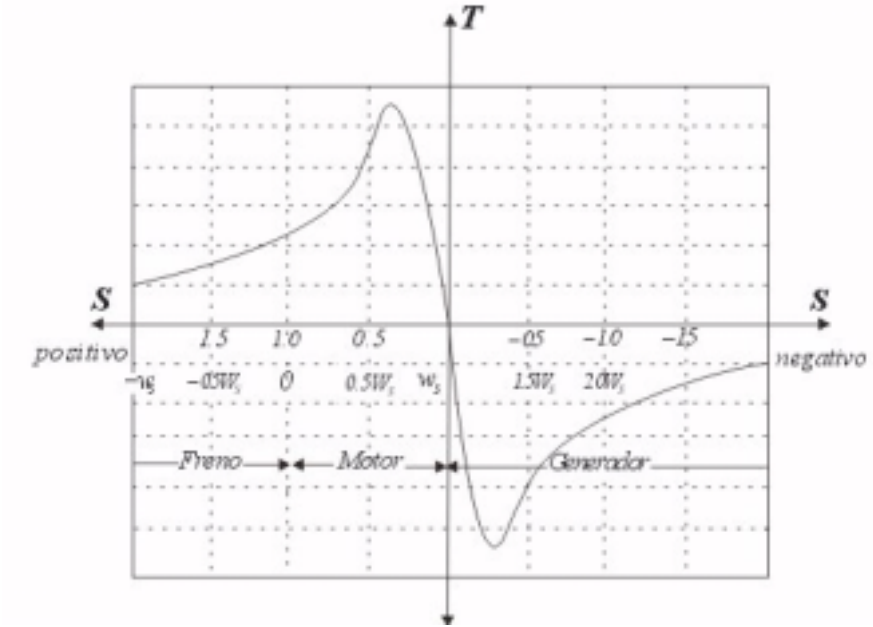


***Figura** 7.2.14*

| ***Deslizamiento S*** | ***Velocidad*** $\omega_m$ | ***Funcionamiento como:*** | ***Conversión de energía*** |
|---|---|---|---|
| *0< S <1* | $\omega_S > \omega_m > 0$ | *Motor* | *Eléctrica en mecánica* |
| *S>1* | $\omega_m < 0$ *Opuesta al campo giratorio* | *Freno* | *Cinética en eléctrica.* |
| *S<0* | $\omega_m > \omega_S$ | *Generador* | *Mecánica en eléctrica* |

*Al graficar la curva del torque podemos asignarle al deslizamiento valores positivos y negativos . Para valores de S positivos comprendidos entre 0 y 1 el torque es positivo y la máquina funciona como motor.*

*Para valores de S negativos el torque resulta negativo y la máquina funciona como generador. Este funcionamiento se obtiene con velocidades del rotor superior a la síncrona.*

*Para valores de S positivos mayores que 1 el torque es positivo pero la máquina funciona como freno, ya que la velocidad del rotor debe ser contraria a la del campo para obtener S > 1.*

*El funcionamiento como generador no ha encontrado mayores aplicaciones debido a que éste generador no puede producir potencia reactiva ya que no tiene excitación propia y más bien requiere energía reactiva para su propio consumo.*

*Por consiguiente funcionando solamente podría alimentar cargas capacitivas y funcionando en paralelo con éstos generadores, síncronos, éstos tendrían que proporcionarle la potencia reactiva que requiere para su funcionamiento.*

### *7.2.7 TORQUE MÁXIMO*

*Observando la curva del torque Vs. deslizamiento podemos ver que éste tiene un determinado valor máximo que corresponde a un determinado deslizamiento. Para determinar el $T_{máx}$ podemos igualar a cero la derivada con respecto a S de la ecuación 7-45 obteniéndose:*

$$S_{T\,máx} = \frac{r_2^{'}}{\sqrt{R^2 + \left(X + X_2^{'}\right)^2}} \quad .....(7-46)$$

*Reemplazando este valor del deslizamiento en la ecuación 7-45 obtenemos:*

$$T_{máx} = \frac{1{,}5V_1^2\left(R^2 + X^2\right)}{\omega_S\left(r_1^2 + X_1^2\right)\left[R + \sqrt{R^2 + \left(X + X_2^{'}\right)^2}\right]} \quad .....(7-47)$$

*La ecuación 7-46 nos hace ver que el deslizamiento correspondiente al torque máximo es directamente proporcional a la resistencia rotórica. Esto nos sugiere un método muy simple para mejorar el par de arranque, consiste en aumentar la resistencia del rotor durante el arranque mediante una resistencia variable que se conecta al rotor a través de un juego de escobillas y anillos rozantes como se observa en la figura siguiente:*

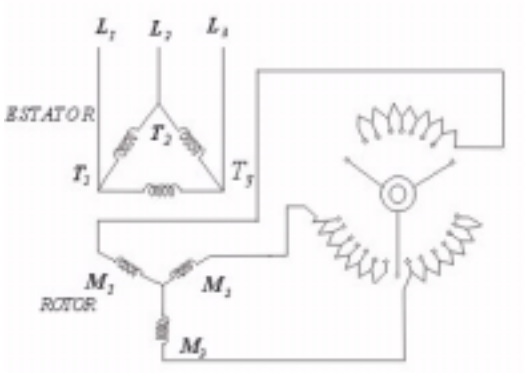



***Figura** 7.2.15*

*Para que el par sea máximo en el arranque $S_{Tmáx}$ deberá ser igual a 1 y con la ecuación 7-46 obtenemos el valor de la resistencia adicional exterior $R_E^{'}$ necesaria(referida al estator).*

$$1 = \frac{r_2^{'} + R_E^{'}}{\sqrt{R^2 + \left(X + X_2^{'}\right)^2}} \quad .....(7-48)$$

$$R_E^{'} = \sqrt{R^2 + \left(X + X_2^{'}\right)^2} - r_2^{'} \quad .....(7-49)$$

*y teniendo en cuenta la ecuación 7-46*

$$R_E^{'} = \frac{r_2^{'}}{S_{Tmáx}} - r_2^{'} = r_2^{'}\left(\frac{1 - S_{T_{máx}}}{S_{T_{máx}}}\right) \quad .....(7-50)$$

*Esta resistencia reduce también la corriente del arranque por lo que es empleada como reóstato de arranque. Lamentablemente solamente pude utilizarse en los motores con rotor bobinado.*

*En la figura siguiente se han graficado diferentes curvas de torque para diferentes resistencias, puede apreciarse como el torque máximo se desplaza hacia la izquierda así como aumenta la resistencia rotórica, pero siempre manteniendo el mismo valor máximo ya que la resistencia del rotor no interviene en la ecuación 7-47.*

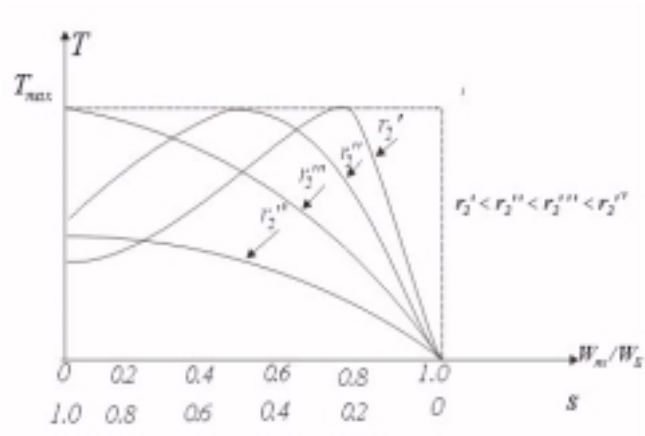



**Figura** *7.2.16*

### *7.2.8 CIRCUITO EQUIVALENTE SIMPLIFICADO*

*r =rotor =2*
*S =estator =1* } *subíndices*

$n_1 = \omega_s$ = *velocidad del campo giratorio*
$n = \omega_m = \omega_r$ = *velocidad del rotor* } *nomenclaturas*

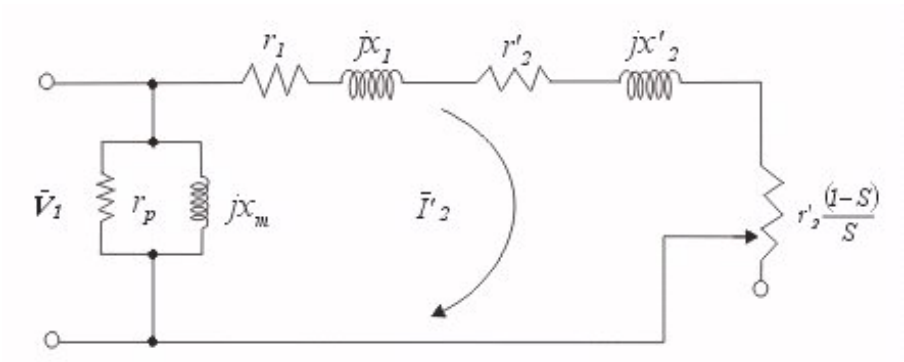



**Figura** *7.2.17*

$$\omega_S = \frac{120f}{p}(R.P.M) \quad .....(7-51)$$

$$\omega_S = \frac{f}{\frac{p}{2}}\left(\frac{ciclos}{seg}\right) \quad .....(7-52)$$

$$\omega_S = \frac{2\pi f}{\left(\frac{p}{2}\right)}\left(\frac{rad}{seg}\right) \quad .....(7-53)$$

$$S = \frac{\omega_S - \omega_m}{\omega_S} \quad .....(7-54)$$

$$\omega_m = (1-S)\omega_S \quad .....(7-55)$$

$$\left|\bar{I}'_2\right| = \frac{\left|\bar{V}_1\right|}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{r'_2}{S}\right) + \left(X_1 + X'_2\right)^2}} \quad .....(7-56)$$

*Desde que la potencia de salida es el producto del torque en N–m por la velocidad en (Rad/ seg).*

$$T_{3\phi}\omega_m = P_{MEC}\, 3r'_2\left(\frac{1-S}{S}\right)I'^{\,2}_2 \quad .....(7-57)$$

$$T_{3\phi} = \frac{3r'_2\left(\frac{1-S}{S}\right)I'^{\,2}_2}{(1-S)\omega_S} = 3\frac{r'_2}{S}\frac{I'^{\,2}_2}{\omega_S} \quad .....(7-58)$$

$$T_{3\phi} = 3\frac{r'_2}{S}\frac{1}{\frac{2\pi f}{\frac{p}{2}}}I'^{\,2}_2 = 3\frac{1}{2\pi f}\frac{p}{2}\frac{r'_2}{S}I'^{\,2}_2 \quad .....(7-59)$$

$$T_{3\phi} = 3\frac{1}{2\pi f}\frac{\frac{p}{2}\frac{r'_2}{S}V_1^2}{\left\{\left(r_1 + \frac{r'_2}{S}\right)^2 + \left(X_1 + X'_2\right)^2\right\}} \quad .....(7-60)$$

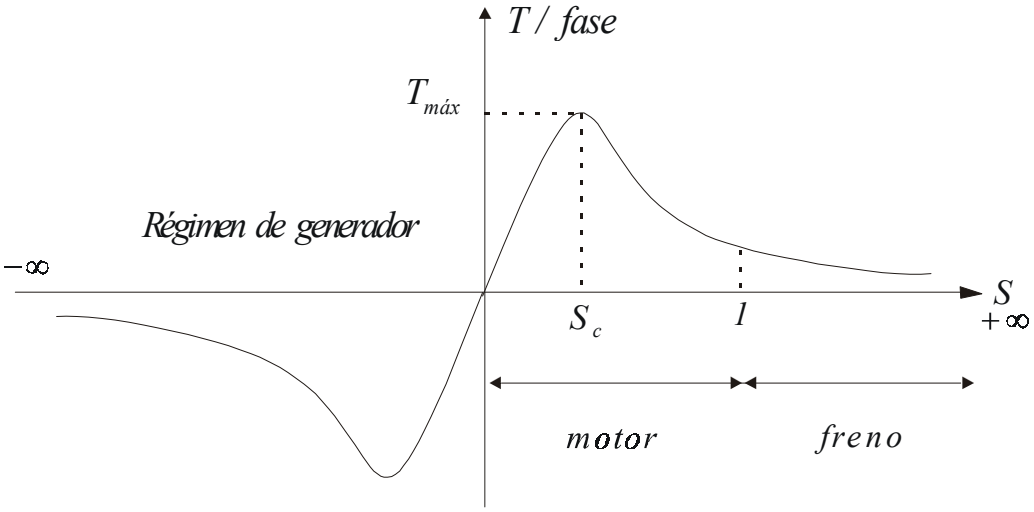



***Figura*** *7.2.18*

***Cálculo del deslizamiento crítico ( $S_C$):***

$$T_{3\phi} = \left(3\frac{1}{2\pi f}\frac{p}{2}V_1^2\right)\frac{\frac{r_2'}{S}}{\left[\left(r_1+\frac{r_2'}{S}\right)^2+\left(X_1+X_2'\right)^2\right]} \quad .....(7-81)$$

$$T_{3\phi} = K\frac{Sr_2'}{\left[\left(Sr_1+r_2'\right)^2+S^2\left(X_1+X_2'\right)^2\right]} \quad .....(7-82)$$

$$\frac{dT_{3\phi}}{dS} = 0 \quad .....(7-83)$$

$$S_C = \frac{r_2'}{\sqrt{r_1^2+\left(X_1+X_2'\right)^2}} \quad .....(7-84)$$

*El deslizamiento crítico depende de la resistencia rotatórica ($r_2$').*
*Reemplazando el valor de Sc en la expresión del torque.*

$$T_{3\phi máx} = \frac{3}{2\pi f}\frac{p}{2}V_1^2\frac{1}{2\left[r_1+\sqrt{r_1^2+\left(X_1+X_2'\right)^2}\right]} \quad .....(7-85)$$

*Como se observa el torque máximo ($T_{3\Phi máx}$) es independiente de la resistencia rotórica. Variando el valor de $r_2'$ se obtiene el siguiente efecto . Ver figura :*

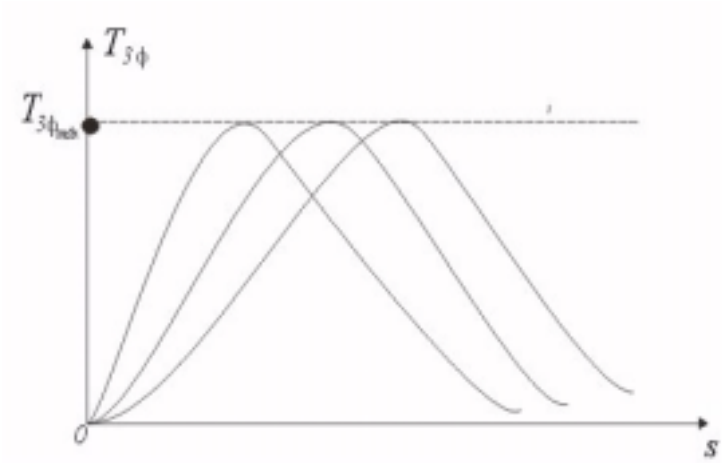



**Figura** *7.2.19*

*Esta posibilidad de incrementar la resistencia rotórica sólo es posible en los motores de rotor bobinado, entonces es posible obtener el par máximo en el momento del arranque es decir cuando S = 1*

*Entonces en la ecuación de $S_C$ :*

$$S_C = 1 = \frac{r_2'}{\sqrt{r_1^2 + \left(X_1 + X_2'\right)^2}} \quad .....(7-86)$$

$$r_2' = \sqrt{r_1^2 + \left(X_1 + X_2'\right)^2} \quad .....(7-87)$$

*Como $r_1$ es significativamente pequeña en comparación con las reactancias se puede hacer la siguiente simplificación:*

$$r_2' \cong X_1 + X_2' \quad .....(7-88)$$

### *7.2.9 EFICIENCIA ( η)*

$$\eta = \frac{potencia\ de\ salida}{potencia\ de\ entrada} = \frac{P2}{P1} = \frac{P1 - \Delta P}{P1} = \left(1 - \frac{\Delta p}{P1}\right) \times 100\% \quad .....(7-89)$$

$$\Delta P = Potencia \quad de \quad pérdidas$$

### *7.2.10 DIAGRAMA ENERGÉTICO:*

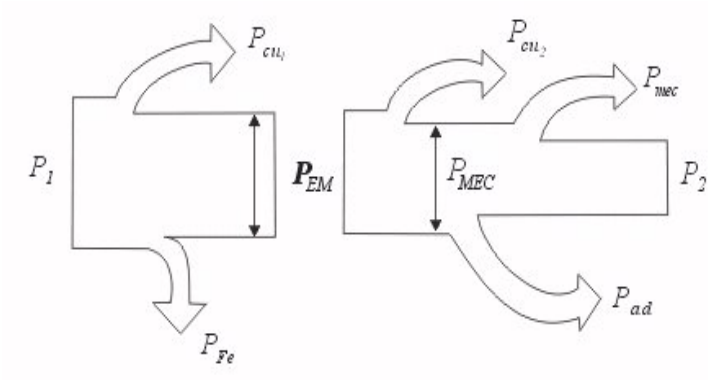



***Figura*** *7.2.20*

*$P_1$: Potencia eléctrica suministrada al motor*
*$P_2$ : Potencia mecánica útil entregada por el motor*
*$Pcu_1$: Pérdidas en el cobre del estator*
*$P_{Fe}$ : Pérdidas en el fierro. Las pérdidas en el fierro del rotor son bastante pequeñas por que $f_2$ (frec. del rotor) es pequeña.*
*$P_{EM}$:Potencia Electromagnética.*

$$P_{EM} = P_1 - P_{cu1} - P_{fe} \quad .....(7-90)$$

*Esta potencia se transmite electromagnéticamente a través del entrehierro hacia el rotor.*

*$P_{MEC}$ = Potencia Mecánica*

$$P_{MEC} = P_{EM} - P_{cu2} \quad .....(7-91)$$

*$Pcu_2$ : Pérdidas en el cobre del rotor.*
*$P_2$ : Potencia útil entregada por el motor.*

$$P_2 = P_{MEC} - P_{mec}(\text{fricción} + \text{ventilación : pérdidas meánicas}) - \text{Padicionales}$$

$$P_{mec} = P(f+v)\text{: Pédidas por fricción y ventilación.}$$

*$P_{ad}$ = Pérdidas adicionales producidas por la presencia de dientes es el estator y rotor y por la distribución no sinusoidal de la f.m.m.*

$$P_{MEC} = 3I_2'^2 r_2'\left(\frac{1-S}{S}\right) \quad .....(7-92)$$

$$P_{cu2} = 3r_2'I_2'^2 \quad .....(7-93)$$

$$P_{EM} = P_{MEC} + P_{cu2} = 3r_2'I_2'^2\left(\frac{1-S}{S}\right) + 3r_2'I_2'^2 \quad .....(7-94)$$

$$P_{EM} = 3\frac{r_2^{'}}{S} I_2^{'2} \quad .....(7-95)$$

$$P_{MEC} = (1-S)P_{EM} \quad .....(7-96)$$

$$P_{cu2} = SP_{EM} \quad .....(7-97)$$

***EJEMPLO 1.-*** *Motor de inducción 3Φ, 440 V, (Y) , 4 polos , 50 Hz*

$$r_1 = r_2^{'} = \frac{1\Omega}{fase}\,;\, L_1 = L_2^{'} = 10\frac{mHr}{fase}.$$

*La rama de excitación compuesta de una* $r_p = 300\Omega$ *y* $L_m = 200mHr$ .

*Calcular para un deslizamiento de S = 0,05*

a. *La corriente de entrada.*
b. *El Torque en la carga.*
c. *La potencia mecánica de salida si el torque de pérdidas mecánicas es 1 N – m.*
d. *Eficiencia.*

*SOLUCIÓN:*

$$\omega_S = \frac{120f}{p} = \frac{120\times 50}{4} = 1500\ rpm$$

$$X_1 = X_2^{'} = 2\pi\times 50\times 10\times 10^{-3} = 3{,}14\frac{\Omega}{fase}$$

$$X_m = 2\pi\times 50\times 200\times 10^{-3} = 62{,}8\frac{\Omega}{fase}$$

*Circuito Equivalente por fase:*

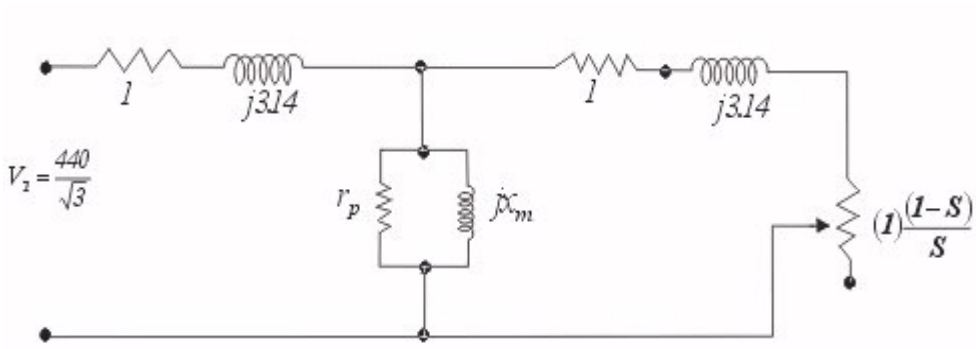



**Figura** *E1.1*

*Trabajando con el circuito equivalente simplificado :*

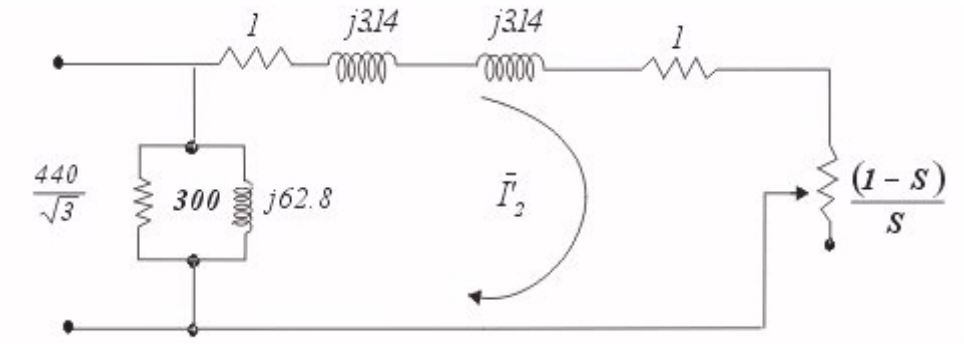



***Figura*** *E1.2*

*Asumiendo :*

$$\overline{V}_1 = V_1\underline{|0°} = \frac{440\underline{|0°}}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{I}'_2 = \frac{\dfrac{440\underline{|0°}}{\sqrt{3}}}{\left[\left(1+\dfrac{1}{0,05}\right)+j(2\times 3,14)\right]} = \frac{254\underline{|0°}}{21+j6,28} = \frac{254\underline{|0°}}{22\underline{|16.6°}}$$

$$\overline{I}'_2 = 11,5\underline{|-16,6°} = 11 - j3,28$$

$$\overline{Y}_\phi = \frac{1}{r_p} - j\frac{1}{X_m} = \frac{1}{300} - j\frac{1}{62,8} = 0,003 - j0,016$$

$$\overline{I}_\phi = \overline{V}_1\overline{Y}_\phi = 254\underline{|0°}\times(0,003 - j0,016) = 0,846 - j4,064$$

$$\overline{I}_1 = \overline{I}'_2 + \overline{I}_\phi = 11,846 - j7,344 = 13,938\underline{|-31,797°}$$
$$f.d.p = cos(31,797°) = 0,850$$

$$P_{ENTRADA\,3\phi} = \sqrt{3}\times 440\times 13,938\times 0,850 = 9028,86 Watts$$

$$P_{MEC\,3\phi} = 3r'_2 I'^2_2\left(\frac{1-S}{S}\right) = 3\times 1\times 11,5^2\left(\frac{1-0,05}{0,05}\right) = 7538,25 Watts$$

$$\omega_m = (1-S)\omega_S = (1-0.05)1500 = 1425 rpm$$

$$T_{e3\phi} = \frac{P_{MEC\,3\phi}}{\omega_m} = \frac{7538,25}{1425\times\dfrac{\pi}{30}} = 50,52\ N-m$$

*Pérdidas mecánicas :*

$$T_{PERDmec}\omega_m = 1 \times 1425 \times \frac{\pi}{30} = 149{,}22 \quad Watts$$

$$T_{SALIDA3\phi} = 50.52 - 1 = 49{,}52 \ N - m$$

$$P_{SALIDA3\phi} = 7538.25 - 149.22 = 7389 \ Watts$$

$$\eta = \frac{P2}{P1} = \frac{7389}{9028.86} \times 100\% = 82\%$$

### *7.2.11 ENSAYOS DE VACIO Y CORTOCIRCUITO*

***a) A ROTOR LIBRE:*** *(S = 0 , $I_2'$ =0)*

*El circuito equivalente $1\phi$ se reduce:*

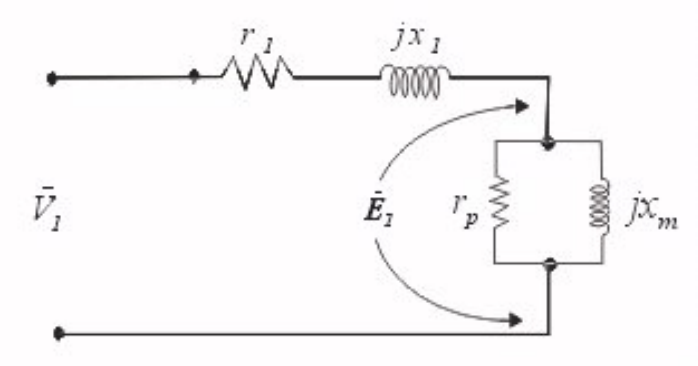



***Figura*** *7.2.21*

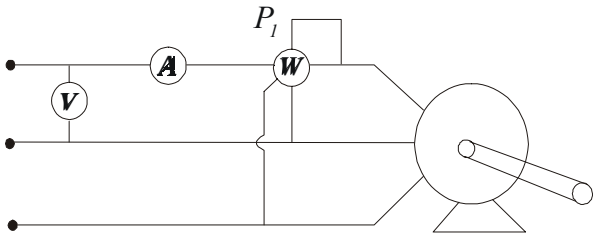



***Figura*** *7.2.22*

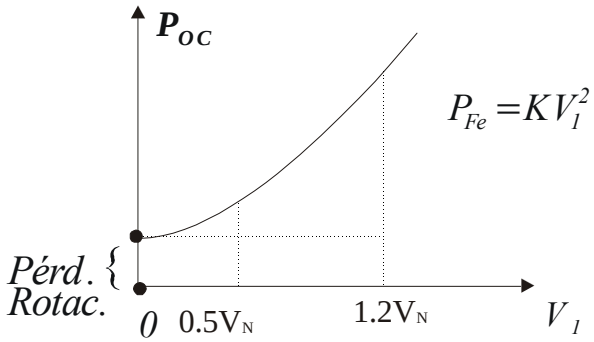


***Figura** 7.2.23*

$$P_1 = P_{cu1} + P_{fe} + P_{rot} \quad .....(7-98)$$

$$P_1 - P_{cu1} = P_{fe} + P_{rot} \quad .....(7-99)$$

$$P_{OC} = P_{fe} + P_{rot} \quad .....(7-100)$$

$$P_{rot} = \text{Pérdidas por fricción} + \text{Pérdidas por ventilación}$$

$$r_p = \frac{V_{1\phi}^2}{P_{fe1\phi}} \quad .....(7-101)$$

$$I_p = \frac{V_{1\phi}}{r_p} \quad .....(7-102)$$

$$I_m = \sqrt{I_\phi^2 - I_p^2} \quad .....(7-103)$$

$$X_m = \frac{V_{1\phi}}{I_m} \quad .....(7-104)$$

$$g_p = \frac{P_{fe1\varphi}}{V_{1\varphi}^2} \quad .....(7-105)$$

$$Y_\phi = \frac{I_\phi}{V_{1\phi}} \quad .....(7-106)$$

$$b_m = \sqrt{Y_\phi^2 - g_p^2} \quad .....(7-107)$$

***b) A ROTOR BLOQUEADO : (S=1)***

*La corriente en el circuito principal es mucho mayor que la corriente de magnetización y ésta última puede despreciarse.*

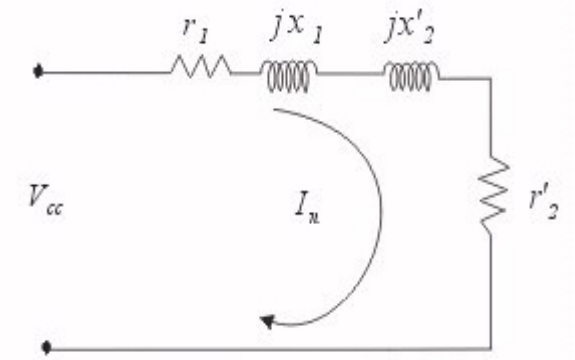


***Figura** 7.2.24*

$$P_{cc1\phi} = \left(r_1 + r_2'\right) I_{n1\phi}^2 \quad .....(7-108)$$

$$r_1 + r_2' = \frac{P_{cc1\phi}}{I_{n1\phi}^2} \quad .....(7-109)$$

$$r_1 = r_2' = \frac{r_1 + r_2'}{2} \quad .....(7-110)$$

$$Z_{1\phi} = \frac{V_{cc1\phi}}{I_{n1\phi}} \quad .....(7-111)$$

$$X_1 + X_2' = \sqrt{Z_{1\phi}^2 - \left(r_1 + r_2'\right)^2} \quad .....(7-112)$$

$$X_1 = X_2' = \frac{X_1 + X_2'}{2} .....(7-113)$$

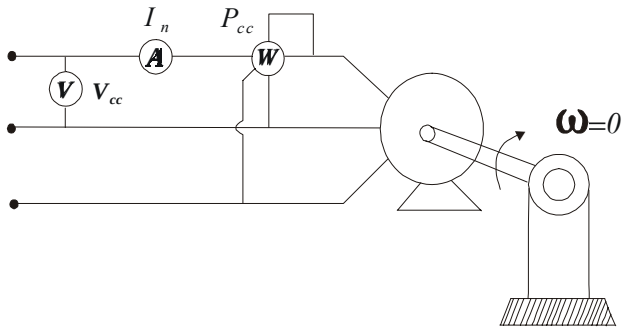



***Figura** 7.2.25*

***EJEMPLO 2.-** Un motor de inducción 3Φ. 440V, ( Y ),50 Hz y 4 polos fue ensayado obteniéndose los siguientes resultados:*

*Rotor bloqueado (corto circuito)*
*120V, 25 A, 2,0 KW*

*Rotor Libre (circuito abierto)*
*440V, 8 A, 1,5 KW*

*Las pérdidas por fricción y ventilación son de 600 W ( Las pérdidas mecánicas deben ser restadas del valor de la potencia a rotor libre antes de calcular $r_p$ y $x_m$) . Se pide:*

*a) Deducir los valores de los parámetros del circuito equivalente por fase.*
*b) Para S = 4%. Hallar:*
$I_1, \cos\phi_1, I_2', T_e, P_{salida}$ y $\eta$.
*c) Calcular el torque de arranque a plena tensión y la relación de la corriente de arranque a la corriente de plena carga.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*
$$\omega_S = \frac{120f}{p} = \frac{120\times 50}{4} = 1500\ rpm$$

*De la prueba de cortocircuito:*

$$r_1 + r_2' = \frac{P_{cc1\phi}}{I_{n1\phi}^2} = \frac{\frac{2000}{3}}{25^2} = 1{,}06\ \frac{\Omega}{fase}$$

$$r_1 = r_2' = \frac{1{,}06}{2} = 0{,}53\ \frac{\Omega}{fase}$$

$$Z_{1\phi} = \frac{V_{cc1\phi}}{I_{n1\phi}} = \frac{\frac{120}{\sqrt{3}}}{25} = 2{,}77\ \frac{\Omega}{fase}$$

$$X_1 + X_2' = \sqrt{2{,}77^2 - 1{,}06^2} = 2{,}56\ \Omega$$

$$X_1 = X_2' = 1{,}28\ \frac{\Omega}{fase}$$

*De la prueba de vacío:*

$$P_{fe3\phi} = 1500 - 3\times 8^2 \times 0{,}53 - 600$$

$$P_{fe3\phi} = 798{,}24\ Watts$$

$$g_p = \frac{P_{fe1\phi}}{V_{1\phi}^2} = \frac{\frac{798{,}24}{3}}{\left(\frac{440}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0{,}00412 = 4{,}12\times 10^{-3}\ \frac{\Omega^{-1}}{fase}$$

$$r_p = \frac{1}{g_p} = 242{,}5\ \frac{\Omega}{fase}$$

*b)*

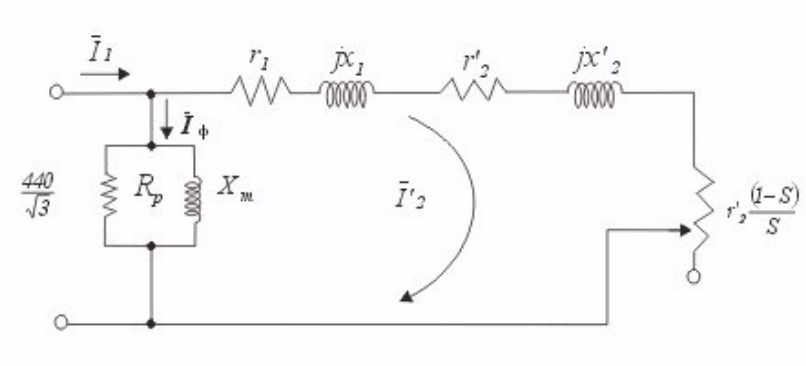


***Figura*** *E2.1*

$$Y = \frac{I_\phi}{V_{1\phi}} = \frac{8}{\frac{440}{\sqrt{3}}} = 31{,}49 \times 10^{-3}\ \frac{\Omega^{-1}}{fase}$$

$$b_m = \sqrt{Y^2 - g_p^2} = 31{,}22 \times 10^{-3}\ \frac{\Omega^{-1}}{fase}$$

$$X_m = 32\ \frac{\Omega}{fase}$$

$$\overline{I}'_2 = \frac{\overline{V}_{1\phi}}{\left(r_1 + \frac{r'_2}{S}\right) + j\left(X_1 + X'_2\right)} = \frac{254\angle 0°}{\left(0{,}53 + \frac{0{,}53}{0{,}04}\right) + j2{,}56} = \frac{254\angle 0°}{13{,}78 + j2{,}56} = \frac{254\angle 0°}{14\angle 10{,}4°}$$

$$\overline{I}'_2 = 18\angle -10{,}4° = 17{,}7 - j3{,}25$$

$$\overline{I}_\phi = \overline{V}_{1\phi}\overline{Y} = 254\angle 0° \times \left(4{,}12 \times 10^{-3} - j31{,}22 \times 10^{-3}\right)$$

$$\overline{I}_\phi = 1{,}046 - j7{,}9$$

$$\overline{I}_1 = \overline{I}_\phi + \overline{I}'_2 = 1{,}046 - j7{,}9 + 17{,}7 - j3{,}125 = 18{,}746 - j11{,}15$$

$$\overline{I}_1 = 21{,}8\angle -30{,}7°$$

$$\cos\phi_1 = \cos(30{,}7°) = 0{,}86$$

$$P_{MEC} = 3I'^2_2 r'_2\left(\frac{1-S}{S}\right) = 3 \times 18^2 \times 0{,}53 \times \left(\frac{1-0{,}04}{0{,}04}\right) = 12{,}3K\ Watts$$

$$\omega_S = (1-S)\omega_S = (1-0{,}04) \times 1500 \times \frac{\pi}{30} = 150{,}8\ \frac{rad}{seg}$$

$$T_e = \frac{P_{MEC}}{\omega_m} = \frac{12{,}3 \times 10^3}{150{,}8} = 81{,}56\ N-m$$

$$P_2 = P_{salida} = (12{,}3 - 0{,}6)K\ Watts = 11{,}7K\ Watts$$

$$P_{entrada} = P_1 = 3 \times 21{,}8 \times 254 \times 0{,}86 = 14{,}4K\ Watts$$

$$\eta = \frac{11{,}7\times 10^3}{14{,}4\times 10^3}\times 100\% = 81{,}25\%$$

*c) Arranque a tensión plena:*

$$\bar{I}'_{2arr} = \frac{254\angle 0°}{2\times 0{,}53 + j2{,}56} = \frac{254\angle 0°}{2{,}614\angle 78{,}3°} = 97{,}17\angle -78{,}3°$$

$$\bar{I}'_{2arr} = 19{,}7 - j95{,}17$$

$$\bar{I}_{1arr} = \bar{I}'_{2arr} + \bar{I}_{\phi}$$

$$\bar{I}_{1arr} = 19{,}7 - j95{,}15 + 1{,}046 - j7{,}9 = 20{,}746 - j103{,}05$$

$$\bar{I}_{1arr} = 105{,}11\angle -78{,}6°$$

$$\frac{I_{1arr}}{I_{1nom}} = \frac{105{,}11}{21{,}8} = 4{,}8$$

## 7.3 CONTROL DE VELOCIDAD EN MÁQUINAS ASÍNCRONAS

*Un motor de inducción es esencialmente un motor de velocidad constante cuando está conectado a una fuente de potencia de voltaje y frecuencia constante . La velocidad de operación es muy cercana a la velocidad síncrona. Si el torque de carga se incrementa la velocidad cae en pequeña cantidad. Esta es la razón por la cual se le usa frecuentemente en sistemas de trabajo de velocidad constante. Muchas aplicaciones industriales, sin embargo requieren diversas velocidades ó un rango continuo ajustable de velocidades.*

*Tradicionalmente, los motores DC han sido usados en sistemas de operación de velocidad ajustable. Sin embargo, los motores DC son caros, requieren frecuente mantenimiento de conmutadores y escobillas, y están prohibidos de usarlos en ambientes explosivos.*

*Las máquinas asíncronas de otro lado, son de bajo precio, robustas, no tienen conmutadores, y son usados para aplicaciones con altas velocidades. El uso de los controladores de estado sólido, ha hecho más complejo su uso que el de los motores* **DC***; ha hecho posible que el motor de inducción se use en sistemas de operación de velocidad variable.*

*En ésta sección se discutirán varios métodos de control de velocidad de motores de inducción.*

### 7.3.1 CAMBIANDO POLOS

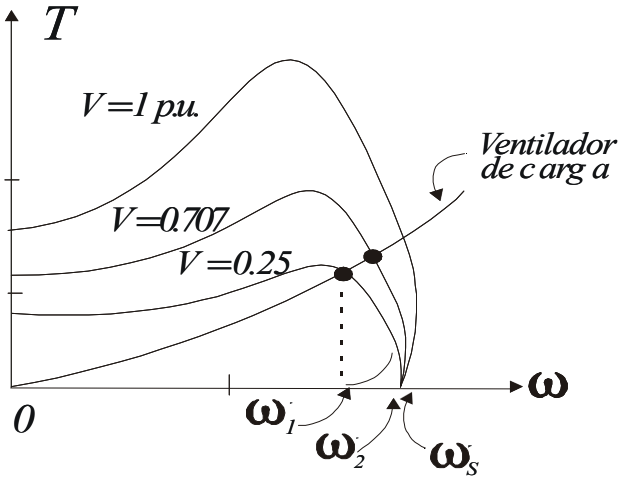
*Como la velocidad de operación es cercana a la velocidad síncrona, la velocidad de un motor de inducción puede ser cambiada al estar cambiando el número de polos de la máquina . Este cambio puede ser realizado cambiando las conecciones de las bobinas del arrollamiento estatórico . Normalmente, los polos son cambiados en la relación de 2 a 1. Este método provee dos velocidades síncronas.*

*Si se tiene dos posiciones independientes del arrollamiento polifásico, cuatro velocidades síncronas pueden ser obtenidas para el motor de inducción. Las máquinas de inducción son así usadas en este esquema, porque el rotor puede operar con cualquier número de polos del estator. Es obvio, sin embargo, que la velocidad puede ser cambiada únicamente en discretos peldaños.*

### *7.3.2 CONTROL POR VOLTAJE DE LÍNEA*

*Recordamos que el torque desarrollado en un motor de inducción es proporcional al cuadrado del voltaje terminal . Una muestra de características de Torque Vs. Velocidad (T-ω) es mostrada en La figura 7.3.1.*

*Si el rotor mueve un ventilador de carga la velocidad puede ser variada por encima de $\omega_1$ a $\omega_2$ cambiando el voltaje de línea.*



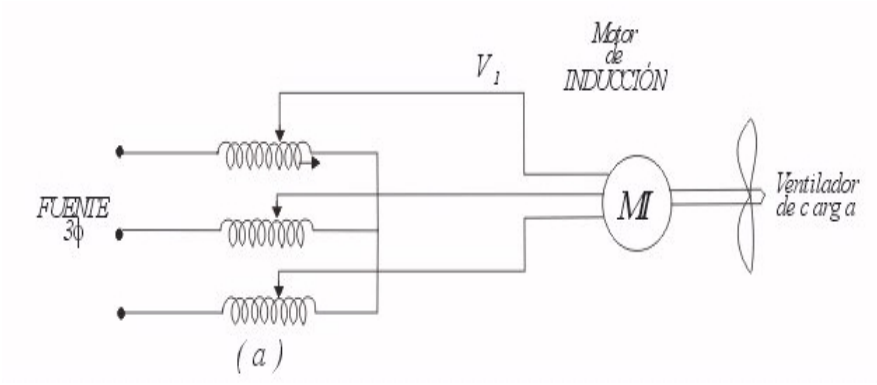

*Carcaterísticas del torque vs velocidad para varios voltajes.*

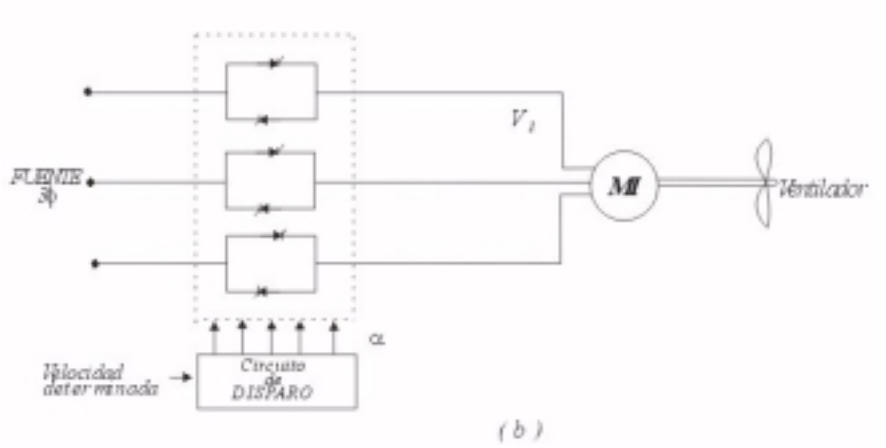
**Figura** *7.3.1*

*El voltaje terminal $V_1$ puede ser variado usando un autotransformador 3ϕ ó un controlador de voltaje de estado sólido. El autotransfornador provee un voltaje sinusoidal para el motor de inducción, a diferencia que el voltaje terminal del motor con un controlador de estado sólido es nosinusoidal. El control de velocidad con un controlador de estado sólido es comúnmente usado con máquinas asíncronas moviendo ventiladores de carga. En aplicaciones de gran potencia un filtro de entrada es requerido; de otra forma, existirían armónicas de corriente fluyendo en el circuito de la fuente. El controlador de voltaje por tiristor es mostrado en la figura 7.3.2b, es simple para entender pero complicado para analizar. La señal de comando para una velocidad particular determinada dispara los tiristores en un particular ángulo disparo $\alpha$ para proveer un voltaje terminal particular para el motor. Si la señal de la velocidad de comando es cambiada, el ángulo de disparo $\alpha$ de los tiristores cambia, el cual resulta en un nuevo voltaje terminal y así una nueva operación de velocidad.*

*La operación de lazo abierto no es satisfactorio si es deseado un control preciso de velocidad para una particular aplicación. En el caso de que se necesite una operación de lazo cerrado, la figura 7.3.2c muestra un diagrama de bloque de*

*un sistema de trabajo con operación de lazo cerrado. Si la velocidad del motor se altera por causa de cualquier disturbio así como una fluctuación en el suministro de voltaje, la diferencia entre la velocidad establecida y la velocidad del motor se incrementa. Los cambios del ángulo de disparo de los tiristores para incrementar el voltaje terminal, desarrolla nuevamente más torque. El incremento del torque tiende a restablecer la velocidad al valor previo del disturbio. Note que por este método de control de velocidad se incrementa el deslizamiento a velocidades más bajas, haciendo la operación ineficiente. Sin embargo, para ventiladores, ó similares cargas centrifugales en el cual el torque varía aproximadamente con el cuadrado de la velocidad, la potencia decrece significativamente con la disminución en velocidad. Por esta razón, a pesar de que la pérdida de potencia en el circuito del rotor(* **$SP_{EM}$)** *podría ser una significante porción de la potencia de entrehierro, la potencia de entrehierro por sí misma es pequeña y por esta razón el rotor no se sobrecalentará. Los circuitos del controlador de voltaje son simples y de hecho ineficientes, son adecuados para ventiladores , y aparatos centrífugos similares.*



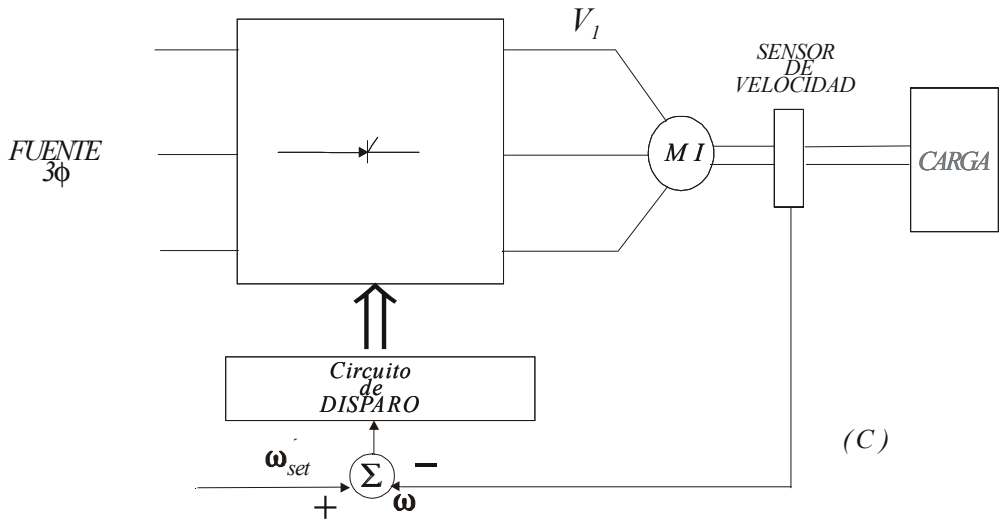



***Figura*** *7.3.2. Arranque y control de velocidad.*
*a) Controlador de voltaje por autotransformador.*
*b) Controlador de voltaje de estado sólido.*
*c) Controlador de voltaje en operación de lazo cerrado.*

### *7.3.3 CONTROLADOR POR FRECUENCIA DE LÍNEA*

*La velocidad síncrona y por ésta razón la velocidad del motor puede ser variada cambiando la frecuencia de la fuente. La aplicación de este método de control de velocidad requiere un variador de frecuencia. La figura 7.3.3, muestra un diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad de lazo abierto en el cual la frecuencia de la fuente de un motor de inducción puede ser variada.*

*Sabemos que el voltaje eficaz por fase, para un arrollamiento distribuído por fase es:*

$$E_{rms} = 4{,}44\, fN\phi_{\rho} K_{\omega} \quad .....(7-114)$$

$$0{,}85 \le K_{\omega} \le 0{,}95$$

*Donde:*

*N, es el número de vuestas por fase. Luego el flujo motor es:*

$$\phi_{\rho} \;\alpha\; \frac{E}{f}$$

*Si el voltaje a través de* $r_1$ *y* $X_1$ *es pequeño comparada con el voltaje terminal* $V_1$*, esto es ,* $V_1 = E_1$*, entonces:*

$$\phi_{\rho} \;\alpha\; \frac{V_1}{f}$$

*Para evitar alta saturación en el sistema magnético, el voltaje terminal del motor podría ser variado en proporción a la frecuencia. Este tipo de control es conocido como constante voltios por hertz. En bajas frecuencias, el voltaje a*

*través de $r_1$ y $X_1$ es comparable con el voltaje terminal $V_1$ y por esta razón la ecuación anterior no es totalmente válida. Para mantener la misma densidad de flujo en el hierro, la relación (V/f) es incrementada para bajar las frecuencias.*

*La variación requerida de la fuente de voltaje con frecuencia es mostrada en la figura 7.3.4. En la figura 7.3.3 el voltaje de la máquina cambiará si el voltaje de entrada al inversor $V_i$ es cambiada; $V_i$ puede ser cambiada cambiando el ángulo de disparo del rectificador controlado.*

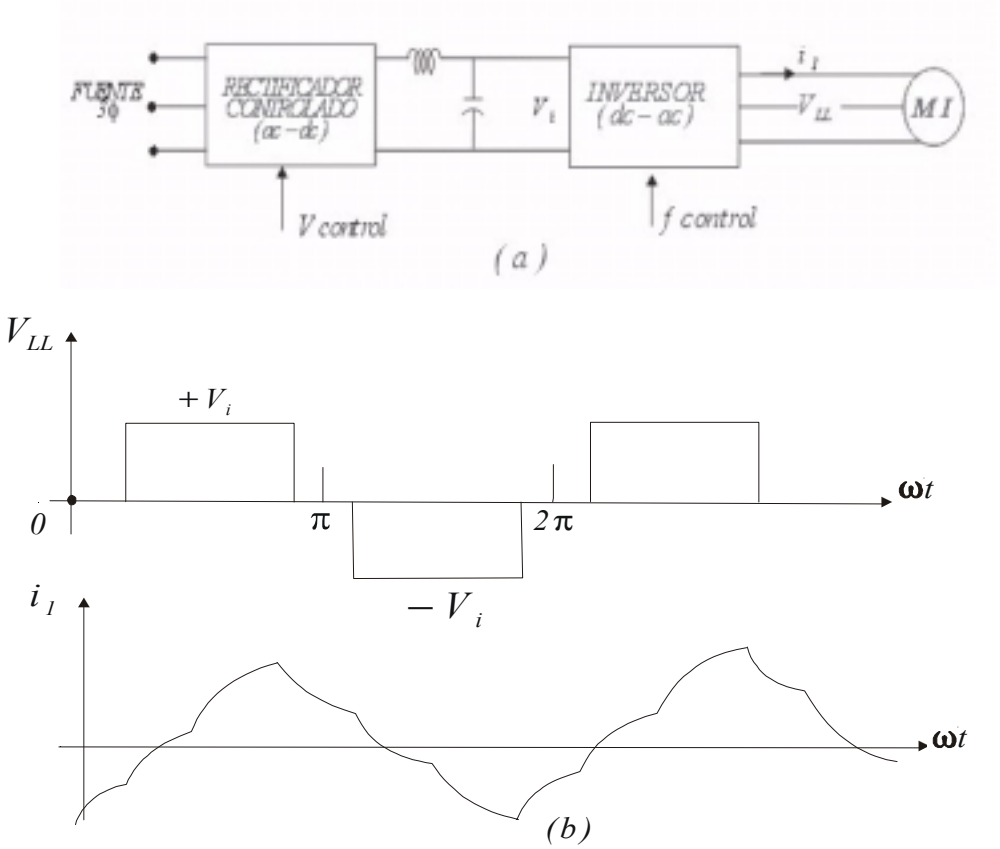



**Figura** *7.3.3. Control de velocidad de lazo abierto de un motor de inducción por control de voltaje y frecuencia de entrada.*

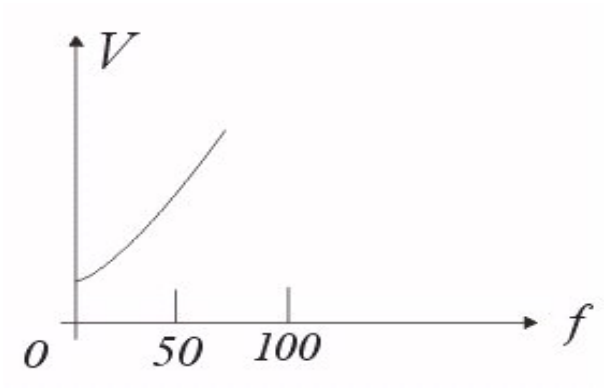


***Figura** 7.3.4. Variación requerida de voltaje con cambio en frecuencia para mantener constante la densidad de flujo en el entrehierro.*

*Si el voltaje de salida del inversor puede ser cambiada en el mismo inversor usando dispositivos semiconductores de potencia autocontrolados, el rectificador controlado puede ser reemplazado por un simple circuito de diodo rectificador, el cual hará $V_i$ constante.*

*Las características del Torque Vs. Velocidad para operación en frecuencia variable son mostradas en la figura 7.3.5.*

*Para la frecuencia base $f_{base}$ el voltaje terminal es el máximo que puede ser obtenido desde el inversor. Debajo de ésta frecuencia, el flujo del entrehierro es mantenido constante cambiando $V_1$ con $f_1$; por esta razón los mismos torques máximos son usados. Por arriba de $f_{base}$, desde que $V_1$ no puede ser más incrementada con la frecuencia, el flujo de entrehierro decrece y también el máximo torque utilizable.*

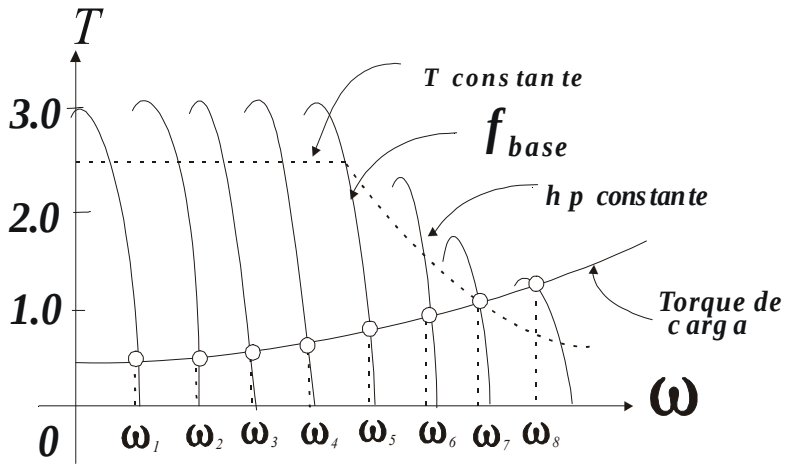



***Figura** 7.3.5. Características Torque vs. Velocidad de un motor de inducción con control de voltaje variable, frecuencia variable.*

*En la Figura 7.3.5 Las características de Torque Vs. Velocidad de una carga es superpuesta en la característica de Torque-velocidad del motor. Note que las velocidades de operación $\omega_1, \omega_2, ....., \omega_7, \omega_8$ están cercanas a las velocidades síncronas correspondientes. En éste método de control de velocidad, por esa razón, el deslizamiento de operación es baja y la eficiencia es alta.*

*El inversor en la figura 7.3.3, es conocida como un inversor de fuente de tensión. El voltaje terminal del motor línea a línea es una onda cuasi – cuadrada de 120° de ancho. No obstante, porque la corriente por la inductancia del motor es esencialmente sinusoidal. Un inversor de fuente de corriente puede ser usado para controlar la velocidad de un motor de inducción. El diagrama de bloque de lazo abierto de un sistema usando un inversor de fuente de corriente es mostrada en la figura 7.3.6. La magnitud de la corriente es regulada*

*suministrando un lazo de corriente alrededor del rectificador tal como se observa en la figura 7.3.6a. El filtro inductor permite un enlace suave de corriente DC. La forma de onda de corriente del motor es una onda cuasi – cuadrada la cual tiene 120° de ancho de pulso.*

*El voltaje terminal del motor es esencialmente sinusoidal. Las características de torque – velocidad de un motor de inducción desde un inversor de fuente de corriente es también mostrado en la figura 7.3.6. Estas características tienen una muy escarpada pendiente cerca a la velocidad síncrona. De hecho un inversor de fuente de corriente es robusto desde el punto de vista de protección de dispositivos de estado solido, el sistema deberá ser realimentado para operar propiamente, de otra manera el sistema no será estable.*

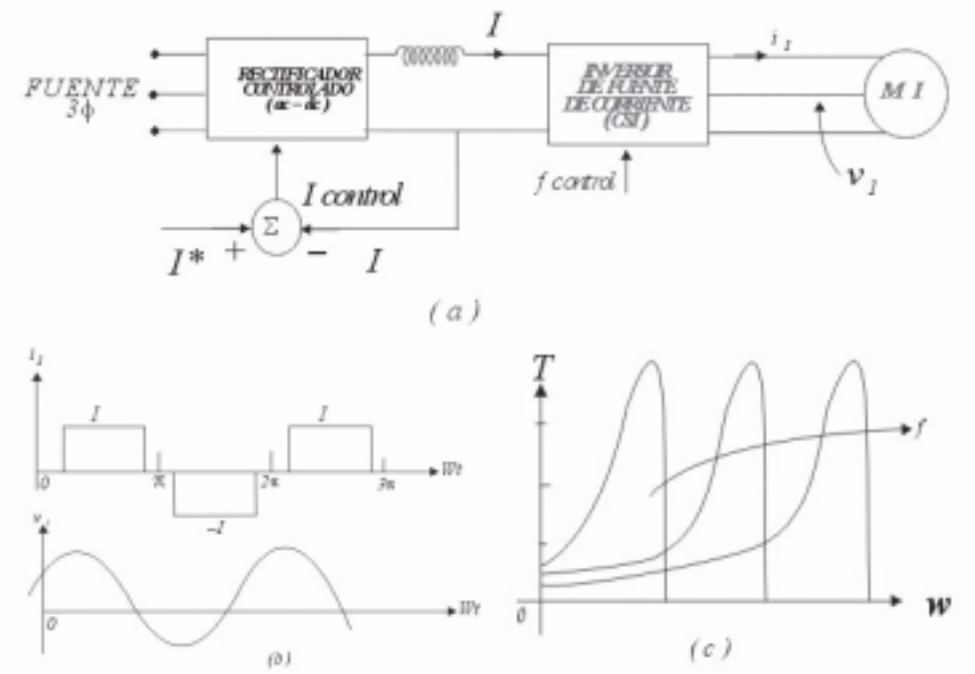



**Figura** *7.3.6. Sistema de Control de un motor de inducción con inversor de fuente de corriente y las correspondientes características.*

### *7.3.4 OPERACIÓN CON FRECUENCIA DE DESLIZAMIENTO CONSTANTE*

*Para una eficiente operación de una máquina de inducción, es deseable que éste opere a una frecuencia de deslizamiento controlada ( el cual es también la frecuencia del circuito rotórico). Una alta eficiencia y un alto factor de potencia son obtenidos si la frecuencia de deslizamiento $f_2$ es mantenida debajo de la frecuencia crítica, que corresponde a la frecuencia del circuito rotórico para la cual el máximo torque es desarrollado.*

*Considere el diagrama de bloque de la figura 7.3.7. La señal $f_n$ reperesenta una frecuencia correspondiente a la velocidad del motor. A éste una señal $f_2$ representando la frecuencia de deslizamiento ( ó circuito rotórico) es adicionada ó sustraída . La resultante $f_1$ representa la frecuencia del estator:*

$$f_1 = f_n \pm f_2 \quad .....(7-114)$$

*La adición de $f_2$ a $f_n$ corresponderá a una acción motora, y la sustracción de $f_2$ de $f_n$ corresponderá a una acción de frenado regenerativo de la máquina de inducción. A cualquier velocidad del motor la señal $f_2$ representará la frecuencia del circuito rotórico, esto es, la frecuencia de deslizamiento.*

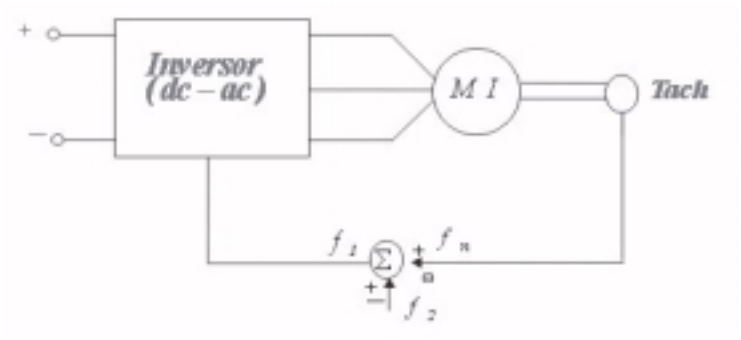



**Figura** *7.3.7. Operación a frecuencia de deslizamiento constante*

### *7.3.5 CONTROL DE LAZO CERRADO*

*La mayoría de los sistemas de control industriales operan como sistemas con realimentación de lazo cerrado. La figura 7.3.8. muestra un diagrama de bloque de un sistema de control de velocidad empleando regulación de frecuencia de deslizamiento y operación manteniendo constante la relación Volt / hertz. En la primera juntura de unión la diferencia entre la velocidad establecida $\omega^*$ y la actual velocidad $\omega$ representa la velocidad de deslizamiento $\omega_s$ y por ésta razón la frecuencia de deslizamiento. Si la frecuencia de deslizamiento está cerca de la frecuencia crítica, su valor es fijado, por eso restringiendo la operación debajo de la frecuencia crítica.*
*En la segunda juntura de unión, la frecuencia de deslizamiento luego es adicionada a la frecuencia $f_n$ (representando la velocidad del motor) para generar la frecuencia del estator $f_1$. La función generador provee una señal tal que un voltaje es obtenido desde el rectificador controlado para operación Volt/hertz constante.*

*Un sistema simple de control de velocidad usando un inversor tipo fuente de corriente es mostrada en la figura 7.3.9. La frecuencia de deslizamiento es mantenida constante y la velocidad es controlada controlando la corriente DC de enlace $I_d$ y por esta razón la magnitud de la corriente del motor.*

*En aplicaciones de tracción, tales como carros subterráneos ó otros vehículos de tránsito, el torque es controlado directamente. Un esquema típico de control para sistemas de tránsito es mostrada en la figura 7.3.10 .*

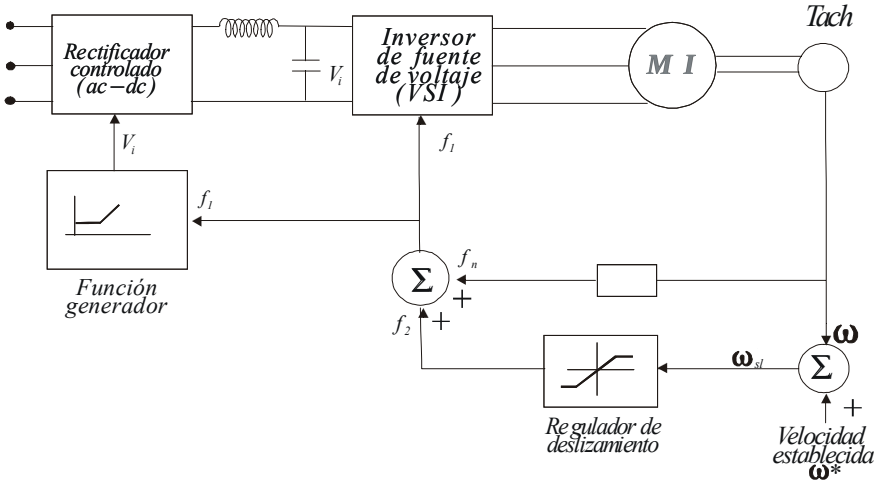



**Figura** *7.3.8. Sistema de control de velocidad empleando regulación de frecuencia por deslizamiento y operación de relación (V / f) constante.*

*Como el voltaje utilizado para un sistema de tránsito es un voltaje fijo DC, un inversor de tipo fuente de voltaje con modulación de ancho de pulso (PWM) es considerado en el cual el voltaje de salida puede ser variada. Esto puede ser visto en el ejemplo N°1, que si la frecuencia de deslizamiento es mantenida constante, el torque varía con el cuadrado de la corriente del estator. La señal que está representando la diferencia entre I* y la actual corriente $I_1$ cambiará el voltaje de salida del inversor PWM para ser $I_1$ cercana al valor deseado de I* representando al torque comando . Para el frenado regenerativo del vehículo de tránsito; el signo de la frecuencia de deslizamiento $f_2$ es negativo. El motor de inducción operará en el modo de generador ($f_n > f_1$ ) y realimenta la energía cinética almacenada en el motor hacia la fuente DC.*

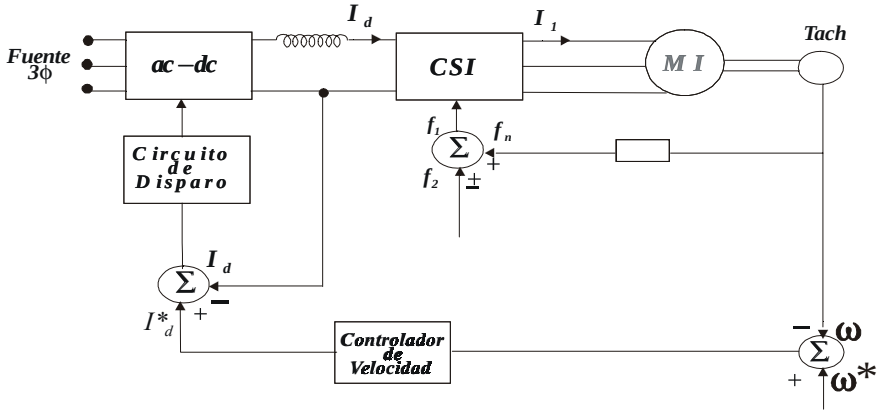
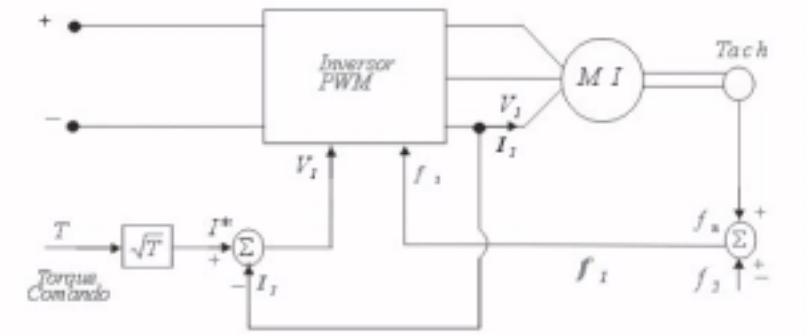



**Figura** *7.3.9. Sistema de control de velocidad con frecuencia de deslizamiento constante (usando un inversor de fuente de corriente).*



*Esquema Típico de control de velocidad para sistemas de tránsito*
***Figura** 7.3.10.*

***EJEMPLO 3**.- Muestre que si la frecuencia de deslizamiento es mantenida constante, el torque desarrollado por la máquina de inducción es proporcional al cuadrado de la corriente de entrada.*

*SOLUCIÓN:*

*Para operación a frecuencia variable, el voltaje terminal $V_1$ es cambiada con la frecuencia $f_1$ para matener el flujo en la máquina a un nivel deseado. En la región de baja frecuencia $V_1$ es reducido . El voltaje a través de $r_1$ y $X_1$ podría ser comparable a $V_1$. Por ésta razón $V_1$ no puede ser asumida igual a $E_1$. En el circuito equivalente, la rama shunt $X_m$ no debería ser movida a los terminales de la máquina. Por ésta razón , para operación a frecuencia variable, el circuito equivalente mostrado es más apropiado para usar en la predicción de su performance.*

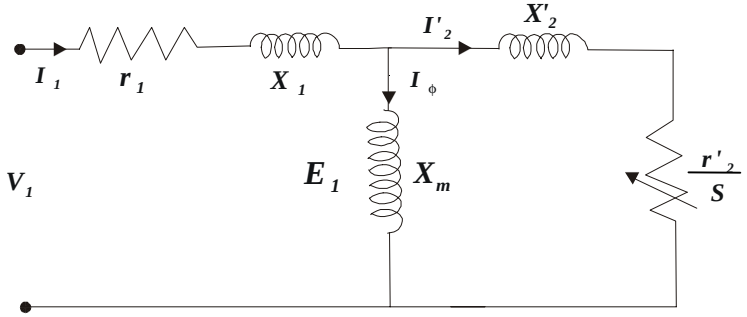



***Figura** E3.1*

$$\bar{I}_2' = \frac{jX_m}{\frac{r_2'}{S} + j\left(X_2' + X_m\right)} \bar{I}_1$$

$$I_2'^{\,2} = \frac{X_m^2}{\left(\frac{r_2'}{S}\right)^2 + j\left(X_2' + X_m\right)^2} I_1^2$$

$$T = \frac{1}{\omega_S} I_2'^{\,2} \frac{r_2'}{S}$$

*Donde:*

$$\omega_S = \frac{4\pi}{p} f_1$$

$$S = \frac{f_2}{f_1}$$

*Luego:*

$$T = \frac{\pi p L_m^2}{r_2'} I_1^2 \frac{f_2}{\left[1 + \left[\frac{2\pi\left(L_m + L_2'\right)f_2}{r_2'}\right]^2\right]}$$

*Esta ecuación muestra que si $f_2$ permanece constante :* $T \alpha I_1^2$

***EJEMPLO 4**. Muestre que si la frecuencia del rotor $f_2$ es mantenida constante, el torque desarrollado para una máquina de inducción es proporcional al cuadrado del flujo en el entrehierro:*

*SOLUCIÓN:*

*Del circuito equivalente se obtiene:*

$$I_2' = \frac{E_1}{\sqrt{\left(\frac{r_2' f_1}{f_2}\right) + \left(2\pi f_1 L_2'\right)^2}}$$

*y como:*

$$T = \frac{1}{\omega_S} I_2'^{\,2} \frac{r_2}{S}$$

*obtenemos:*

$$T = \frac{p}{4\pi r_2'}\left(\frac{E_1}{f_1}\right)^2 \frac{f_2}{\left[1 + \left(\frac{2\pi f_2 L_2'}{r_2'}\right)^2\right]}$$

*Si $f_2$ permanece constante,*

$$T \alpha \left(\frac{E_1}{f_1}\right)^2 \alpha \phi_p^2$$

### *7.3.6 OPERACIÓN CON FLUJO CONSTANTE, $\phi_p$ ó ( E / f )*

*Para conseguir alto torque en todo el rango de velocidad, el flujo de entrehierro del motor ($\phi_p$) debería ser mantenido constante. El flujo del motor no debería decrecer a bajas frecuencias como un resultado de los efectos de incremento de la resistencia del estator.*

*Así el flujo motor es proporcional a (E / f), esto puede ser mantenido constante si el voltaje de entrehierro E, en lugar del voltaje terminal V, es variado linealmente con la frecuencia del estator.*

*Es evidente de la ecuación anterior que el torque motor depende del flujo en el motor( $\phi_p$ $\alpha$ (E / f)) y de la frecuencia del rotor ($f_2$).*

*Bajo operación de flujo constante, para máximo torque:*

$$\frac{dT}{df_2} = 0 \quad .....(7-115)$$

*Se obtiene:*

$$2\pi f_{2b} L_2' = r_2' \quad .....(7-116)$$

*Donde:*

$f_{2b}$, *es la frecuencia del rotor al cual el máximo torque es desarrollado (llamado también frecuencia crítica).*

*Luego:*

$$f_{2b} = \frac{r_2'}{2\pi L_2'} \quad .....(7-117)$$

*Reemplazando en la ecuación del torque se obtiene el máximo torque por fase:*

$$T_{máx} = \frac{p}{4\pi}\left(\frac{E_1}{f_1}\right)^2 \frac{1}{4\pi L_2'} \quad .....(7-118)$$

### *7.3.7 OPERACIÓN CON CORRIENTE CONSTANTE*

*El motor puede ser operado con corriente constante suministrando un lazo de corriente alrededor del convertidor* ***AC - DC*** *como se ha visto en la figura 7.3.6a. Desde que la corriente eficaz del motor* $\mathbf{I_1}$ *es proporcional a la corriente* ***DC*** *de enlace* ***I****, la corriente del motor puede ser mantenida en un valor correspondiente a la corriente establecida I*.*

*Se observa de la ecuación del torque, que el torque desarrollado depende de la corriente del motor* $I_1$ *y la frecuencia del rotor* $f_2$*. Bajo la operación de corriente constante, para máximo torque:*

$$2\pi\left(L_m + L_2'\right) f_{2b} = r_2' \quad .....(7-119)$$

*Donde:*

$f_{2b}$, *frecuencia del rotor al cual el máximo torque es desarrollado*

*De la ecuación anterior:*

$$f_{2b} = \frac{r_2'}{2\pi\left(L_m + L_2'\right)} \quad .....(7-120)$$

*Luego el máximo torque desarrollado por fase es:*

$$T_{máx} = \frac{\pi p L_m^2}{r_2'} I_1^2 \frac{f_{2b}}{2}$$

$$T_{máx} = \frac{\pi p L_m^2}{r_2^{'}} I_1^2 \frac{r_2^{'}}{4\pi\left(L_m + L_2^{'}\right)}$$

$$T_{máx} = \frac{p L_m^2}{4\left(L_m + L_2^{'}\right)} I_1^{'} \quad .....(7-121)$$

*Se observa que la frecuencia del rotor al cual se desarrolla el máximo torque es mucho más pequeño en la operación a corriente constante. Por ésta razón la pendiente de la característica torque – velocidad en la figura 7.3.6c es muy escarpado comparado con el de la figura 7.3.5.*

***EJEMPLO 5 .-*** *Un motor de inducción de rotor bobinado $3\phi$, 460 V, 1740 rpm, 60Hz, 4 polos, tiene los siguientes parámetros por fase.*

$r_1 = 0{,}25$ *ohms* , $r_2^{'} = 0{,}2$ *ohms* , $X_1 = X_2^{'} = 0{,}5$ *ohms* , $X_m = 30$ *ohms*

*Las pérdidas rotacionales son 1700 watts. Determine la frecuencia crítica para las siguientes operaciones.*

*a) Motor operado desde una fuente $3\Phi$ , 460 volts, 60Hz.*
*b) Motor operado bajo la condición de flujo constante.*
*c) Motor operado bajo la condición de corriente constante.*

*SOLUCIÓN:*

*a) Se sabe que el deslizamiento para máximo torque es:*

$$S_{T_{máx}} = \frac{r_2^{'}}{\sqrt{R_{th}^2 + \left(X_{th} + X_2^{'}\right)^2}} = \frac{0{,}2}{\sqrt{0{,}24 + \left(0{,}49 + 0{,}5\right)^2}}$$

$$S_{T_{máx}} = 0{,}1963$$

$$f_{2b} = 0{,}1963 \times 60 = 11{,}779 Hz$$

*b)*

$$L_2^{'} = \frac{0{,}5}{2\pi \times 60} = 1{,}33 \times 10^{-3}\ Hr$$

$$f_{2b} = \frac{0{,}2}{2\pi \times 1{,}33 \times 10^{-3}} = 23{,}93 Hz$$

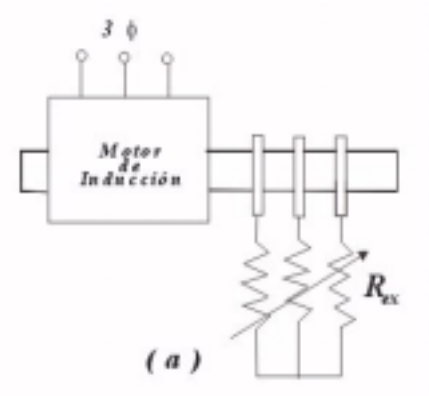
*c)*

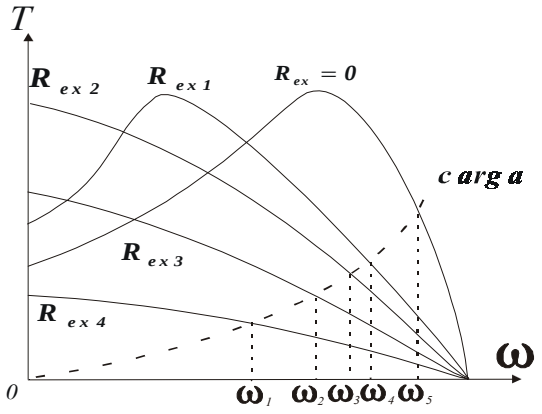
$$L_m = \frac{30}{2\pi \times 60} = 79{,}58 \times 10^{-3}\ Hr$$

$$f_{2b} = \frac{0{,}2}{2\pi\left(79{,}58 + 1{,}33\right) \times 10^{-3}} = 0{,}393 Hz$$

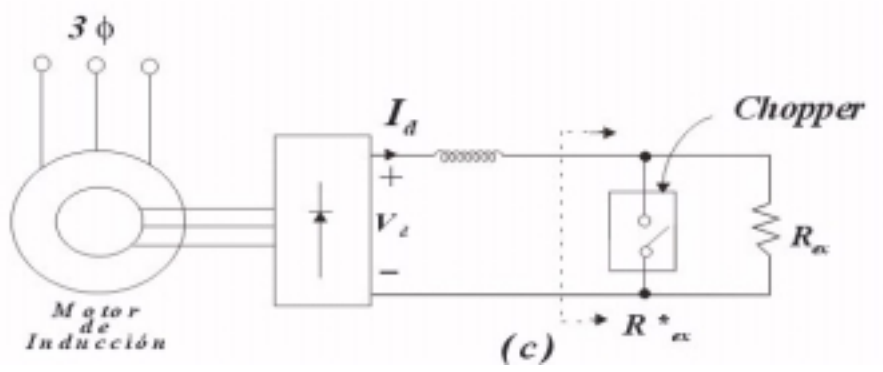
### *7.3.8 CONTROL POR RESISTENCIA ROTÓRICA*

*Se ha mencionado que la velocidad en una máquina de inducción de rotor bobinado puede ser controlado conectando resistencias externas en el circuito rotórico a través de anillos de deslizamiento. Las características de torque – velocidad para cuatro resistencias externas son vistas en la figura 7.3.11b. La característica de torque de carga Vs velocidad (T –ω) es también mostrada por las líneas punteadas . Variando las resistencias externas* $0 < R_{ex} < R_{ex4}$*, la velocidad de la carga puede ser controlada en le rango* $\omega_1 < \omega < \omega_s$*. Note que para un apropiado ajuste de la resistencia externa* ($R_{ex} = R_{ex2}$)*, el máximo torque puede ser obtenido en el arranque. El esquema mostrado en la figura 7.3.11a requiere un banco de resistencias trifásicas y para una balanceada operación todas las resistencias deberían ser iguales para cualquier punto de trabajo de las resistencias . Un ajuste manual de las resistencias podría no ser satisfactorio para algunas aplicaciones, particularmente para un sistema de control con realimentación de lazo cerrado. Un control de estado sólido de las resistencias externas podrían proveer una operación mas fina. Un diagrama de bloque de un esquema de control de estado sólido con operación de lazo abierto es mostrado en la figura 7.3.11c.*




(b)



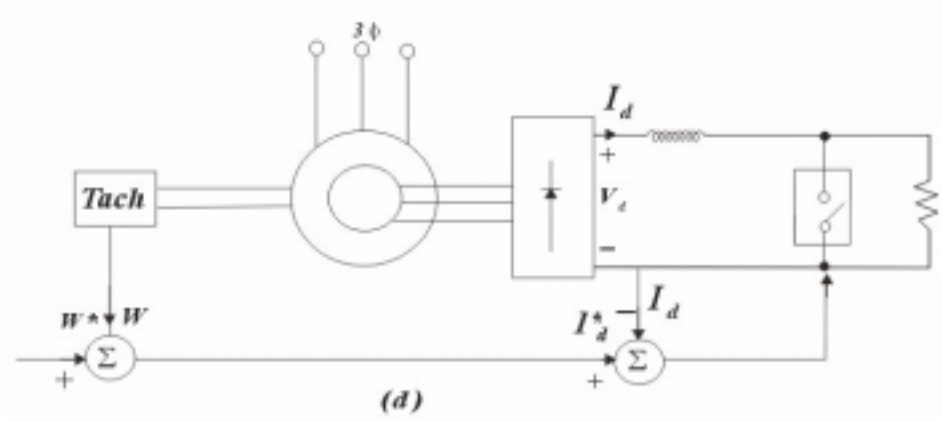



***Figura*** *7.3.11. Control de velocidad por control de resistencia rotórica Esquemas de lazo abierto y lazo cerrado.*

*La potencia trifásica del rotor es rectificada por un puente de diodos. El valor efectivo* $R_{ex}^{*}$ *de la resistencia externa* $R_{ex}$ *puede ser cambiada por variación del ciclo útil del chopper conectado a través de* $R_{ex}$*. Se puede demostrar que:*

$$R_{ex}^{*} = (1-\alpha)R_{ex} \quad .....(7-122)$$

*Cuando α =0, esto es, cuando el chopper está apagado (off) todo el tiempo,* $R_{ex}^{*} = R_{ex}$ *. Cuando α =1, esto es , el chopper está prendido (on) todo el tiempo,* $R_{ex}$ *está cortocircuitado por el chopper y así* $R_{ex}^{*} = 0$*. En este caso, la resistencia del circuito rotórico consiste únicamente de la resistencia del arrollamiento del rotor. Por lo tanto variando α en el rango 1> α >0, La resistencia efectiva es variada en el rango* $0 < R_{ex}^{*} < R_{ex}$*, y similares características de torque – velocidad a éstas mostradas en la figura 7.3.11b son obtenidas.*

*El voltaje rectificado Vd figura 7.3.11c depende de la velocidad y por esta razón el deslizamiento de la máquina. Sin movimiento, dejemos que el voltaje inducido en el arrollamiento rotórico sea* $\mathbf{E_2}$*. (Para un rectificador de onda completa 3ϕ con 6 diodos) el voltaje rectificado* **V** *a un deslizamiento* **S** *es:*

$$V_d = S|V_d|_{S=1} = S\frac{3\sqrt{6}}{\pi}E_2 \quad .....(7-123)$$

*La potencia eléctrica en el circuito rotórico es :*

$$P_2 = SP_{EM}$$

*Si la potencia de pérdidas en el arrollamiemto rotórico es omitido, la potencia $P_2$ es la potencia DC de salida de los rectificadores. Por esta razón:*

$$SP_{EM} \cong V_d I_d$$

*Luego se obtiene:*

$$ST\omega_S = S\frac{3\sqrt{6}}{\pi}E_2 I_d \quad .....(7-124)$$

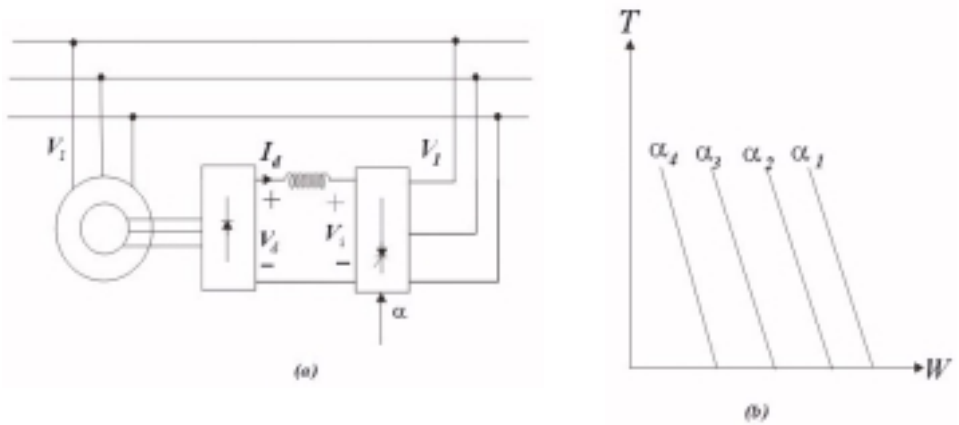
$$T \ \alpha \ I_d$$

*La relación lineal entre el torque desarrollado y la corriente rectificada es una ventaja desde el punto de vista del control de lazo cerrado de este tipo de sistema de control de velocidad. Un diagrama de bloque para operación en lazo cerrado del sistema de control con resistencia rotórica a estado sólido es mostrada en la figura 7.3.11d. La velocidad actual $\omega$ es comparado con la velocidad de consigna $\omega$*, y la señal de error representa el torque comando o la corriente de referencia $I_d$*. Esta corriente de demanda $I_d$* es comparada con la actual corriente $I_d$, y la señal de error cambia el duty radio $\alpha$ del chopper para hacer la corriente $I_d$ cercana al valor $I_d$*. La mayor desventaja del control por resistencia rotórica de los otros métodos es que la eficiencia es baja a velocidad reducida porque el deslizamiento es alto. Sin embargo, este método de control es frecuentemente empleada porque es simple.*
*Una típica aplicación de este método es para aparatos que mueven cargas pesadas, ventiladores, máquinas que fuerzan líquidos, aire ó gas , etc. Donde la variación de velocidad por encima de un rango pequeño cerca de la velocidad tope es requerida.*

### *7.3.9 REGENERACIÓN DE ENERGÍA POR DESLIZAMIENTO ROTÓRICO*

*En el esquema justo discutido, si la pérdida de potencia de deslizamiento en la resistencia podría ser retornada a la fuente AC, la eficiencia sobre todo del sistema podría ser incrementada mucho más. Un método para el restablecimiento de la potencia de deslizamiento es mostrada en la figura 7.3.12a. La potencia del rotor es rectificada por el puente de diodos. La corriente rectificada es suavizada por el choque. La salida del rectificador es entonces conectada a los terminales dc del inversor, el cual invierte esta potencia DC a potencia ac y alimenta a la fuente AC. El convertidor es un rectificador controlado operado en el modo de inversión.*

*Sin carga el torque requerido es muy pequeño y de la ecuación anterior $I_d = 0$*



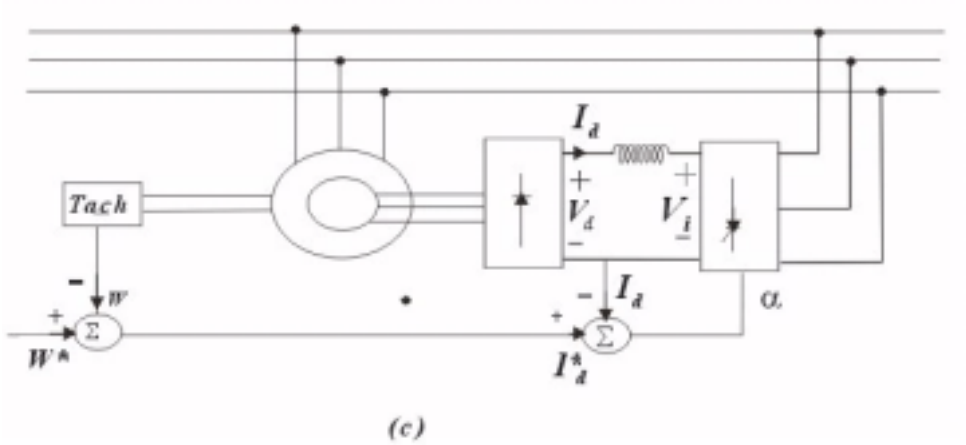



***Figura*** *7.3.12. Regeneración de Potencia por deslizamiento . a) Operación de Deslizamiento. b) Característica de Torque – velocidad para diferentes ángulos de disparo. c) Control de velocidad de lazo cerrado.*

*De la figura 7.3.12a :*

$$V_d = V_i$$

*Si el deslizamiento sin carga es $s_o$, entonces se demuestra que:*

$$S_0 \frac{3\sqrt{6}}{\pi} E_2 = -\frac{3\sqrt{6}}{\pi} V_1 \cos\alpha$$

*ó*

$$S_0 = -\frac{V_1}{E_2} \cos\alpha \quad .....(7-125)$$

*El ángulo de disparo α del inversor permanecerá por lo tanto para la velocidad sin carga . Si el torque es aplicado, la velocidad decrecerá. Las características de torque – velocidad para varios ángulos de disparo son mostrados en la figura 7.3.12b. Estas características son similares a aquellas del motor DC excitado independientemente para varios voltajes de armadura.*

*Como se mostró anteriormente, el torque desarrollado por la máquina es proporcional a la corriente DC de enlace Id.*

*Un sistema de control de lazo cerrado usando la técnica de regeneración de potencia por deslizamiento es mostrada en la figura 7.3.12c.*

*Este método de control de velocidad es usado en aplicaciones de alta potencia donde la variación de velocidad por encima de un amplio rango envuelve una gran cantidad de potencia por deslizamiento.*

## *7.4 ARRANQUE DE MOTORES DE INDUCCIÓN*

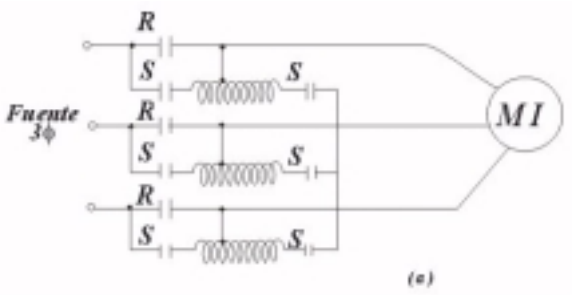
*Los motores de inducción son frecuentemente arrancados por conexión de éllas directamente a la línea. Una gran corriente del orden de 500 a 800 por ciento de plena carga podría fluir en la línea. Si éstas causan una caída voltaje apreciable en la línea, esto podría afectar otros dispositivos conectados a la línea. También, si una gran corriente fluye por un largo tiempo ésto podría sobrecalentar el motor y dañar el aislamiento. En tal caso, un arranque a voltaje reducido podría ser usado.*

*Un autotransformador 3ϕ variable, como el mostrado en la figura 7.4.1a podría ser empleada como un arrancador a voltaje reducido. Cuando el motor se aproxime a la velocidad plena, el autotransformador es desconectado del circuito.*

*Un método de arranque estrella – triangulo podría también ser empleado para proveer voltaje reducido en el arranque. En este método, la conexión normal de los arrollamientos del estator es en delta. Si esos arrollamientos son conectados en estrella en el arranque, el voltaje de fase es reducido, resultando una menor corriente en el arranque. Cuando el motor aproxima a velocidad plena, los arrollamientos serán conectados en delta, como se muestra en la figura 7.4.1b.*

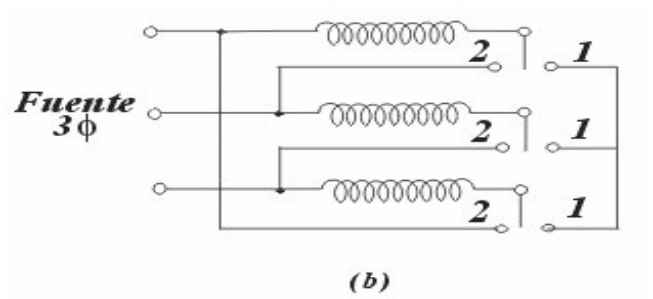
*Un controlador de voltaje a estado sólido, como el mostrado en la figura 7.4.1c puede también ser usado como un arrancador a voltaje reducido. El controlador puede proveer un arranque a voltaje reducido. El controlador puede proveer un arranque suave . Este arreglo puede también ser usado para controlar la velocidad del motor de inducción.*

*Note que de todas maneras un arranque a voltaje reducido reduce la corriente de arranque, también decrece el torque de arranque, porque el torque desarrollado es proporcional al cuadrado del voltaje terminal.*




(a)

*R: Contactos de movimiento*
*S: Contactos de arranque*
*arranque: S cerrado, R abierto*
*movimiento : S abierto, R cerrado*




(b)

*1: Conección estrella*
*2: Conección Delta*

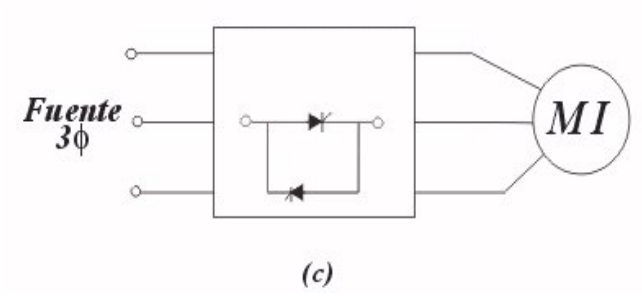



***Figura*** *7.4.1. Métodos de arranque para motores de inducción*

*a. Arranque por autotransformador.*
*b. Arranque estrella – triangulo.*
*c. Arranque por controlador de voltaje de estado sólido.*

## *7.5 PRINCIPIOS DE FUNCIONAMIENTO DE LA MÁQUINA SÍNCRONA*

***Generalidades:***

*La máquina síncrona es una de las máquinas eléctricas más importantes, ya que se utiliza en los sistemas eléctricos de potencia como generador trifásico de tensión. En las centrales eléctricas para generar energía eléctrica los alternadores utilizados son generalmente máquinas síncronas.*

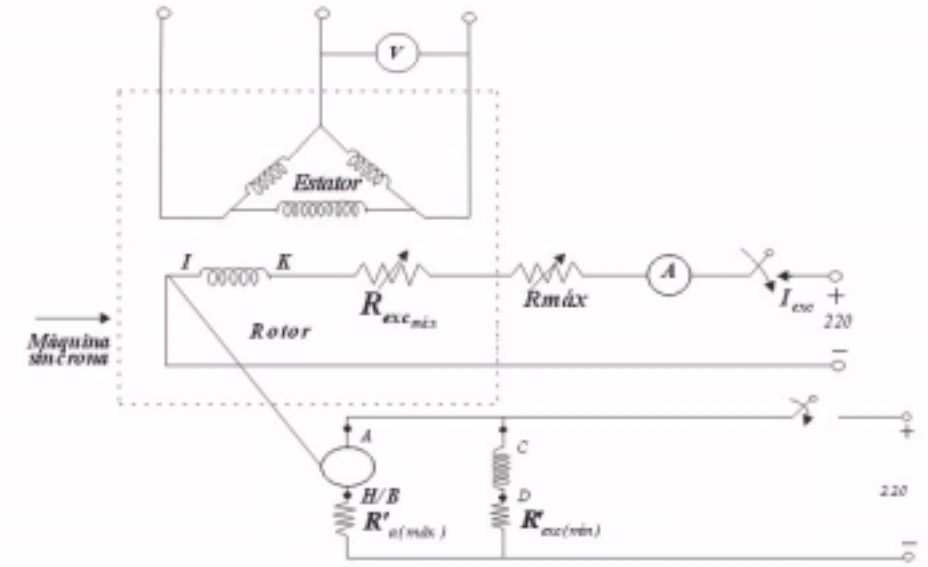
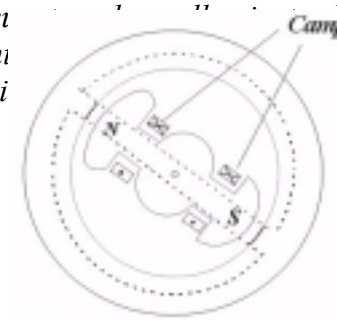



***Figura*** *7.5.1 Máquina prima(conexión en derivación)*

*Básicamente está constituido por un estator en el que se aloja el arrollamiento de armadura o inducido y por un rotor bipolar o multipolar en el que se encu campo o inducto riente con roviene de un inado exci*




*MÁQ. SÍNCRONA MONOFÁSICA ELEMENTAL BIPOLAR*

*MÁQUINA SÍNCRONA DE ROTOR CILINDRICO BIPOLAR*

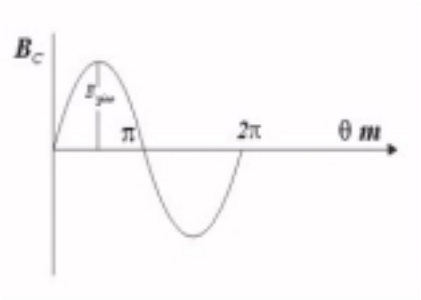
***Figura** 7.5.2a* ***Figura** 7.5.2b*

*El principio de funcionamiento es simple. El inductor produce un campo magnético. La densidad de flujo en el entrehierro tiene una distribución espacial prácticamente sinusoidal.*
*Al ponerse en movimiento el rotor, las líneas de fuerza cortan a los conductores ubicados en el estator generándose en ellos una f.e.m. que varía de la misma forma como varía la densidad de flujo en el entrehierro, es decir sinusoidalmente.*
*La frecuencia de la onda generada dependerá de la velocidad de la máquina.*
*Cuando circula corriente por la armadura se produce otro campo magnético de reacción de armadura que en la máquina 3ϕ tiene las características de girar en la misma dirección y a la misma velocidad del rotor.*

*Este campo interacciona con el campo del rotor y se produce un torque electro magnético que tiende a alinearlos. Cuando la máquina trabaja como motor es justamente este par electromagnético que produce su rotación.*

### *7.5.1 CAMPO MAGNÉTICO DEL ROTOR:*

*En el rotor se produce una distribución espacial $B_e(t)$ en el entrehierro de forma sinusoidal.*



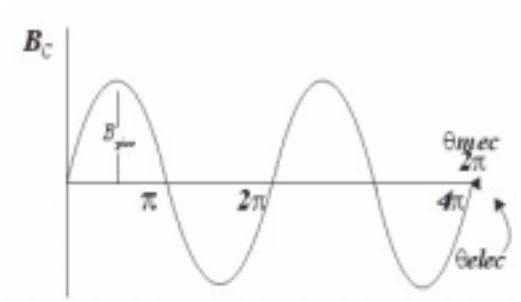




***Figura** 7.5.3a* *Para una máquina* $p' = 2$
***Figura** 7.5.3b.*

$$\theta_{elec} = p'\theta_m \quad .....(7-126)$$

*Donde:*

$p' = \#$ *de pares de polos.*
$\theta_{el} =$ *Ángulo eléctrico.*

$\theta_m =$ *Ángulo mecánico.*

*Podemos escribir para la densidad de flujo en el entrehierro:*

$$B_e = B_{pico} senp' \theta_{mec} \quad .....(7-127)$$

$\phi_e$ = *flujo total producido por un polo:*

$$\phi_e = \int_0^{\frac{\pi}{p'}} \left(B_{pico} senp' \theta_m\right) Lrd\theta_m \quad .....(7-128)$$

*L = longitud del rotor.*
*r = radio del rotor.*

$$\phi_e = \frac{2Lr}{p'} B_{pico} \quad .....(7-129)$$

### 7.5.2 CAMPO PRODUCIDO POR EL INDUCIDO O ARMADURA

*Normalmente el inducido es 3ϕ y consta de tres arrollamientos ubicados a 120° eléctricos. Los tres arrollamientos se conectan en estrella o a veces en triángulo y por consiguiente son recorridos por corrientes trifásicas que generalmente son balanceadas.*

*Cada fase produce una onda de fuerza magnetomotriz (f.m.m.) cuya distribución espacial está indicada en la figura siguiente:*

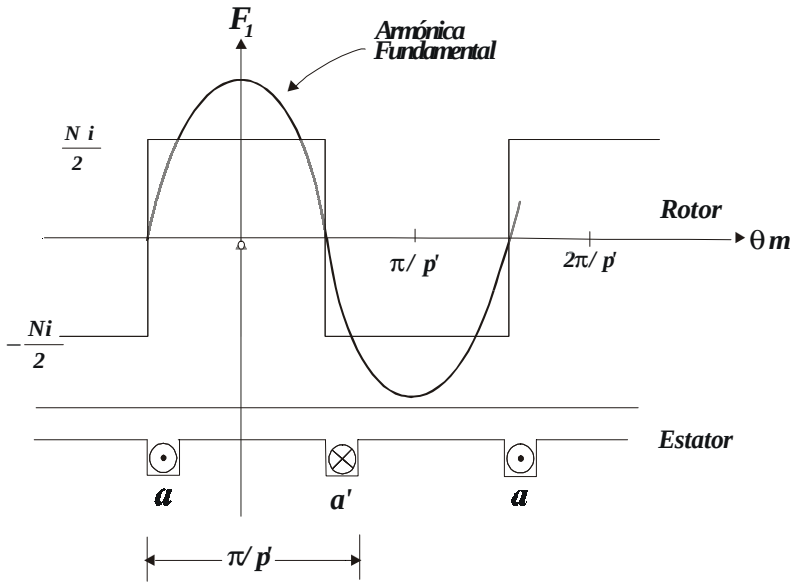



**Figura** *7.5.4*

*La onda rectangular puede descomponerse por FOURIER en una suma de sinusoides, es decir en varias armónicas.*

*La fundamental tendrá una amplitud de :*

$$F_{1pico} = \frac{4}{\pi p'}\frac{Ni}{2} = \frac{2Ni}{\pi p'} \quad .....(7-130)$$

*Y estará alienada con el eje magnético de la bobina , es decir:*

$$F_1 = F_{1pico}\cos p'\theta_m \quad .....(7-131)$$

*El arrollamiento de la armadura es generalmente de tipo distribuido, es decir cada fase ocupa varias ranuras para aprovechar toda la circunferencia del estator. Por ello se toman en cuenta los factores de paso* $\mathbf{K_P}$ *y distribución* $\mathbf{K_d}$*:*

$$F_{1pico} = \frac{2K_d K_p}{\pi p'} N_F i \quad .....(7-132)$$

$$F_1 = \frac{2K_d K_p}{\pi p'} N_F i \cos p'\theta_m \quad .....(7-133)$$

*La amplitud de* $F_1$ *pico variará continuamente y tomará su valor máximo cuando* ***i*** *sea máxima.*

*Entonces:*

$$F_{máx} = \frac{2K_d K_p}{\pi p'} N_F I_m \quad .....(7-134)$$

$$F_{1pico} = F_{máx}\cos\omega t \quad .....(7-135)$$

*Luego:*

$$F_1 = \frac{2K_d K_p}{\pi p'} N_F I_m \cos\omega t \cos p'\theta_m \quad .....(7-136)$$

*El resultado cambia completamente si se consideran las tres fases a b y c actuando simultáneamente.*

$$i_a = I_m \cos\omega t \quad .....(7-137)$$

$$i_b = I_m \cos(\omega t - 120°) \quad .....(7-138)$$

$$i_c = I_m \cos(\omega t + 120°) \quad .....(7-139)$$

*Y estando desplazadas las bobinas de las tres fases de* $\frac{120°}{p'}$ *grados mecánicos, podemos escribir para la* **f.m.m**. *fundamental de cada fase:*

$$F_{1a} = F_{máx} \cos \omega t \cos p' \theta_m \quad .....(7-140)$$

$$F_{1b} = F_{máx} \cos(\omega t - 120°) \cos p' \left( \theta_m - \frac{120°}{p'} \right) \quad .....(7-141)$$

$$F_{1c} = F_{máx} \cos(\omega t + 120°) \cos p' \left( \theta_m + \frac{120°}{p'} \right) \quad .....(7-142)$$

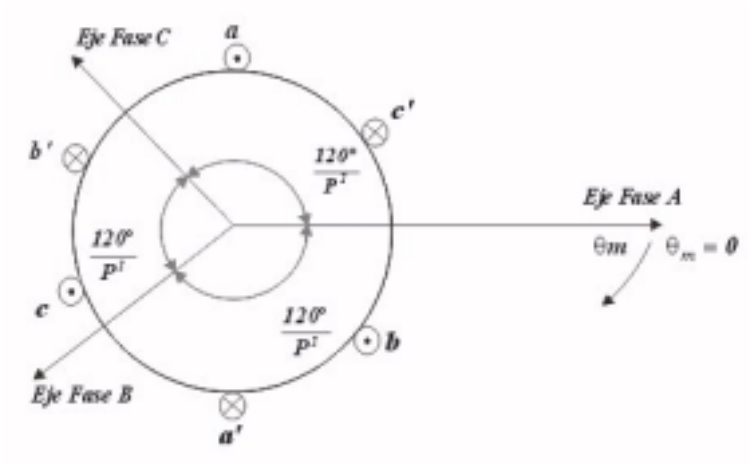



**Figura** *7.5.5*

*La onda de f.m.m.* $F_A(\theta_m, t)$ *resultante se obtendrá sumando las ecuaciones anteriores:*

$$F_A(\theta_m, t) = F_{máx} \begin{bmatrix} \cos \omega t \cos p' \theta_m + \cos(\omega t - 120°) \cos(p' \theta_m - 120°) + \\ \cos(\omega t + 120°) \cos(p' \theta_m + 120°) \end{bmatrix}$$

*Aplicando la identidad*

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad .....(7-143)$$

*Y simplificando obtenemos:*

$$F_A(\theta_m, t) = 1.5 F_{máx} \cos(p' \theta_m - \omega t) \quad .....(7-144)$$

*Esta resultante es una onda giratoria de amplitud constante igual a 1.5* $F_{máx}$.

*Es decir las tres bobinas estáticas del estator han creado un campo giratorio que rota a una velocidad denominada síncrona.*

$$\omega = \omega \quad .....(7-145)$$

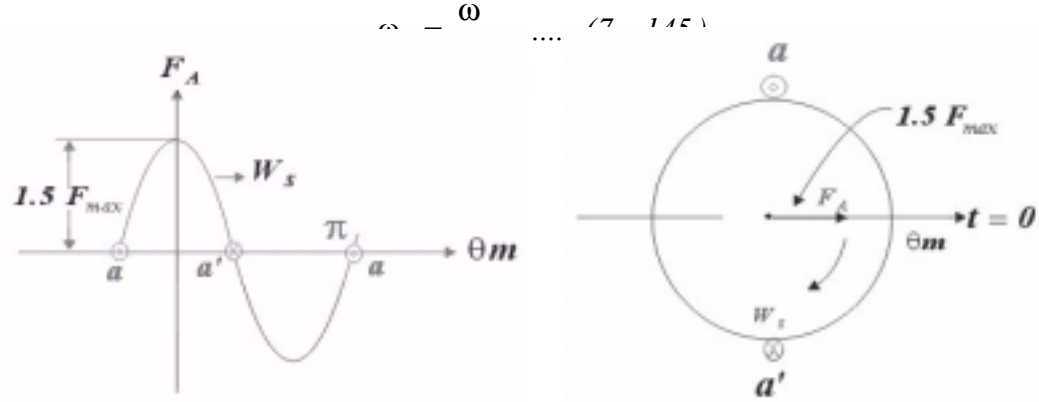


***Figura** 7.5.6a* ***Figura** 7.5.6b*

$$F_A = 1.5F_{máx} = 1.5\frac{2K_dK_p}{\pi p'}N_F I_m = \frac{3K_dK_p}{\pi p'}N_F\sqrt{2}I$$

$$F_A = 1.35K_dK_p\frac{N_F}{p'}I \quad .....(7-146)$$

$$\omega = 2\pi f \quad .....(7-147)$$

$$\omega_S = 2\pi n_S \quad .....(7-148)$$

*Donde:*

*f, es la frecuencia de las corriente $3\phi$ sinusoidales*
*$n_S$, es la velocidad de rotación en r.p.s.*

$n_S = \frac{f}{p'}$, *es la velocidad de rotación del campo giratorio y depende de la frecuencia de las corrientes que produce el campo giratorio. La velocidad síncrona resulta ser idéntica a la velocidad mecánica del rotor.*

*El campo giratorio producido por la armadura se denomina reacción de armadura. Para hallar $F_R$ (f.m.m. resultante) se suman las dos ondas, como se trata de sinusoides es posible representarla con fasores. En el diagrama , los fasores tienen como módulo la amplitud de la onda y giran con la velocidad sincrona en la dirección indicada.*

### *7.5.3 CAMPO MAGNETICO RESULTANTE*

*El campo magnético producido por la armadura es giratorio y su velocidad de rotación es la síncrona.*

*El campo magnético del rotor a su movimiento es también giratorio con respecto al estator. Como la velocidad del rotor es justamente la síncrona, ambos campos giran en la misma dirección y a la misma velocidad, manteniendo un desfasaje espacial constante entre sí. Este permite que interaccionen y se produzca un par electromagnético constante.*

*$F_A \rightarrow$ fuerza magnetomotriz de la armadura.*

$F_e \rightarrow$ *Fuerza magnetomotriz del rotor.*
$E_a \rightarrow$ *Fuerza electromotriz inducida en la fase* **a**
$I_a \rightarrow$ *Corriente de armadura*
$\phi \rightarrow$ *Angulo eléctrico entre* $E_a$ *y* $I_a$
$F_R \rightarrow$ *F.m.m. resultante en el entrehierro*

$\phi_A, \phi_e, \phi_R \rightarrow$ *Flujos fundamentales por polo respectivamente (con entrehierro constante y sin saturación, el flujo proporcional a la f.m.m.).*
$B_A, B_e, B_R \rightarrow$ *densidades de flujo en el entrehierro respectivamte.*

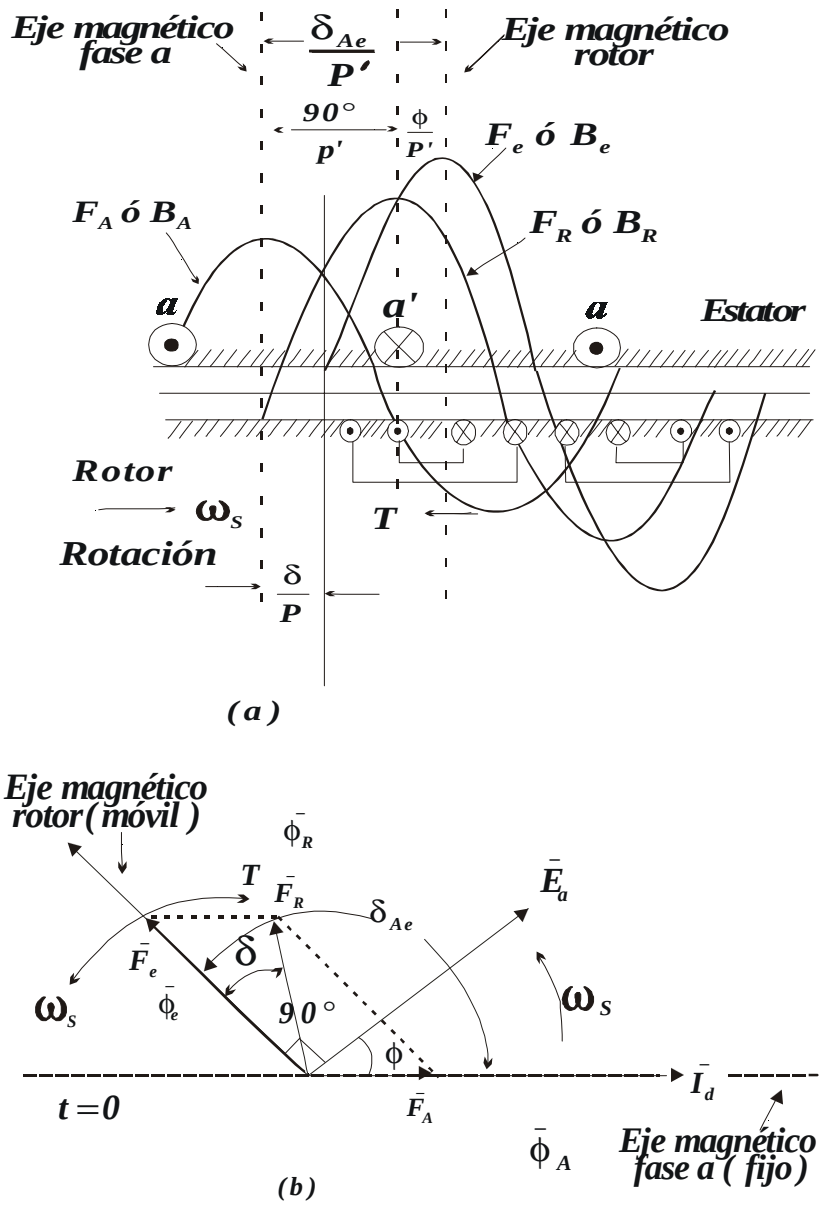



**Figura** *7.5.7*

*En t=0 la corriente en la fase* **a** *es máxima y por consiguiente* $\mathbf{F_A}$ *se encuentra en el eje magnético de* **aa'**. *La* **f.e.m**. $\mathbf{E_a}$ *inducida en la fase* a *estará desfasada*

*de un ángulo $\phi$ con respecto a la corriente. El desfasaje entre $F_e$ y $F_A$ es de $(90°+\phi)$.*

### 7.5.4 TORQUE ELECTROMAGNÉTICO

*Los ejes magnéticos del rotor y del estator (armadura) están desfasados de un ángulo eléctrico :*

$$\delta_{Ae} = 90° + \phi \quad .....(7-149)$$

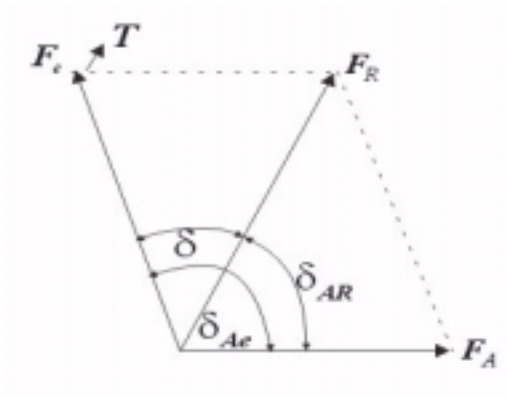



**Figura** *7.5.8*

*Los dos campos giran a la velocidad síncrona y producen un torque T que trata de alinearlos.*
*Para determinar su valor primero se calcula la coenergía en el entrehierro en función de las f.m.m.*
*El torque T viene a ser la derivada parcial de la coenergía con respecto al ángulo mecánico :*

$$T = \frac{\partial W'}{\partial \delta_{Aemec}} \quad .....(7-150)$$

*haciendo cálculos y operaciones:*

$$T = -(p')^2 \frac{\pi}{2} \phi_R F_e sen\delta \quad .....(7-151)$$

*El signo (-) indica que el torque tiende a reducir los ángulos $\delta_{Ae}$ y $\delta$ es decir trata de alinear los ejes magnéticos de los campos.*
*El T (par electromagnético) depende del ángulo $\delta$, la variación de $\delta$ permite que la máquina ajuste el torque a los requerimientos de la carga, por tal razón se le denomina ángulo de torque ó de potencia.*

*$\phi_R$ y $F_e$ son constantes*
*Por lo tanto el T variará en forma sinusoidal.*

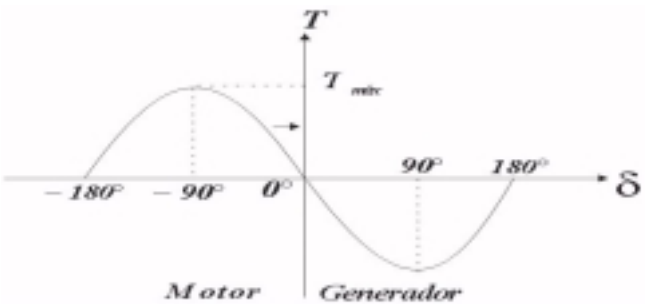


**Figura** *7.5.9*

$$T_{máx} = \left(p'\right)^2 \frac{\pi}{2} \phi_R F_e \quad .....(7-152)$$

** Si se exige a la máquina un par superior al máximo ésta sale de sincronismo.*

### *7.5.5 LA MÁQUINA SÍNCRONA EN RÉGIMEN ESTABLE*

#### *7.5.5.1 LA MÁQUINA DE ROTOR CILÍNDRICO*

*El entrehierro $\ell_g$ de la máquina de rotor cilíndrico es constante. Esto simplifica bastante su análisis ya que el circuito magnético no variará y será el mismo tanto en el eje directo como en el eje cuadratura del rotor.*

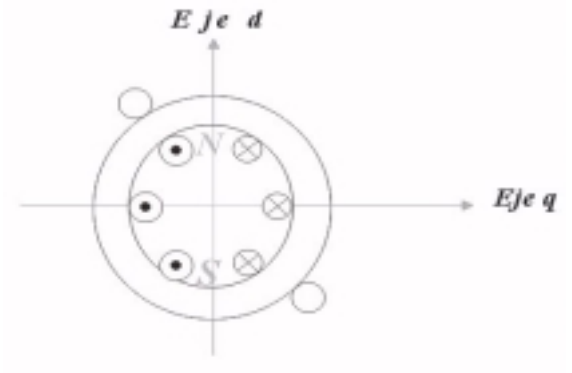



**Figura** *7.5.10*

#### *7.5.5.2 REACTANCIA SÍNCRONA DE LA MÁQUINA DE ROTOR CILÍNDRICO*

*La máquina puede representarse mediante una fuente ideal de tensión "E" en serie con la resistencia "$r_a$" del arrollamiento de armadura de la máquina y una reactancia "Xs" denominada reactancia síncrona:*

$$\begin{cases} X_A = \text{ reactancia de reacción de ramadura} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X_S \end{cases}$$

*adura*

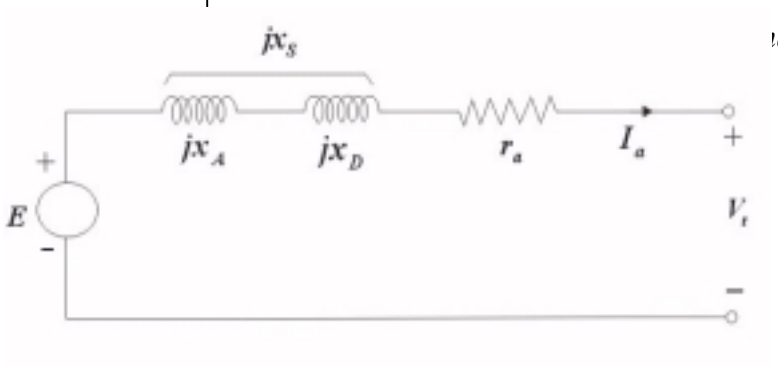


***Figura** 7.5.11*

*La suma de las dos nos dá la reactancia síncrona.*

$$X_S = X_A + X_D \quad .....(7-153)$$

***Reactancia de Dispersión:***
*Toma en cuenta el flujo de dispersión de la armadura, es decir el flujo que no logra concatenarse con el rotor. Esta reactancia es generalmente pequeña.*

***Reactancia de Reacción de Armadura:***
*Toma en cuenta el flujo correspondiente al campo giratorio de reacción de armadura el cual se combina con el flujo del rotor para dar el flujo resultante en el entrehierro que produce la tensión "$E_R$" llamada "tensión de entrehierro, es decir:*

$$\overline{E}_R = \overline{E} - jX_A \overline{I}_a \quad .....(7-154)$$

*Esto puede verse en el siguiente diagrama:*

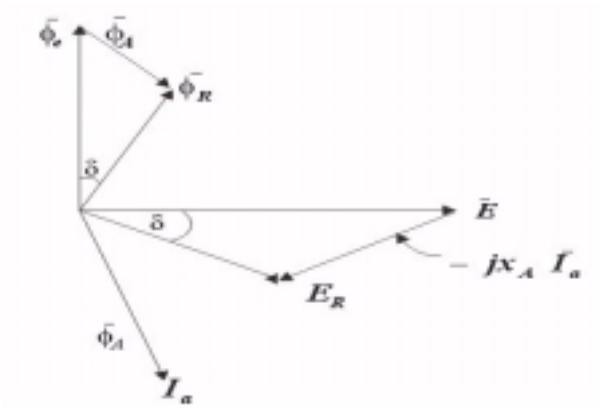



***Figura** 7.5.12*

*La reactancia de reacción de armadura depende de la reluctancia del circuito magnético compuesto por el rotor, el estator y el entrehierro ($L = \frac{N^2}{\Re}$).*

*Debido al entrehierro ésta reluctancia es relativamente alta y se mantiene constante, mientras no se sature el circuito magnético, por lo tanto la reactancia "no saturada" es prácticamente constante.*

*Cuando el circuito magnético se satura la reluctancia aumenta y se vuelve variable por lo que la reactancia saturada disminuye de valor así como aumenta la saturación.*

*Existen dos reactancias síncronas:*

- *La no saturada* $X_{Sg}$ .
- *La saturada* $X_S$ .

### *7.5.5.3 CIRCUITO EQUIVALENTE DE LA MAQUINA DE ROTOR CILINDRICO*

*En la práctica la máquina se representa con la impedancia* $Z_S$ *que está compuesta por la resistencia de armadura , la reactancia de dispersión y la reactancia de reacción de armadura:*

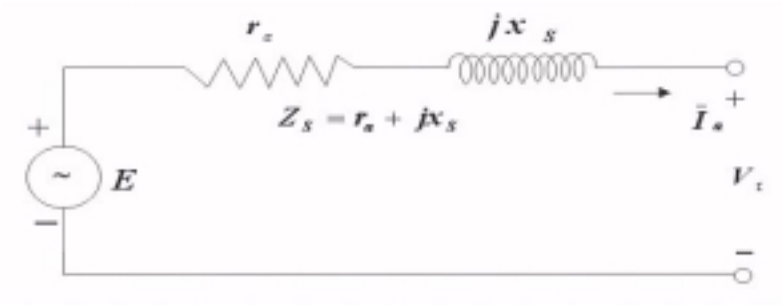
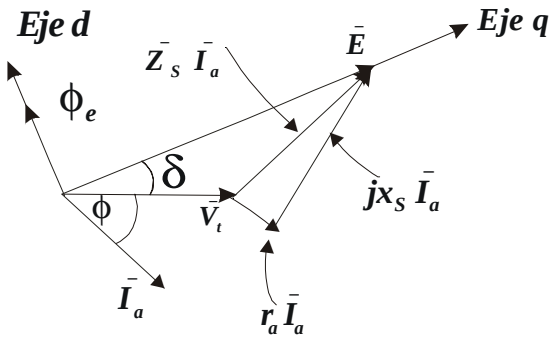



**Figura** *7.5.13*

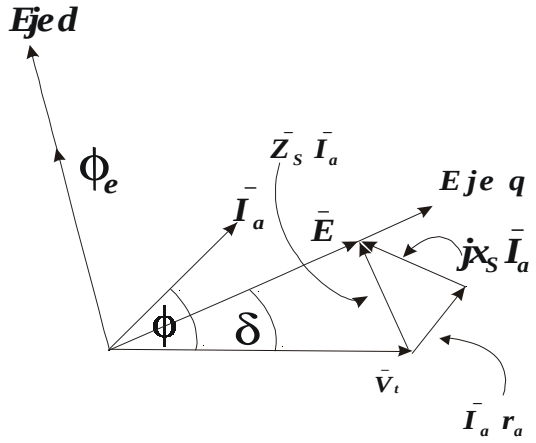
*Ecuación y Diagrama Fasorial:*
*Aplicando Kirchoff podemos escribir:*

$$\overline{E} = \overline{V}_t + \overline{Z}_S \overline{I}_a$$
$$\overline{E} = \overline{V}_t + (r_a + jX_S)\overline{I}_a \quad .....(7-155)$$

*A partir de ésta ecuación se construye el diagrama fasorial de la máquina de rotor cilíndrico en régimen estable.*
*Se asume que la corriente* $\overline{I}_a$ *está atrasada un ángulo* $\phi$ *(menor de 90°) con respecto a la tensión* $V_t$ .




***(a)***



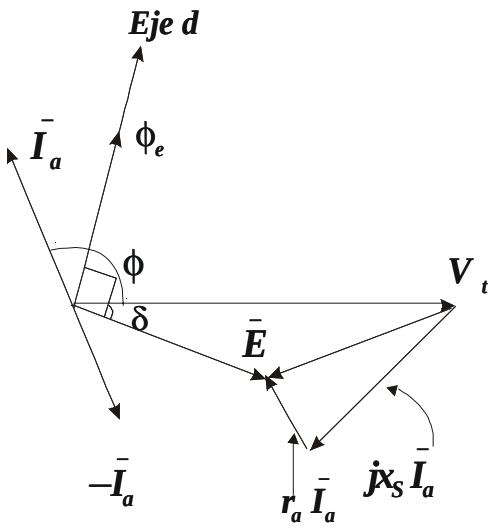

**(b)**

**Figura** *7.5.14*

*Cuando la corriente $\bar{I}_a$ está adelantada de un ángulo $\phi$ (menor de 90°), la máquina sigue funcionando como generador. Ver Figura 7.5.14b. La F.e.m que se obtiene $\bar{E}$ está adelantada el ángulo de torque "$\delta$" con respecto a la tensión en los bornes $\bar{V}_t$ ya que la máquina está funcionando como generador.*

*En la figura 7.5.14b, la f.e.m. $\bar{E}$ sigue en adelanto el ángulo "$\delta$" sobre $\bar{V}_t$, pero la magnitud de $\bar{E}$ ha disminuido ya que requiere menos excitación para mantener la tensión $\bar{V}_t$ .*

*En el caso (a) se dice que la máquina está sobreexcitada mientras que en el segundo caso se dice que la máquina está subexcitada.*




**(a)**

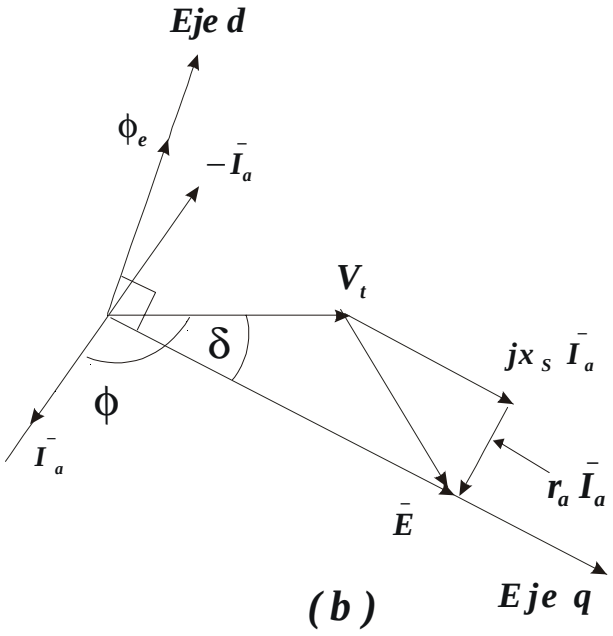



**Figura** *7.5.15*

*Cuando la corriente $\bar{I}_a$ está adelantada ó atrazada de más de 90° la máquina funciona como motor, ya que en realidad está absorviendo la corriente -$\bar{I}_a$.*

*$\bar{E}$ resulta atrazada el ángulo "$\delta$" con respecto a $\bar{V}_t$. En (a) el motor está subexcitado y en (b) está sobreexcitado.*

*En (a) el motor trabaja con f.d.p. inductivo, mientras que en (b) trabaja con f.d.p. capacitivo.*

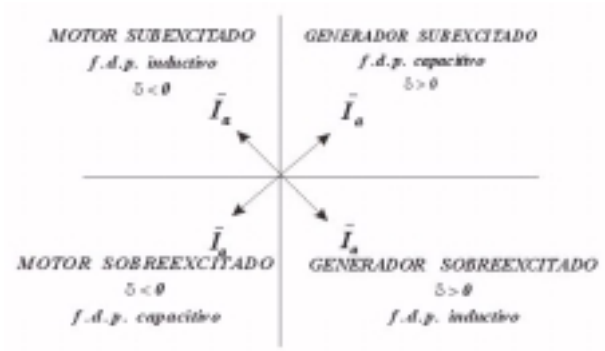



**Figura** *7.5.16*

***EJEMPLO 6 .-*** *Un generador síncrono 3$\phi$ de rotor cilíndrico de 100 KVA – 250 V, tiene una impedancia síncrona :*

$$\bar{Z}_S = r_a + jX_S = 0{,}06 + j0{,}25\,\frac{\Omega}{fase}$$

*Determinar su regulación a tensión de plena carga con factor de potencia unitario y 0,8 inductivo.*

*SOLUCIÓN:*
*a) regulación a* $\cos\theta = 1$

*La corriente* $I_a$ *a plena carga será :*

$$I_a = \frac{P_N}{\sqrt{3}V_n} = \frac{100\times 10^3}{\sqrt{3}\times 250} = 230{,}94\ Amps$$

*Tomando* $V_t$ *como fasor de referencia tendremos el siguiente Diagrama fasorial.*

$$\overline{I}_a = 230\underline{|0°}$$

$$\overline{V}_t = \frac{250\underline{|0°}}{\sqrt{3}}$$

*Entonces:*

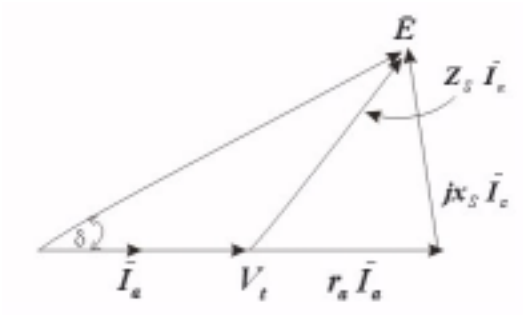



**Figura** *E6.1*

$$\overline{E} = \overline{V}_t + \overline{Z}_S\overline{I}_a = \frac{250\underline{|0°}}{\sqrt{3}} + (0{,}06 + j0{,}25)\times 230{,}94\underline{|0°}$$

$$\overline{E} = 144{,}337\underline{|0°} + 0{,}257\underline{|76{,}504°}\times 230{,}94\underline{|0°} = 168{,}4\underline{|20{,}05°}$$

*La regulación porcentual será:*

$$r = \frac{E - V_t}{V_t}\times 100\% = \left(\frac{168{,}4 - 144{,}34}{144{,}34}\right)\times 100\% = 16{,}6\%$$

*b) regulación a* $\cos\theta = 0{,}866$ *inductivo*

*Tenemos el siguiente diagrama fasorial:*

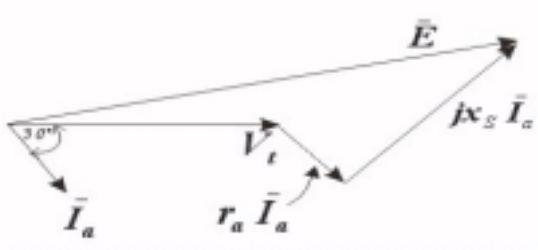



**Figura** *E6.2*

$$V_t = \frac{250\underline{|0°}}{\sqrt{3}} = 144{,}337\underline{|0°}$$

$$\bar{I}_a = 230{,}94\angle -30°$$

$$\bar{E} = \frac{250\angle 0°}{\sqrt{3}} + (0{,}06 + j0{,}25) \times 230{,}94\angle -30° = 190\angle 13°$$

$$r = \left(\frac{190 - 144}{144}\right) \times 100\% = 32\%$$

***EJEMPLO 7 .-*** *Un generador síncrono 3ϕ de rotor cilíndrico de 50 MVA 20 KV está conectado a una barra infinita de 20 KV y entrega a la red 32 MW a un f.d.p. de 0,8 (inductivo). La reactancia de la máquina es $X_d$ = 1,25 p.u. y su resistencia es despreciable. Se pide :*

*a) Determinar la f.e.m. "E" de la máquina, el ángulo de potencia y la corriente **I** que entrega la máquina.*
*b) Si se aumenta el f.d.p. a 1 , actuando sobre la excitación, determinar la potencia activa, el ángulo de potencia, la corriente y la f.e.m. de la máquina.*

*SOLUCIÓN:*

*La reactancia de la máquina será:*

$$X_d = \frac{V_N^2}{S_N} X_{dp.u} = \frac{20^2}{50} \times 1{,}25 = 10 \frac{\Omega}{fase}$$

*a) La corriente que entrega la máquina a la red será:*

$$I_a = \frac{p}{\sqrt{3} V_L \cos\theta} = \frac{32 \times 10^6}{\sqrt{3} \times 20 \times 10^3 \times 0.8} = 1160 \text{ Amps}$$

*Tomando el factor "$\bar{I}_a$" como referencia podemos construir el diagrama fasorial:*

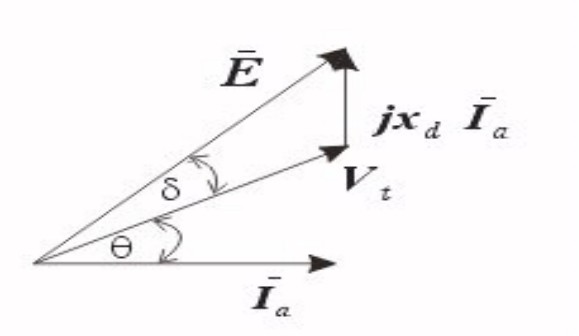



***Figura*** *E7.1*

$$V = \text{tensión barra infinita} = \frac{20}{\sqrt{3}} KV$$

$$\theta = arc\cos 0{,}8 = 36{,}8°$$

$$\overline{E} = \overline{V}_t + jX_d\overline{I}_a = \frac{20\angle 36{,}8°}{\sqrt{3}} + j10\times 1160\times 10^{-3}$$

$$\overline{E} = \frac{35{,}9\angle 63{,}5°}{\sqrt{3}}$$

*Tambien:* $\theta + \delta = 63{,}5°$

$$\delta = 63{,}5° - 36{,}8° = 26{,}7°$$

*b) La potencia activa no puede variar , ya que no se acciona la máquina prima.*

$$P = 32\,MWatts$$

*La corriente disminuirá ya que se mejora el f.d.p. :*

$$I_a = \frac{P}{\sqrt{3}V_L\cos\theta} = \frac{32\times 10^6}{\sqrt{3}\times 20\times 10^3} = \frac{1{,}6\times 10^3}{\sqrt{3}} = 920\ Amps$$

*Para determinar "E" y "δ" podemos utilizar el diagrama fasorial siguiente:*

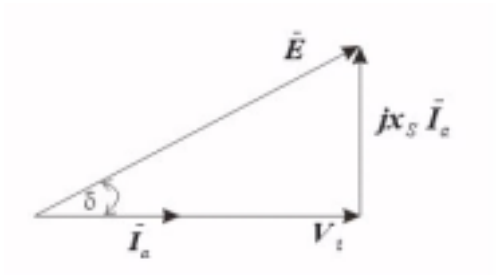



**Figura** *E7.2*

$$X_d\overline{I}_a = 10\times\frac{1.6}{\sqrt{3}}\times 10^3 = \frac{16}{\sqrt{3}}\times 10^3 = \frac{16}{\sqrt{3}}Kv$$

$$tag\delta = \frac{X_d I_a}{V} = \frac{\frac{16}{\sqrt{3}}}{\frac{20}{\sqrt{3}}} = 0{,}8$$

$$\delta = 38{,}5°$$

$$E = \frac{V}{\cos\delta} = \frac{20}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{0{,}782} = \frac{25{,}5}{\sqrt{3}}KV$$

$$E_L = 25{,}5\,KV$$

### *7.5.5.4 CARACTERÍSTICAS INTERNAS DE LA MÁQUINA SÍNCRONA*

*Mediante las pruebas de circuito abierto y de cortocircuito se obtienen las curvas características de circuito abierto y curva de cortocircuito respectivamente. Estas curvas permite determinar, entre otras cosas la reactancia síncrona saturada y no saturada.*

#### *a) PRUEBA Y CARACTERÍSTICA DE CIRCUITO ABIERTO*

- *La máquina trabaja sin carga a velocidad nominal.*
- *Variando su excitación se puede medir la tensión generada $E_L$.*
- *Se puede trazar una curva $E = f(I_e)$ muy similar a la curva de magnetización de la máquina de corriente continua.*
- *Esta prueba permite tambien determinar las pérdidas rotacionales de la máquina.*
- *Las pérdidas rotacionales será la potencia absorvida por la máquina cuando haya sido excitada hasta obtenerse la tensión nominal.*

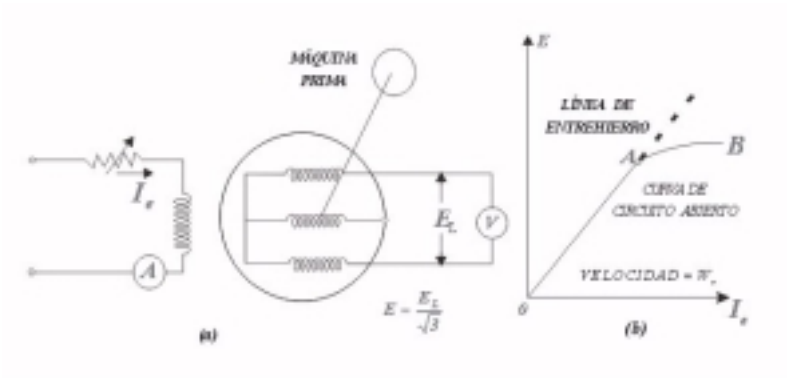



**Figura** *7.5.17*

#### *b) PRUEBA Y CARACTERÍSTICA DE CORTOCIRCUITO :*

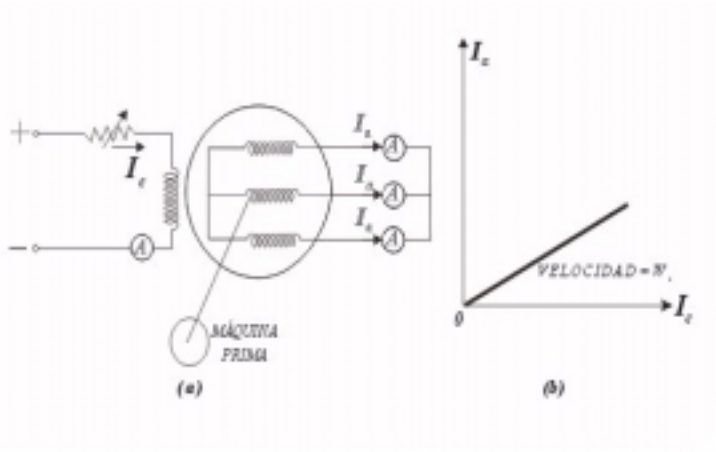



**Figura** *7.5.18*

- *Se hace girar la máquina a velocidad nominal con sus terminales en cortocircuito.*
- *Variando la excitación se mide la corriente de armadura.*
- *La corriente de armadura no debe superar el doble de la corriente nominal para no dañar el arrollamiento.*
- *La curva es una recta.*
- *Haciendo* $V_t = 0$

$$\overline{E} = (r_a + jX_S)\overline{I}_a \quad .....(7-156)$$

$$\overline{E}_R = (r_a + jX_d)\overline{I}_a \quad .....(7-157)$$

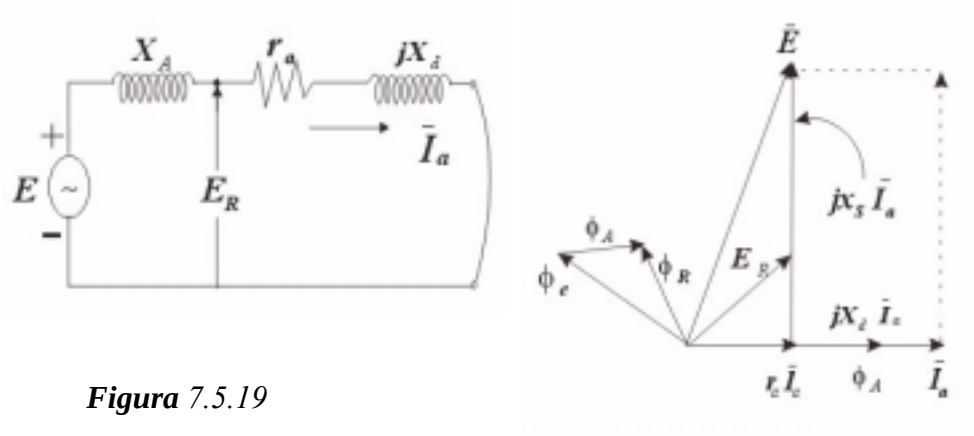



***Figura*** *7.5.19*

*La potencia absorvida por la máquina en éstas condiciones está representada únicamente por las pérdidas mecánicas y las pérdidas en el cobre. Las pérdidas en el cobre así determinadas incluyen el efecto Skin y por lo tanto incluyen una parte importante de las pérdidas dispersas.*

### *7.5.5.5 DETERMINACIÓN DE LA REACTANCIA SÍNCRONA DE LA MÁQUINA DE ROTOR CILÍNDRICO*

*Las pruebas de cortocircuito y de circuito abierto permiten determinar la reactancia síncrona no saturada y saturada de la máquina.*
*Para eso se grafican las dos curvas en un mismo plano cartesiano en el que se ha tomado como abscisa la corriente de excitación y como ordenadas la tensión de circuito abierto y la corriente de cortocircuito respectivamente.*

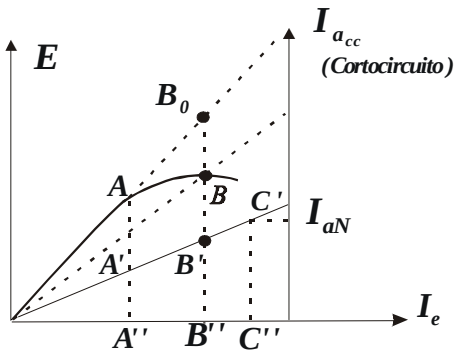



**Figura** *7.5.20*

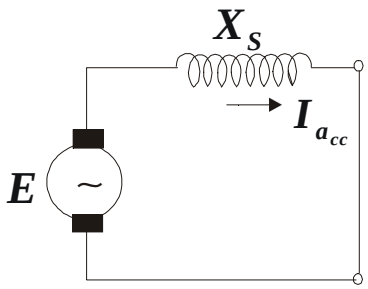



**Figura** *7.5.21*

*La máquina en cortocircuito puede ser representada como sigue si se desprecia su resistencia interna podemos escribir:*

$$X_S = \frac{E}{I_{a_{cc}}} \quad .....(7-158)$$

*$E$ y $I_{a_{cc}}$ deben corresponder a una misma corriente de excitación.*

- *En el tramo lineal de la curva de* **E**, *desde* **0** *hasta* **A** *obtendremos siempre el mismo valor para $X_S$, ya que ambas curvas son lineales. La reactancia así determinada de denomina reactancia síncrona no saturada. .*

$$X_S(no\ saturada) = \frac{AA''}{A'A''} = \frac{B_0B''}{B'B''} \quad .....(7-159)$$

- *A partir del punto* **A**, *la reactancia síncrona comienza a variar y tendrá un valor diferente en cada punto de la curva de tensión en vacío.*

$$X_S(saturada) = \frac{BB''}{B'B''} = \frac{V_N}{B'B''} \quad .....(7-160)$$

*Comparando ambas ecuaciones se puede ver:*

$$X_S(no\ saturada) > X_S(saturada)$$

*En la práctica la reactancia síncrona que se emplea en los cálculos es la saturada ya que la máquina normalmente trabaja saturada.*

***RELACIÓN DE CORTOCIRCUITO***

*Se define la relación de cortocircuito como la relación entre la corriente de excitación que produce la tensión nominal en circuito abierto y la corriente de excitación que produce la corriente de armadura nominal en cortocircuito.*

*De la figura:* $$R_{cc} = \frac{OB''}{OC''} \quad .....(7-161)$$

*Se demuestra que:*

$$R_{cc} = \frac{1}{X_S(p.u)} \quad .....(7-162)$$

$$R_{cc} = \frac{OB''}{OC''} = \frac{B'B''}{C'C''} = \frac{B'B''}{I_{aN}} \quad .....(7-163)$$

$$Z_B = \frac{V_N}{I_{aN}} \quad .....(7-164)$$

$$X_S(p.u) = \frac{X_S}{Z_B} = \frac{V_N}{B'B''}\frac{I_{aN}}{V_N} = \frac{I_{aN}}{B'B''} \quad .....(7-165)$$

### *7.5.5.6 CARACTERÍSTICAS BAJO CARGA DE LA MÁQUINA SÍNCRONA*

*Las principales características de operación de la máquina son las que interrelacionan la tensión en los terminales, la corriente de armadura, la corriente de excitación y el factor de potencia.*

***CURVA DE TENSIÓN BAJO CARGA EN FUNCIÓN DE LA CORRIENTE DE ARMADURA O DE LA POTENCIA SUMINISTRADA A LA CARGA A EXCITACIÓN Y f.d.p. CONSTANTES.***

*Pueden trazarse varias curvas para diferentes f.d.p. de la carga. Estas curvas son muy importantes para los generadores y generalmente se grafican en valores porcentuales, tomándose como bases la tensión nominal y la potencia que la máquina entrega a plena carga.*

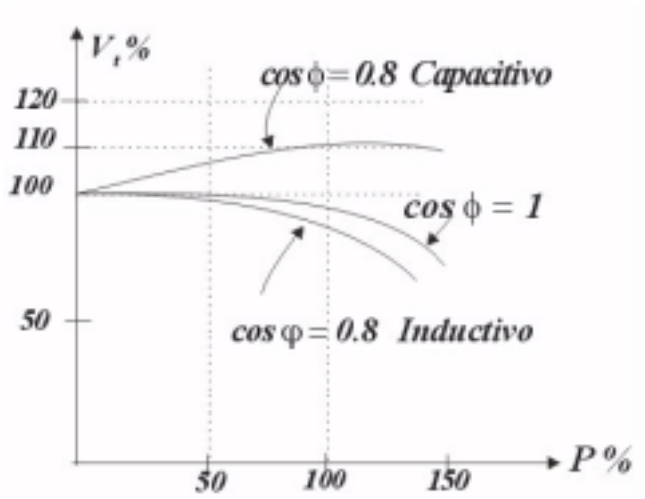


***Figura*** *7.5.22*

- *Con factores de potencia capacitivos la tensión tiende a subir por el efecto aditivo de la reacción de armadura que se suma al campo producido por el rotor.*
- *Con estas curvas se puede determinar fácilmente la regulación de la máquina.*

### *7.5.5.7 CURVA DE LA CORRIENTE DE EXCITACÍON EN FUNCIÓN DE LA CORRIENTE DE ARMADURA O DE LA POTENCIA SUMINISTRADA A LA CARGA, PARA MANTENER LA TENSIÓN NOMINAL EN LOS TERMINALES DEL GENERADOR.*

- *El factor de potencia se mantiene constante y pueden trazarse una familia de curvas, asumiendo diferentes f.d.p.*

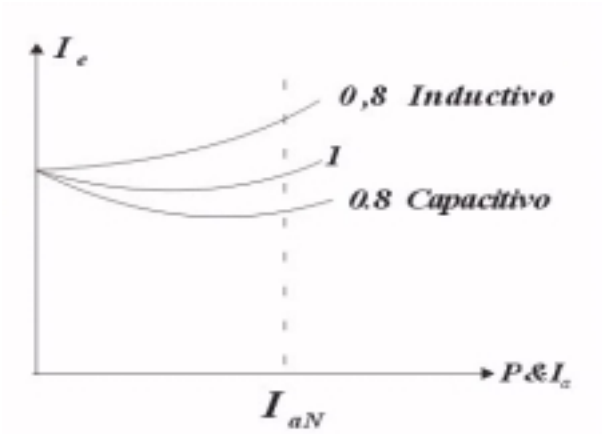



***Figura*** *7.5.23*

*Es intersante observar que con cargas inductivas hay que sobreexcitar la máquina para mantener la tensión constante cuando la carga aumente, mientras que con cargas capacitivas hay que reducir la excitación.*

### *7.5.5.8 CURVAS "V" DE LOS MOTORES SÍNCRONOS*

*La curva "V" relaciona la corriente de armadura del motor con la corriente de excitación para una carga en el eje constante. Puede trazarse una familia de curvas para diferentes cargas en el eje.*

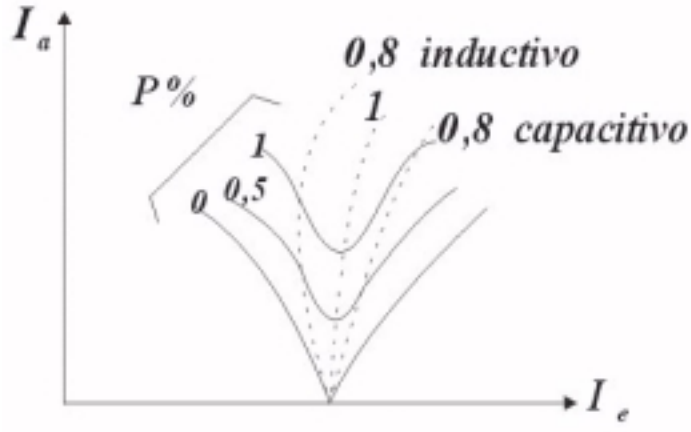


**Figura** *7.5.24*

- *En estas curvas el punto mínimo corresponde al funcionamiento con f.d.p. unitario.*

- *Las líneas de trazo punteado representan lugares geométricos de f.d.p. constante. El correspondiente a f.d.p. unitario se obtiene uniendo los puntos mínimos de las curvas "V".*

- *Las curvas "V" se emplean para determinar la corriente de excitación necesaria para mantener el f.d.p. constante cuando varía la carga en el eje del motor.*

### *7.5.5.9 ECUACIÓN POTENCIA – ÁNGULO DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE ROTOR CILÍNDRICO*

*Supongamos que una máquina síncrona está conectada a una barra infinita de tensión $V_t$.*

*Despreciando la resistencia de armadura y suponiendo que la línea de conexión tenga una reactancia $X_\ell$ , el ciruito equivalente será como el mostrado:*

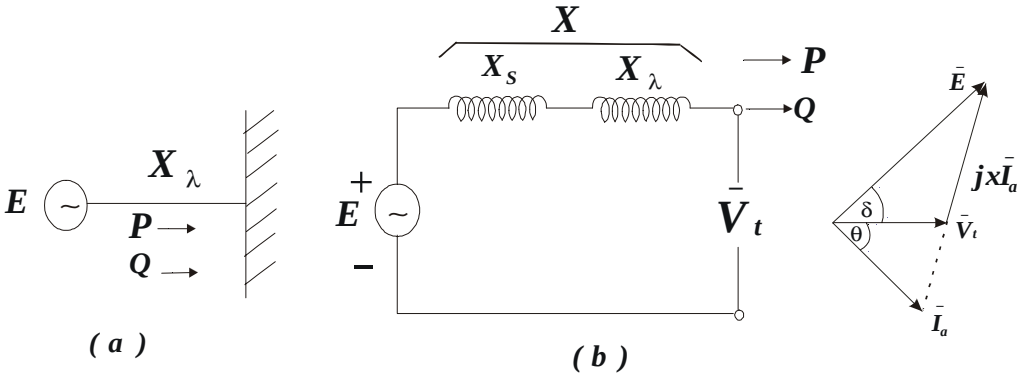



**Figura** *7.5.25*

*Reemplazando las reactancias $X_S$ y $X_\ell$ por una sola reactancia $X$ y suponiendo que la corriente $\bar{I}_a$ que entrega la máquina está atrasada un ángulo $\theta$ con respecto a $V_t$ , es decir que la máquina funciona como generador a f.d.p. inductivo.*

- *El problema consiste en determinar la potencia activa y reactiva que la máquina entrega a la red.*

$$\overline{S} = P + jQ = \overline{V}_t \cdot \overline{I}_a^* \quad .....(7-166)$$

*Del diagrama fasorial:*

$$\overline{I}_a = \frac{\overline{E} - \overline{V}_t}{\overline{X}} \quad .....(7-167)$$

*Luego:*

$$\overline{S} = \overline{V}_t \left( \frac{\overline{E}^* - \overline{V}_t^*}{\overline{X}^*} \right) \quad .....(7-168)$$

*De acuerdo al diagrama fasorial:*

$$\overline{V}_t = V_t \underline{|0°}, \quad \overline{E} = E \underline{|\delta}$$

*Entonces:*

$$\overline{S} = \frac{V_t \left( E \underline{|-\delta} - V_t \right)}{-jX} \quad .....(7-169)$$

$$\overline{S} = j \frac{EV_t \cos\delta - jEV_t sen\delta - V_t^2}{X} \quad .....(7-170)$$

$$\overline{S} = \frac{EV_t}{X} sen\delta + j \frac{EV_t cos\delta - V_t^2}{X} \quad .....(7-171)$$

*Entonces:*

$$P = \frac{EV_t}{X} sen\delta \quad .....(7-172)$$

$$Q = \frac{EV_t \cos\delta - V_t^2}{X} \quad .....(7-173)$$

*La ecuación 7-172 es llamada ecuación potencia – ángulo de la máquina y nos indica claramente que la potencia activa depende del ángulo de torque ó de potencia* $\delta$.

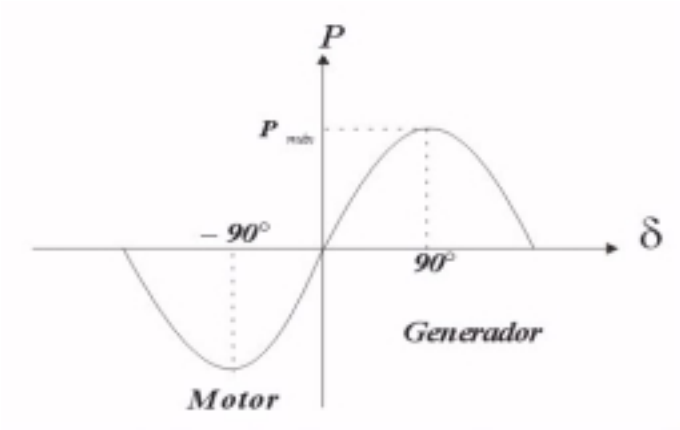


***Figura** 7.5.26*

- *Para valores positivos de δ la máquina funciona como generador y la potencia es máxima para δ=90°.*

$$P_{máx} = \frac{EV_t}{X} \quad .....(7-174)$$

- *Para valores negativos de δ la máquina funciona como motor.*

$$|T| = (p')^2 \frac{\pi}{2} \phi_R F_e sen\delta \quad .....(7-175)$$

- *Vemos que ambos tienen la misma forma, es decir, ambos dependen de sen δ.*

- *A velocidad constante la potencia es proporcional al torque.*

$$P = T\omega_S \quad .....(7-176)$$

### *7.5.5.10 EFICIENCIA*

*La eficiencia de la máquina síncrona se calcula de la misma manera que la máquina de corriente continua. Las pérdidas que se deben considerarse son las siguientes:*

*a) Las Pérdidas Rotacionales :*
*a.1) Pérdidas mecánicas por fricción y ventilación.*
*a.2) Pérdidas en el hierro.*

*b) Las Pérdidas Eléctricas:*
*b1) Pérdidas por efecto Joule en el campo.*
*b2) Pérdidas por efecto Joule en la armadura.*

*c) Las Pérdidas Dispersas.*

### *a) LAS PÉRDIDAS ROTACIONALES :*

*Estas pérdidas incluyen las pérdidas por fricción y ventilación y las pérdidas en el hierro por histéresis y Foucault producidas por la variación del flujo magnético en el estator.*

*Las pérdidas mecánicas se pueden determinar accionando el generador no excitado con un pequeño motor auxiliar y midiendo la potencia absorvida por*

*éste último. Deduciendo de ésta potencia las pérdidas propias del motor auxiliar se tendrán las pérdidas mecánicas del generador.*

*Si se repite la prueba con la máquina excitada a la tensión nominal se obtiene las pérdidas rotacionales. La diferencia entre ambos resultados nos dará las pérdidas en el hierro. Según Norma ASA las pérdidas en el hierro se calculan a la tensión nominal más la caída óhmica a plena carga de la armadura.*

### *b) LAS PÉRDIDAS ELÉCTRICAS:*

*Consisten en las pérdidas por efecto JOULE en los arrollamientos de campo y de armadura. No se incluyen las pérdidas en el reóstato de campo ní tampoco la potencia absorvida por la excitatriz.*

*Pérdidas en el campo:*

$$\Delta W_e = R_e I_e^2 = V_0 I_e \quad .....(7-177)$$

*Pérdidas en la armadura:*

$$\Delta W_a = 3R_{a_{DC}} I_a^2 \quad .....(7-178)$$

*Debe emplearse la resistencia en corriente continua a 75 ° C.*

$$R_{aAC} = (1.3-1.5)R_{aDC} \quad .....(7-179)$$

*Si se emplea en los cálculos* $R_{a_{AC}}$*, estaríamos incluyendo también las pérdidas por efecto* **Skin** *y por corrientes parásitas de Foucault en los conductores que forman las pérdidas dispersas.*

### *c) LAS PÉRDIDAS DISPERSAS:*

*Estas pérdidas incluyen básicamente el efecto Skin en los conductores y las pérdidas por corrientes parásitas en el fierro. También incluyen las pérdidas producidas por el flujo de dispersión de la armadura y la distorsión del flujo magnético.*

*Se pueden determinar mediante la prueba de cortocircuito de la máquina. La potencia absorvida por la máquina en dicha prueba incluye las pérdidas dispersas. No figuran las pérdidas en el hierro por ser el flujo resultante muy pequeño.*

## *7.6 CONTROL DE VELOCIDAD DE MOTORES SÍNCRONOS*

*La velocidad de un motor síncrono puede ser controlado cambiando la frecuencia de la fuente de suministro de potencia. En cualquier frecuencia fijada la velocidad se mantiene constante , aún al estar cambiando las condiciones de la carga, a menos que el motor pierda sincronismo. El motor síncrono es por ésta razón muy usado para el control exacto de velocidad y también diversos motores trabajan en sincronismo. Un motor síncrono puede correr a alto factor de potencia y eficiencia ( no debido a pérdidas de potencia*

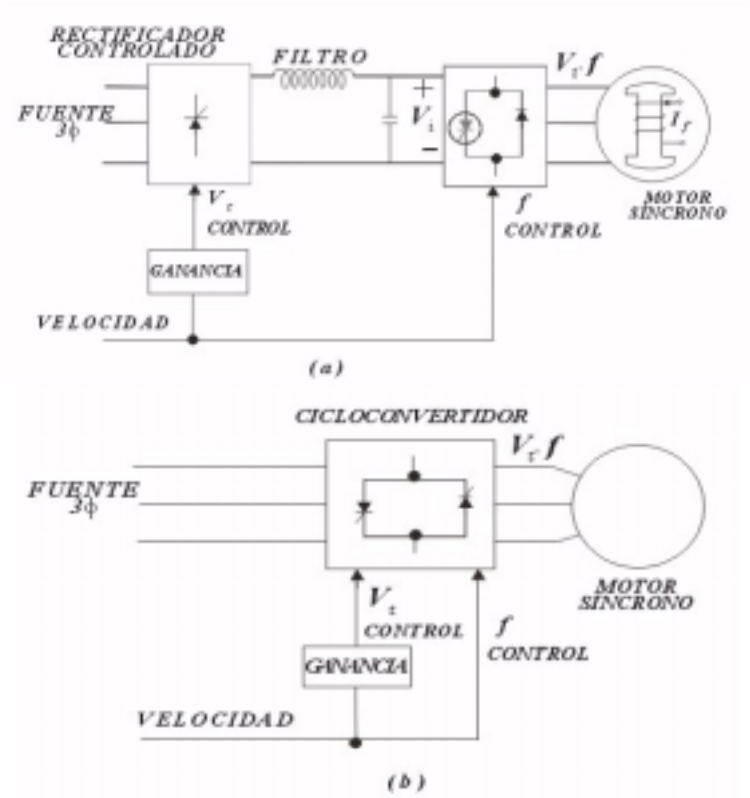
*por deslizamiento como en los motores de inducción). En el presente, se ha ido incrementando considerablemente su uso en dispositivos de velocidad variable.*

*Dos tipos de métodos de control de velocidad están normalmente en uso. En uno de los métodos la velocidad es directamente controlada por cambio del voltaje de salida y frecuencia de un inversor ó cicloconvertidor. En el otro método la frecuencia es automáticamente ajustada por la velocidad del motor y el motor es llamdado un motor síncrono "autocontrolado".*

### *7.6.1 CONTROL POR FRECUENCIA*

*Los diagramas esquemáticos para el control de velocidad por lazo – abierto de un motor síncrono cambiando la frecuencia y el voltaje de salida de un inversor ó un cicloconvertidor es mostrada en la figura 7.6.1.*

*El circuito del inversor permite la variación de frecuencia (por ende la velocidad del motor) sobre un amplio rango, diferente hecho del circuito del cicloconvertidor (figura 7.6.1b) que permite la variación de frecuencia debajo de un tercio de la fuente de frecuencia.*




*Control por frecuencia en lazo abierto.*
***Figura** 7.6.1*

*Para obtener el mismo torque máximo sobre todo el rango de variación de velocidad y también para evitar la saturación magnética en la máquina, es necesario cambiar el voltaje con la frecuencia. Sabemos que en una máquina síncrona $3\phi$.*

$$P = T\omega_m = \frac{3V_t E_f}{X_S} sen\delta \quad .....(7-180)$$

*Ahora ,*

$$\omega_m = \frac{4\pi f}{p} \quad .....(7-181)$$

*Tambien:*

$$X_S = 2\pi f L_S \quad .....(7-182)$$

*Si la corriente de campo* $I_f$ *es mantenida constante,* $E_f$ *es proporcional a la velocidad y así:*

$$E_f = K_1 f \quad .....(7-183)$$

*Donde,* $K_1$ *es una constante.*

*Cambiando las ecuaciones anteriores*

$$T = K\frac{V_t}{f} sen\delta \quad .....(7-184)$$

*Donde, K es una constante.*

*Una velocidad base puede ser definida para el cual* $V_t$ *y* $f$ *son los valores establecidos para el motor. Si la relación* $\frac{V_t}{f}$ *correspondiente a esta velocidad base es mantenida a bajas velocidades por cambio del voltaje con la frecuencia, el máximo torque es mantenida igual al que se tiene a la velocidad base* $K\frac{V_t}{f}$.

*La característica torque – velocidad para operación con voltaje variable, frecuencia variable (VVVF) del motor síncrono es mostrada en la figura 7.6.2. Para frenado regenerativo del motor síncrono, el flujo de potencia es en reversa.*

*Note que en el sistema del inversor (figura 7.6.1a), debido a los diodos en el inversor, el voltaje en la entrada del inversor no puede estar en reversa.*

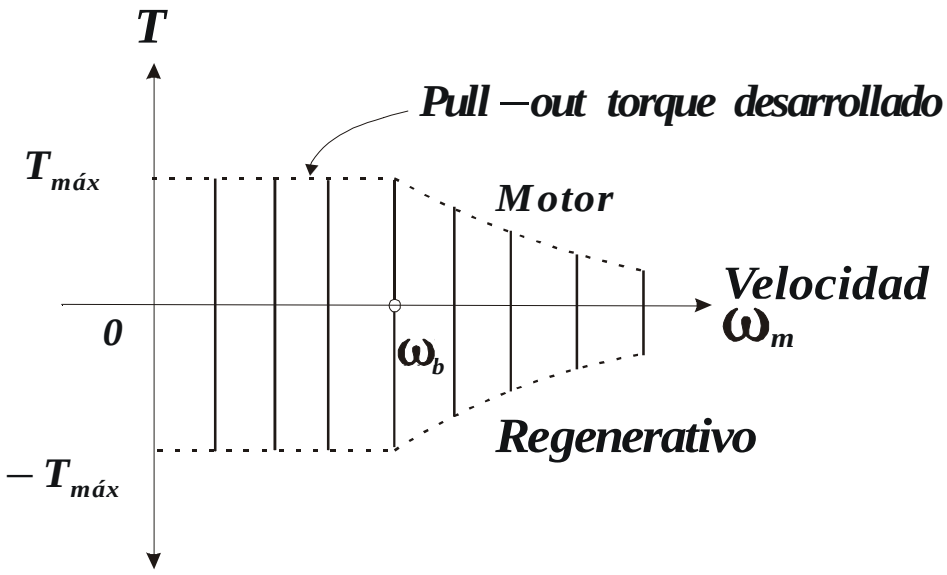
*Por esta razón, para flujos de potencia en reversa, corrientes en reversa. Un convertidor dual es así mostrada en la figura 7.6.3, es por esta razón necesario aceptar el flujo de corriente en reversa en el modo regenerativo de operación. En un ciclo convertidor, sin embargo, el flujo de potencia es reversible.*

*Para variar la velocidad por encima de la velocidad base, la frecuencia es incrementada tanto que se mantiene el voltaje terminal en el valor establecido. Esto, por supuesto, hará que el torque máximo disminuya en el más alto rango de velocidad, como se muestra en la figura 7.6.2.*

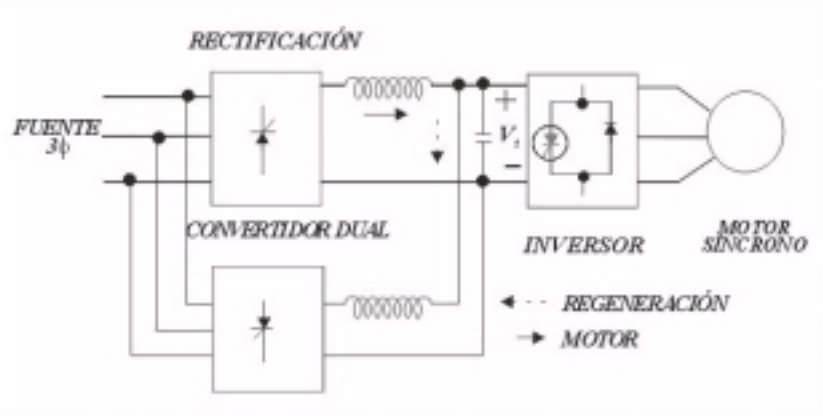
*En la figura 7.6.1a, si el rectificador controlado es reemplazado por un puente de diodos rectificadores, el voltaje de entrada al inversor $V_i$ es constante. El inversor puede ser un inversor (ancho de pulso modulado) PWM así que ambos voltajes y frecuencia de salida pueden ser cambiadas en el inversor.*

*Note que si la frecuencia es súbitamente cambiada a un valor alto, los polos del rotor podrían no estar aptos para seguir al campo rotativo del estator y el motor perderá sincronismo. Por esta razón, el valor al cual la frecuencia es cambiada podría estar restringida.*

*Un cambio súbito en el torque de carga podría también causar que el motor pierda sincronismo. La operación de lazo abierto es por esta razón no usado para aplicaciones en el cual la carga pueda cambiar súbitamente.*




*Caracteristica torque – velocidad de maquinas síncronas.*
**Figura** *7.6.2*




*Controlador con flujo de potencia reversible.*
**Figura** *7.6.3*

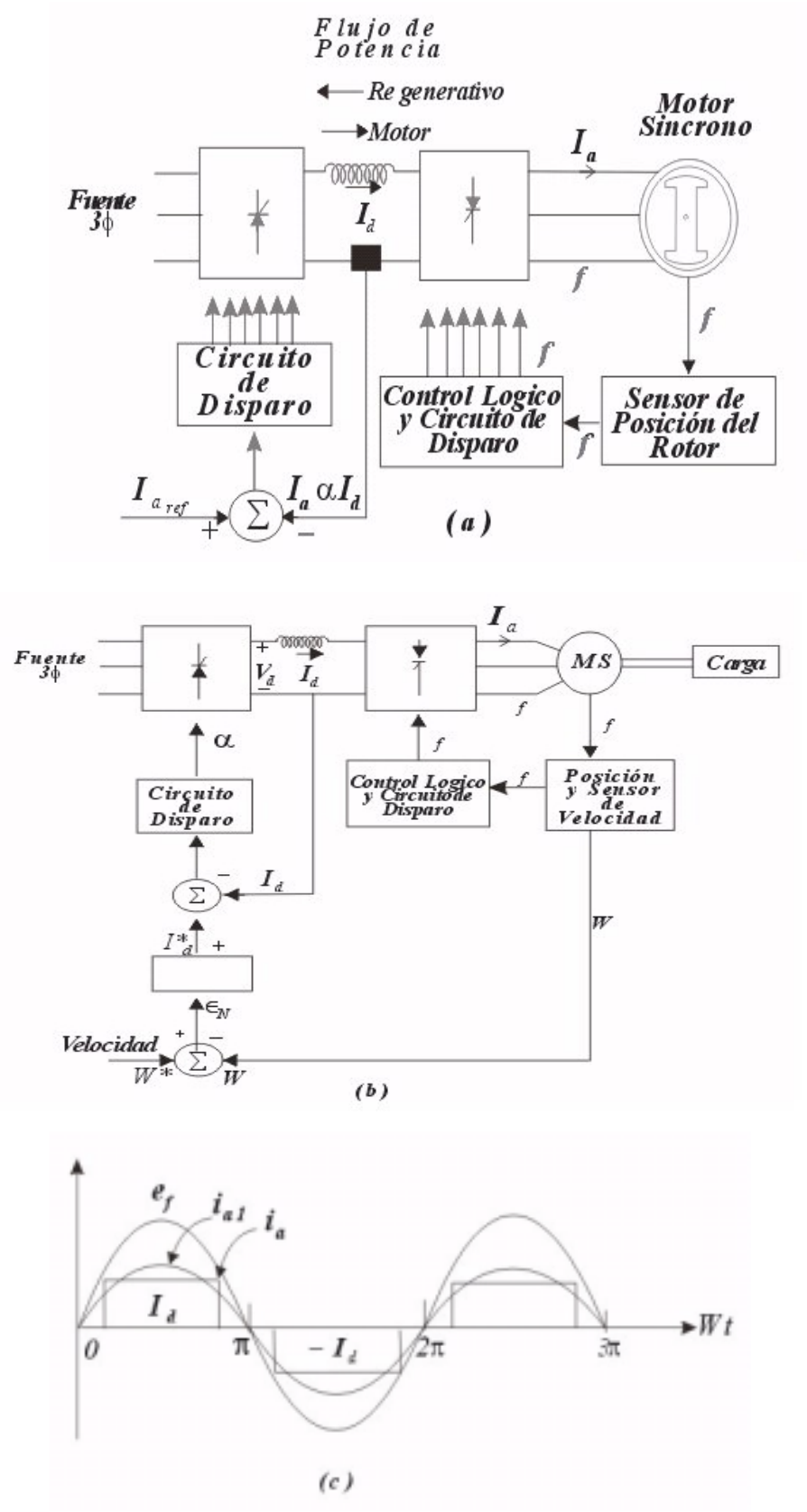
### *7.6.2 MOTOR SÍNCRONO AUTO-CONTROLADO*

*Un motor síncrono tiende a perder sincronismo para cargas bruscas. En el sistema de control de velocidad de lazo abierto discutido anteriormente, si una carga es súbitamente aplicada al rotor momentáneamente baja suave, haciendo el ángulo de torque $\delta$ se incremente más allá de 90° y conduce a perder sincronismo. Sin embargo, si la posición del rotor es sensada así el rotor baja suave y la información es usada para disminuir la frecuencia del estator, el motor permanecerá en sincronismo. Luego la velocidad del rotor ajustará la frecuencia del estator y el sistema es conocido como un motor síncrono auto – controlado.*

*El esquema de un motor síncrono auto – controlado es mostrado en La figura 7.6.4. Dos rectificadores controlados son usados, uno al final de la fuente y el otro al final de la máquina.*
*En el modo motor de operación los rectificadores al final de la fuente operan en el modo de rectificación y los rectificadores al final de la máquina en el modo inversión. Los roles de los rectificadores reversa para frenado regenerativo, en el cual los flujos de potencia están en reversa. Los tiristores en el rectificador al final de la fuente son conmutados por el voltaje de línea de la fuente y estos rectificadores al final de la máquina por el voltaje de excitación de la máquina síncrona. El sensor de posición del rotor, montado en el rotor, genera señales manteniendo informado sobre la posición del rotor. Estas señales son procesadas en circuitos lógicos de control y usado para disparar los tiristores del rectificador del final de la máquina.*

*Por ésta razón, cualquier cambio conveniente en la velocidad del rotor para cambios en la carga inmediatamente cambiará la frecuencia de disparo de los tiristores y por ende ajusta la frecuencia del estator al valor correcto para mantener sincronismo. Un lazo de corriente es implementado alrededor del rectificador al final de la fuente para mantener al corriente de la máquina en el valor deseado. La corriente de enlace DC $I_d$ es proporcional a la corriente de la máquina $I_a$, es comparada con la corriente de referencia, y la señal de error ajusta los disparos del rectificador al final de la fuente para mantener la corriente de armadura constante en el valor de la referencia.*

*El torque depende del valor del ángulo $\zeta$. Este ángulo $\zeta$ puede ser controlada en los circuitos lógicos de control para el rectificador al final de la máquina porque la señal desde el sensor de posición del rotor define la posición del eje de campo y el Instante de disparo de los tiristores define la posición del eje de campo de la armadura. Si el ángulo $\zeta$ es regulado a un valor específico y la corriente de campo es mantenida constante, el torque (y por ende la velocidad ) pude ser directamente controlada por la corriente de armadura. Esta corriente es controlada por el lazo de control de corriente del rectificador al final de la fuente.*




*Motor sincrono auto – controlado*
***Figura** 7.6.4*

*a)Control de lazo abierto b) Control de lazo cerrdao c) Forma de onda de $e_f$ y $i_a$ operación similar al motor DC.*

*Nota:* $$T = -\frac{3p}{2} L_S I_a I'_f sen\zeta$$

*Ambos rectificadores tienen circuitos simples y baratos. Se puede afirmar que éstos sistemas puede ser diseñados para aplicaciones de muy alta potencia – en orden de los Mega watts.*

### *7.6.3 CONTROL DE LAZO CERRADO*

*Cabe notar que en el sistema visto en la figura 7.6.4a, si el torque de carga es cambiada, la velocidad cambiará. Si la velocidad es para ser mantenida constante, la corriente DC de enlace $I_d$ puede ser ajustada apara satisfacer el cambio en el torque de carga. Esto puede ser llevado a cabo insertando desde afuera un lazo de velocidad como se muestra en la figura 7.6.4b.*

*El sensor de posición suministra información acerca del campo del rotor tanto como la velocidad del rotor. Si la velocidad cae es debido a un incremento en el torque de carga del motor síncrono, el error de velocidad $\varepsilon_N$ se incrementa, el cual en vueltas incrementa la demanda de corriente $I_d^*$. Consecuentemente, el ángulo de disparo del rectificador controlado cambiará para alterar la corriente DC de enlace $I_d$ para producir más torque como el requerido debido al incremento del torque de carga.*

*La velocidad eventualmente será restablecido a su valor inicial.*

# *PROBLEMAS RESUELTOS*
# *CAPÍTULO VII*

## *MÁQUINA DE CORRIENTE ALTERNA*

***PROBLEMA N° 7.1 :*** *Se tiene un estator de 36 ranuras, para doble capa en la cual se encontraron bobinas de paso 1-11 con 5 espiras/bobina siendo el tipo de devanado imbricado, conexión estrella.*
*Calcular el factor de paso, el factor de distribución y el número efectivo de vueltas para una de las fases, cuando se tiene:*

*a) Dos polos de 'p' grupos / fase*
*b) Cuatro polos de 'p' grupos fase*

*SOLUCIÓN :*

*a)*

$\# \text{ ranuras} : r = 36$

$\# \text{ bobinas por fase} : \dfrac{b}{q} = \dfrac{36}{3} = 12$

$\# \text{ espiras / bobina} : N_b = 5$

$\# \text{ bobinas por grupo} : m = \dfrac{b/q}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

$\text{Paso de bobina} : 1 - 11$

$\# \text{ bobinas} = \# \text{ ranuras} = 36 = b$

$\text{Paso de grupo} = \delta = \dfrac{r}{2} = 18$

$\# \text{ fases} : q = 3$

$\text{Paso de fase} : E_{3\phi} = \dfrac{r}{3\dfrac{p}{2}} = \dfrac{36}{3 \times \dfrac{2}{2}} = 12$

$\text{Factor de paso} : K_P = sen(\tau' / 2)$

$$\tau = \text{Paso de bobina} \times \gamma = (11 - 1) \times \left( \frac{360°}{36} \right) = 100°$$

$$\tau' = \tau \times \frac{p}{2} = \tau = 100°$$

$$K_P = sen50° = 0{,}766$$

*Factor de Distribución:*

$$K_d = \frac{sen\left( m \times \gamma'/2 \right)}{m \times sen\left( \gamma'/2 \right)} \qquad \gamma' = \gamma \times \frac{p}{2} = \frac{360°}{36} \times \frac{2}{2} = 10°$$

$$K_d = \frac{sen(6 \times 5°)}{6 \times sen5°} = \frac{sen30°}{6 \times sen5°} = 0{,}9561$$

$$N_{efec-vueltas/\ fase} = (\#\ bobinas/\ fase \times \#\ espiras/bobina) \times K_p \times K_d$$
$$N_{efec-vueltas/\ fase} = (12 \times 5) \times 0{,}766 \times 0{,}9561$$
$$\therefore N_{efec-vueltas/\ fase} = 43{,}942 \approx 44$$

*b)*

$$\#\ bobinas\ \ por\ \ fase = \frac{b}{q} = \frac{36}{3} = 12$$

$$\#\ bobinas\ \ por\ \ grupo = m = \frac{12}{p} = \frac{12}{4} = 3$$

$$paso\ de\ grupo = \delta = \frac{r}{p} = \frac{36}{4} = 9$$

$$paso\ de\ \ fase = E_{3\phi} = \frac{r}{3 \times \frac{p}{2}} = \frac{36}{3 \times \frac{4}{2}} = 6$$

$$K_p = sen(\tau'/2)$$

$$\tau' = \tau \times \frac{p}{2} = paso\ de\ bobina \times \gamma \times \frac{p}{2}$$

$$\tau' = 10 \times \frac{360°}{36} \times \frac{4}{2} = 200°$$

$$K_p = sen100° = 0{,}9848$$

*Factor de Distribución:*

$$K_d = \frac{sen\left(m \times \gamma'/2\right)}{m \times sen\left(\gamma'/2\right)}$$

$$\gamma' = \gamma \times \frac{p}{2} = \frac{360°}{36} \times \frac{4}{2} = 20°$$

$$K_d = \frac{sen(3 \times 10°)}{3 \times sen10°} = 0{,}9598$$

$$N_{efec-vueltas/\ fase} = (12 \times 5) \times 0{,}9848 \times 0{,}9598$$

$$N_{efec-vueltas/\ fase} = 56{,}713 \approx 57$$

***PROBLEMA N° 7.2 :*** *Del problema anterior, dibujar la distribución del devanado estatórico para las tres fases indicando el desarrollo del numero de bobinas por grupo y el numero de grupos por fase para :*

*a) Dos polos de ' p' grupo/fase*
*b) Cuatro polos de ' p ' grupo/fase*

*SOLUCIÓN:*

*a) Desarrollo del # de bobinas por grupo :*

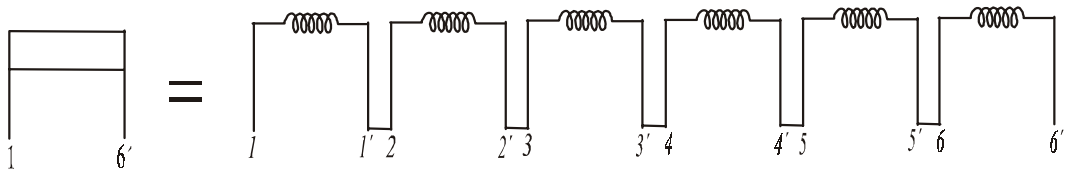



***Figura** P7.2.1*

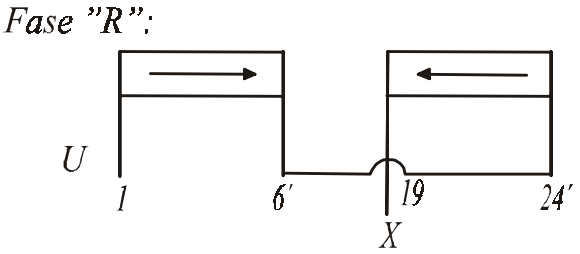



***Figura** P7.2.2*

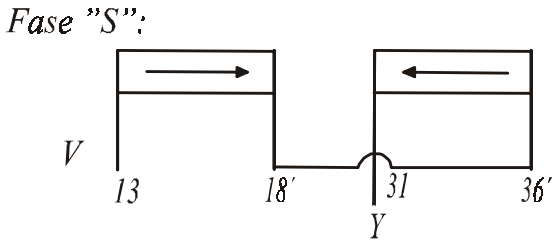



***Figura** P7.2.3*

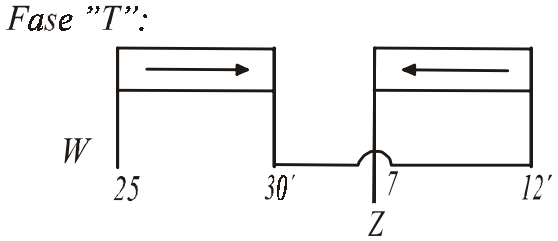



***Figura** P7.2.4*

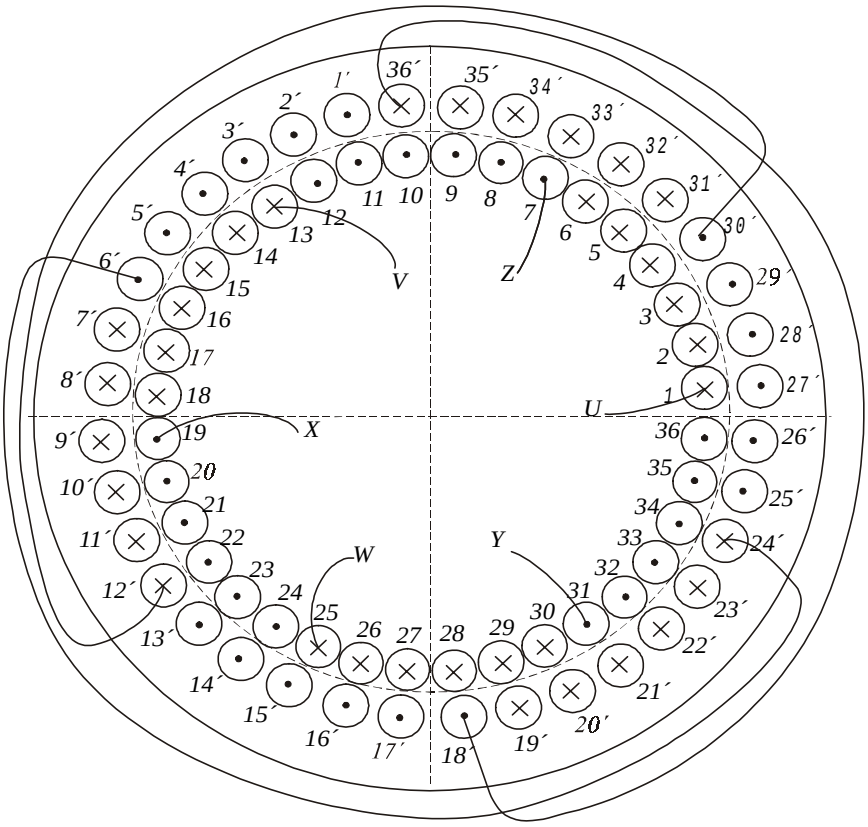



***Figura*** *P7.2.5*

*b) Desarrollo del # de bobinas por grupo :*

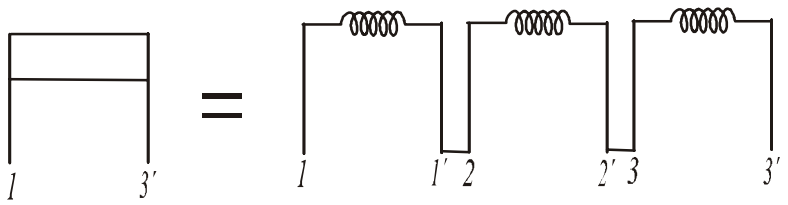



***Figura*** *P7.2.6*

*Fase "R":*

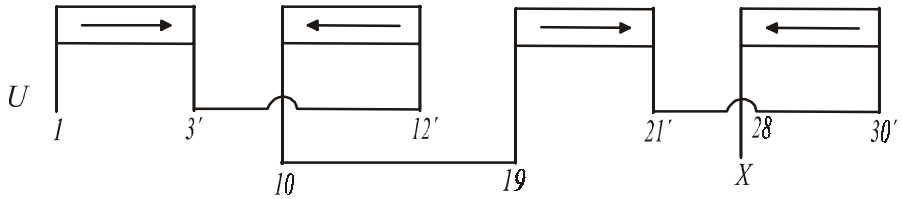



***Figura*** *P7.2.7*

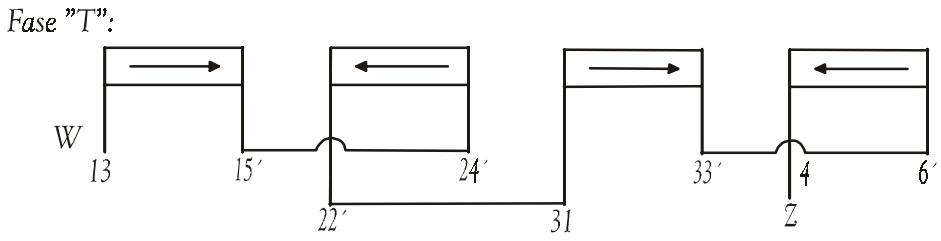



***Figura** P7.2.8*

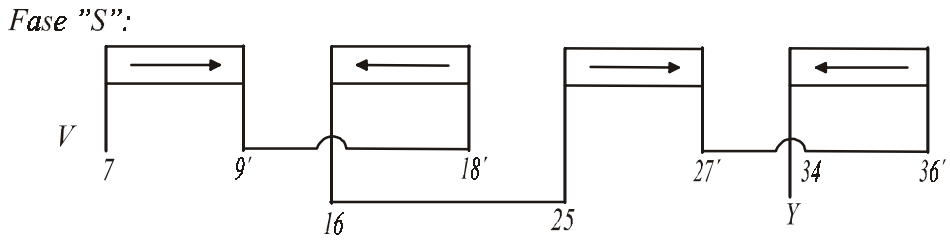



***Figura** P7.2.9*

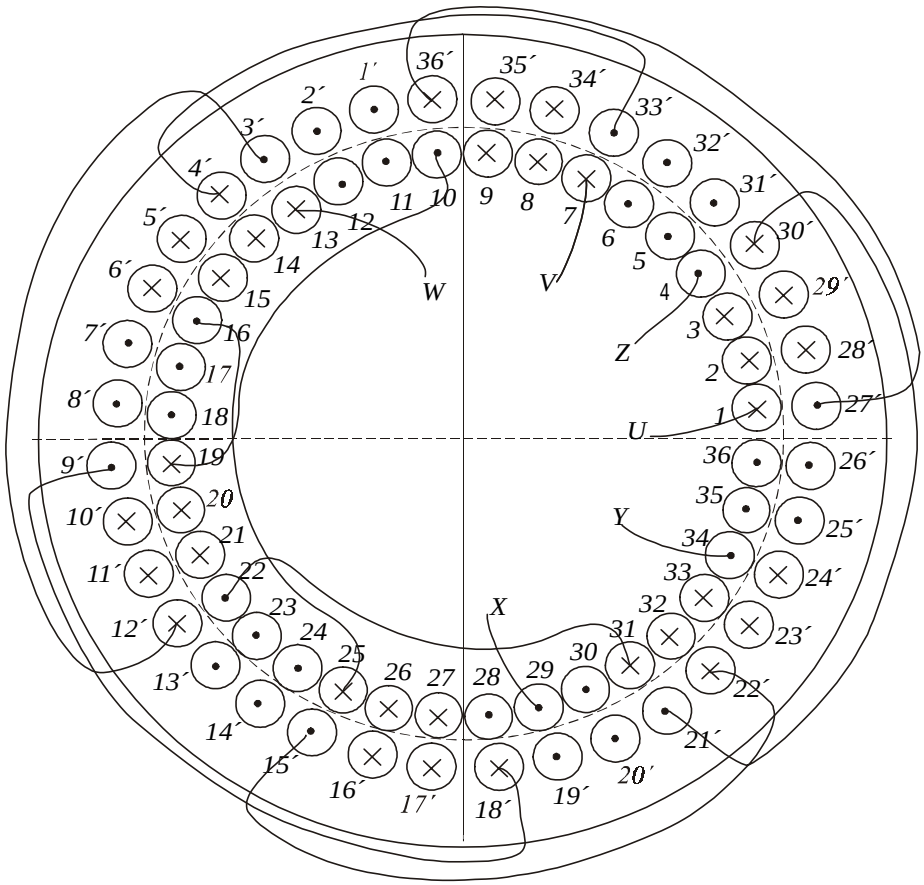



***Figura** P7.2.10*

***PROBLEMA N° 7.3 :*** *Se tiene un motor de inducción 3ϕ de rotor bobinado con los siguientes datos de placa : 30 HP, 500V conectado en delta; 50 Hz; 1445,8 r.p.m. y al que se sometió a ensayos en el laboratorio con los siguientes resultados:*
*De la prueba de vacío se obtuvo* $V_0 = 500V$, $I_0 = 8{,}2A$ *y* $P_0 = 1{,}45KW$ *. De la prueba de corto circuito:* $V_{CC} = 100V$, $I_{CC} = 32A$ *y* $P_{CC} = 1{,}6KW$ *. Siendo las pérdidas rotacionales de 0,9 KW.*

*a) Calcular el valor de la resistencia rotórica adicional para obtener torque máximo en el arranque.*
*b)* $S$ *para* $\eta_{\max}$ *.*
*c) La frecuencia de la corriente rotórica para las condiciones nominales de placa.*

*SOLUCIÓN :*

*a) Para torque máximo en el arranque:*

$$S_C = 1 = \frac{r_2''}{\sqrt{r_1^2 + (X_1 + X_2')^2}} \quad \Rightarrow \quad r_2'' = \sqrt{r_1^2 + (X_1 + X_2')^2}$$

$$r_1 + r_2' = \frac{P_{CC\,1\phi}}{I_{n1\phi}^2} = \frac{1{,}6\times 10^3/3}{\left(32/\sqrt{3}\right)^2} = 1{,}5625\Omega \,/\, fase$$

$$donde : I_{n1\phi} = \left(32/\sqrt{3}\right) \quad (En\ delta)$$

$$Z_1 + Z_2' = \frac{V_{CC\,1\phi}}{I_{n1\phi}} = \frac{100}{\left(32/\sqrt{3}\right)} = 5{,}4126\Omega \,/\, fase$$

$$X_1 + X_2' = \sqrt{(Z_1 + Z_2')^2 - (r_1 + r_2')^2} = \sqrt{5{,}4126^2 - 1{,}5625^2} = 5{,}1822\Omega \,/\, fase$$

$$r_1 = r_2' = \frac{r_1 + r_2'}{2} = 0{,}78125\Omega \,/\, fase$$

$$\therefore r_2'' = \sqrt{0{,}78125^2 + 5{,}1822^2} = 5{,}24076\Omega \,/\, fase$$

$$\Rightarrow r_2'\ adicional : \quad r_2'' - r_2' = 5{,}24076 - 0{,}78125 = 4{,}4595\Omega \,/\, fase$$

*b) Eficiencia máxima:*

*Pérdidas fijas = Pérdidas variables*

$$I_2'^2 \times (r_1 + r_2') = \frac{0{,}9\times 10^3}{3} + \left(\frac{1{,}45\times 10^3}{3} - \left(\frac{8{,}2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times r_1 - \frac{0{,}9\times 10^3}{3}\right)$$

$$I_2^{'2} \times 1{,}5625 = 465{,}823 \quad \Rightarrow \quad I_2^{'} = 17{,}26635 A/\ fase$$

$$I_2^{'} = \frac{V}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2}}$$

$$17{,}26635 = \frac{500}{\sqrt{\left(0{,}78125 + \frac{0{,}78125'}{S}\right)^2 + 5{,}1822^2}}$$

*Desarrollando la expresión :*

$$\therefore \quad S(\ para\ \eta_{max}\ ) = 0{,}0282 \equiv 2{,}82\%$$

*c)*

$$f_{rotórica} = S_{no\,minal} \times f_{red}$$

$$W_{campo} = \frac{120 \times f}{P}$$

$$2\,polos: \quad W_{campo} = \frac{120 \times 50}{2} = 3000 r.p.m.$$

$$4\,polos: \quad W_{campo} = \frac{120 \times 50}{4} = 1500 r.p.m.$$

$$W_{motor} = 1445{,}8 r.p.m. \quad \Rightarrow \quad Podemos\ decir\ que\ el\ motor\ es\ de\ 4\ polos.$$

$$S_{no\,minal} = \frac{1500 - 1445{,}8}{1500} = 0{,}03613$$

$$\therefore\ f_{rotórica} = 0{,}03613 \times 50 = 1{,}8065 Hz$$

***PROBLEMA N° 7.4:*** *Los parámetros del circuito equivalente por fase de un motor de inducción tipo jaula de ardilla 3$\phi$ de 3,5 HP; 220V ; 8 polos y 50 Hz conectado en **Y**, son los siguientes:*

$$r_1 = 0{,}22\Omega \qquad r_2' = 1\Omega \qquad X_1 = X_2' = 0{,}6645\Omega$$

*Siendo las pérdidas rotacionales constantes e iguales a 180W.*

*a) Calcular la velocidad de plena carga.*
*b) Calcular el toque máximo y el deslizamiento crítico.*
*c) Si el motor impulsa una carga a torque nominal y constante y se produce una caída de tensión del 25 %, calcular la velocidad, corriente y el mínimo valor de la tensión de alimentación sin que el motor se detenga.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

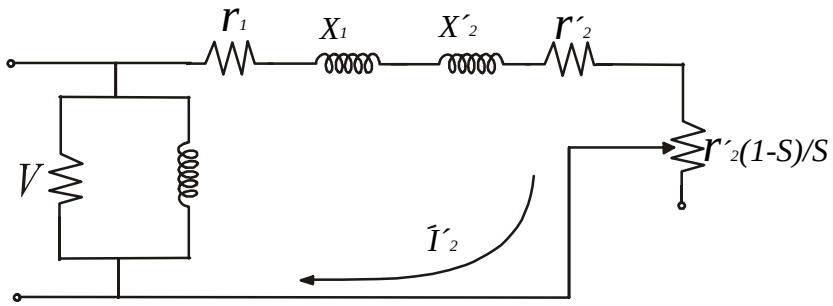



***Figura*** *P7.4.1*

$$P_{MEC} = 3\times r_2'\times\left(\frac{1-S}{S}\right)\times I_2'^{\,2} = P_{eje} + P_{rotor}$$

$$\frac{V^2}{\left(r_1+\frac{r_2'}{S}\right)^2+(X_1+X_2')^2}\times r_2'\times\left(\frac{1-S}{S}\right)=\frac{P_{MEC}}{3} \qquad Pero: \quad P_{MEC} = P_2 + P_{rotacionales}$$

$$\Rightarrow \quad P_{MEC} = 3{,}5\times 746 + 180 = 2791W$$

$$\frac{3\times V^2}{P_{MEC}}\times r_2'\times\left(\frac{1-S}{S}\right)=\left(r_1+\frac{r_2'}{S}\right)^2+(X_1+X_2')^2$$

$$\frac{3\times\left(\frac{220}{\sqrt{3}}\right)^2}{2791}\times\left(\frac{1-S}{S}\right)=\left(0{,}22+\frac{1}{S}\right)^2+1{,}329^2$$

$$\therefore \quad S = 0{,}06378$$

$$\Rightarrow \quad W_m = W_S\times(1-S) = \frac{120\times 50}{8}\times(1-0{,}06378)$$

$$\therefore \quad W_m = 702{,}165 r.p.m.$$

*b)*

$$T_{1\phi\,max} = \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\times V_1^{\,2}}{2\pi\times f}\times\left[\frac{1}{2\times\left(r_1+\sqrt{r_1^{\,2}+(X_1+X_2')^2}\right)}\right]$$

$$T_{1\phi\,max} = \frac{\left(\frac{8}{2}\right)\times\left(\frac{220}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi\times 50}\times\left[\frac{1}{2\times\left(0{,}22+\sqrt{0{,}22^2+1{,}329^2}\right)}\right] = 65{,}545N-m$$

$$\therefore \quad T_{3\phi\,max} = 3\times T_{1\phi\,max} = 196{,}635N-m$$

$$S_C = \frac{r_2'}{\sqrt{r_1^{\,2}+(X_1+X_2')^2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}22^2+1{,}329^2}} = 0{,}74234$$

$$W_{rotor} = (1-0{,}74234)\times\frac{120\times 50}{8} = 193{,}245 r.p.m. \equiv 20{,}237 rad/seg$$

*c) Si la tensión cae en un 25% :*

$$T_{e1\phi} = \frac{P_{MEC}}{3\times W_m} = \frac{P_2 + p_{mec}}{3\times W_m} = \frac{3{,}5\times 746 + 180}{3\times 702{,}165\times \frac{\pi}{30}} = 12{,}6523 N - m$$

*donde* $p_{mec}$ *: Son las pérdidas mecánicas*

$$T_{e1\phi} = \frac{\left(\frac{P}{2}\right)\times r_2'}{S\times 2\pi\times f}\times\left[\frac{V_1^{\,2}}{\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + \left(X_1 + X_2'\right)^2}\right] = 12{,}6523$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(\frac{8}{2}\right)\times 1}{S\times 2\pi\times 50}\times\left[\frac{\left(75\%\times\left(\frac{220}{\sqrt{3}}\right)\right)^2}{\left(0{,}22 + \frac{1}{S}\right)^2 + 1{,}329^2}\right] = 12{,}6523$$

$$\therefore \quad S = 0{,}1179465$$

$$I_2'(\text{ para } S = 0{,}1179465) = \frac{V}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + \left(X_1 + X_2'\right)^2}} = \frac{75\%\times\left(\frac{220}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\left(0{,}22 + \frac{1}{S}\right)^2 + 1{,}329^2}}$$

$$\Rightarrow I_2'(\text{ para } S = 0{,}1179465) = 10{,}826\,A$$

*MÍNIMO VALOR DE LA TENSIÓN POSIBLE:*

$$T_{max} = 12{,}6523 = \frac{\left(\frac{8}{2}\right)\times V^2}{2\pi\times 50}\times\left[\frac{1}{2\times\left(0{,}22 + \sqrt{0{,}22^2 + 1{,}329^2}\right)}\right]$$

$$V = 55{,}8073V$$

$$\therefore \quad V_{línea\,min} = 96{,}6611V$$

***PROBLEMA N° 7.5 :*** *Un motor de inducción 3ϕ, 220 volts (**Y**), 60Hz, 4 polos, fue sometido a ensayo de vacío y a rotor bloqueado, con los siguientes resultados:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prueba de vacío:* | *220 Volts* | *10 Amps* | *500 Watts* |
| *Prueba a rotor bloqueado :* | *52 Volts* | *20 Amps* | *800 Watts* |

*Si las pérdidas rotacionales son 60 Watts, obtenidas de un ensayo aparte y además se conoce que* $r_1 = 0{,}2\Omega$ */ fase*

*a) Obtener los parámetros del circuito equivalente aproximado*
*b) Para el deslizamiento nominal S = 8,4 %. Determinar la corriente de entrada, el f.d.p., la potencia de salida y la eficiencia.*
*c) Obtener el torque de arranque a plena tensión y la relación de la corriente de arranque a la corriente nominal.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

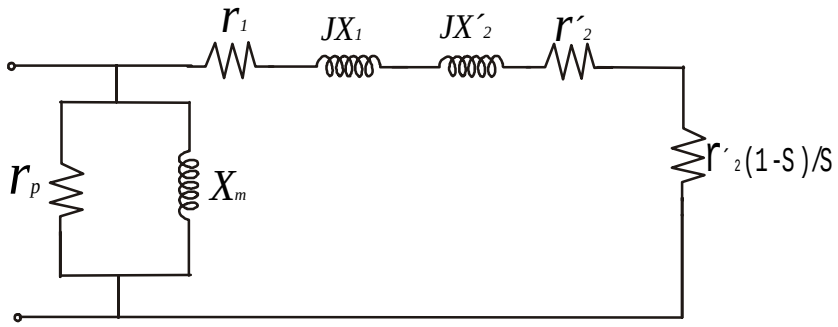



***Figura** P7.5.1*

*De la prueba de vacío:*

$$P_{FE\,3\phi} = P_1 - p_{rot} - p_{Cu\,1} = 500 - 60 - 3\times 10^2 \times 0{,}2$$

$$P_{FE\,3\phi} = 380 Watts$$

$$r_P = \frac{V^2}{P_{FE\,1\phi}} = \frac{\left(220/\sqrt{3}\right)^2}{\left(380/3\right)} = 127{,}368\Omega\ /\ fase$$

$$I_P = \frac{V}{r_P} = \frac{220/\sqrt{3}}{127{,}368} = 0{,}997\,A$$

$$I_m = 9{,}95\,A$$

$$X_m = \frac{V}{I_m} = \frac{220/\sqrt{3}}{9{,}95} = 12{,}765\Omega\ /\ fase$$

*Prueba de cortocircuito:*

$$r_1 + r_2' = \frac{800/3}{20^2} = 0{,}667\Omega\ /\ fase$$

$$r_2' = 0{,}467\Omega\ /\ fase \qquad\qquad Z_{eq} = \frac{\left(\frac{52}{\sqrt{3}}\right)}{20} = 1{,}5\Omega\ /\ fase$$

$$X_1 + X_2' = \sqrt{1{,}5^2 - 0{,}667^2} = 1{,}344\Omega\ /\ fase$$

$$\therefore\quad r_P = 127{,}368\Omega\ /\ fase \qquad X_m = 12{,}765\Omega\ /\ fase$$

$$X_1 = X_2' = 0{,}672\Omega\ /\ fase$$

*b)* $\bar{I}_2' = \dfrac{127\angle 0°}{\left(0{,}2 + \dfrac{0{,}467}{0{,}084}\right) + 1{,}344\,j} = 21{,}474\angle -13{,}135°$

$$\bar{I}_1 = 127\angle 0° \times \left[7{,}8512\times 10^{-3} - 0{,}0783\,j + \frac{1}{5{,}7595 + 1{,}344\,j}\right] = 26{,}45\angle -34{,}1°$$

$$\therefore \quad \cos\varphi_1 = 0{,}828$$

$$P_1 = \sqrt{3}\times 220\times 26{,}45\times 0{,}828 = 8345{,}25 Watts$$

$$P_2 = P_{MEC} - p_{rot} = 3\times r_2'\times\left(\frac{1-S}{S}\right)\times I_2'^{\,2} - 60 = 6984{,}99 watts$$

$$\therefore \eta_{max} = \frac{P_2}{P_1} = 0{,}837 \equiv 83{,}7\%$$

*c)*

$T_{arranque} = ??$ $\qquad S = 1$

$$\bar{I}_2' = \frac{127\angle 0°}{(0{,}2 + 0{,}467) + 1{,}344\,j} \qquad (\text{En el arranque})$$

$$\bar{I}_2' = 84{,}64\angle -63{,}6°$$

$$\bar{I}_1 = 127\times\left[7{,}8512\times 10^{-3} - 0{,}0783\,j + \frac{1}{0{,}667 + 1{,}344\,j}\right]$$

$$\bar{I}_{1\,arranque} = 94\angle -65{,}75°$$

$$\Rightarrow \quad T_{e\,3\phi\,arranque} = \frac{3\times r_2'\times I_2'^{\,2}}{W_S} = \frac{3\times 0{,}467\times 84{,}64^2}{4\pi\times\dfrac{60}{4}}$$

$$\therefore T_{e\,3\phi\,arranque} = 53{,}25\,N-m$$

$$\text{Luego :} \quad \frac{I_{1\,arranque}}{I_{1\,N}} = \frac{94}{26{,}45} = 3{,}55$$

***PROBLEMA N° 7.6 :*** *Un motor trifásico de inducción de 25HP, 230V (línea a línea) conectado en delta, de 6 polos, 60 Hz, jaula de ardilla, tiene los siguientes parámetros de circuito equivalente en ohmios por fase estrella:*

$R_1 = 0{,}060 \qquad R_2 = 0{,}055 \qquad X_1 = 0{,}34 \qquad X_2 = 0{,}33 \qquad X_\phi = 10{,}6$

*a) Calcular la corriente y el par de arranque para este motor conectado directamente con una fuente de 230 V.*

*b) Para limitar la corriente en el arranque, se propone conectar en estrella el devanado del estator para el arranque, y después cambiar a la conexión en delta para el funcionamiento normal. i)¿ Cuáles son los parámetros del circuito equivalente en ohmios por fase para la conexión en delta ?. ii) Con el motor conectado directamente a una fuente de 230V. Calcule la corriente y el par de arranque.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

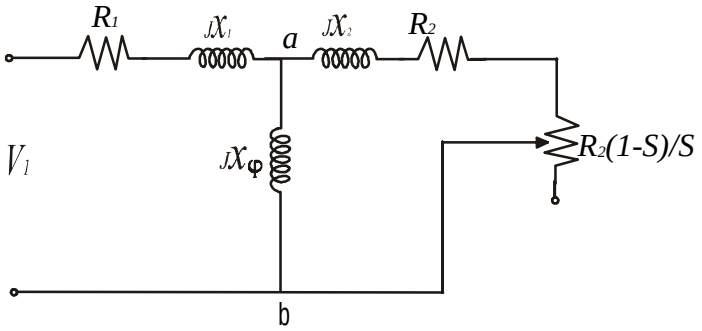



***Figura** P7.6.1*

*Como está en fase estrella:* $\hat{V}_1 = \dfrac{230}{\sqrt{3}} \angle 0° \, V$

$$\hat{V}_{ab} = \hat{V}_{1a} = \hat{V}_{TH} = \hat{V}_1 \times \frac{jX_\phi}{R_1 + j(X_1 + X_\phi)} = \frac{222{,}84}{\sqrt{3}} \angle 0{,}314° = 128{,}66 \angle 0{,}314°$$

$$\overline{Z}_{ab} = \overline{Z}_{TH} = (R_1 + jX_1) // jX_\phi = 0{,}0563 + 0{,}33j = R_{e1} + jX_{e1}$$

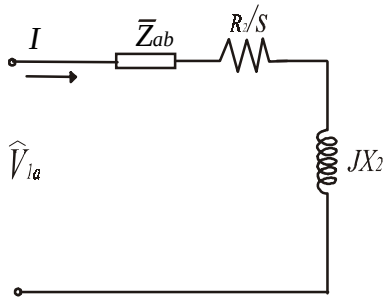



***Figura** P7.6.2*

$$T_{arranque} = \frac{1}{W_S} \times \frac{3 \times V_{1a}{}^2 \times R_2}{(R_{e1} + R_2)^2 + (X_{e1} + X_2)^2}$$

$$W_S = \frac{2\pi \times f}{P/2} = \frac{2\pi \times 60}{3} = 125{,}664 rad/seg$$

$$\Rightarrow \quad T_{arranque_{3\phi}} = 48{,}16 \, N - m$$

$$I = \frac{222{,}84 \angle 0{,}314°}{\sqrt{3} \times 0{,}67 \angle 80{,}43°} = 192 \angle -80{,}116°$$

$$\therefore \quad T = 48{,}16 \, N - m \qquad I = 192 A$$

*b) Para cambiar de la conexión **Y** a la conexión delta, los parámetros del circuito equivalente son multiplicados por 3:*

*i)* $R_1 = 3 \times 0{,}06 = 0{,}18 \Omega / fase$ $\qquad R_2 = 3 \times 0{,}055 = 0{,}165 \Omega / fase$

$X_1 = 3 \times 0{,}34 = 1{,}02 \Omega / fase$ $\qquad X_2 = 3 \times 0{,}33 = 0{,}99 \Omega / fase$

$X_\phi = 3 \times 10{,}6 = 31{,}8 \Omega / fase$

*ii) Por lo tanto:*

$$I_1 = \frac{192}{3} = 64A \qquad T = \frac{48{,}16}{3} = 16{,}053N - m$$

***PROBLEMA N° 7.7 :*** *Un motor de inducción trifásico, 440V (**Y**), 50 Hz y 4 polos; fue ensayado con los siguientes resultados:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Rotor Bloqueado:* | *120 V* | *25A* | *2KW* |
| *Rotor Sin carga:* | *440V* | *8A* | *1,5KW* |

*Las pérdidas rotacionales son 600 W*

*a) Obtener los parámetros del circuito equivalente y calcule para un deslizamiento del 4 % el torque eléctrico ($r_1 = r_2'$ ; $X_1 = X_2'$).*

*b) Si el motor será operado con una fuente de tensión y frecuencia variables. Calcular la frecuencia y tensión necesarias para obtener torque máximo en el arranque. Calcule el torque máximo.*

*c) Si el torque obtenido en a) es requerido pero a 1125 r.p.m. cual será el valor de la tensión y frecuencia al que deberá ajustarse la fuente.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

*DE LA PRUEBA DE ROTOR BLOQUEADO: (Parámetros por fase):*

$$r_1 + r_2' = \frac{P_{CC\,1\phi}}{I_{N\,1\phi}^{\;2}} = \frac{2000/3}{25^2} = 1{,}067\Omega \quad \Rightarrow \quad Tomamos: \quad r_1 = r_2' = \frac{r_1 + r_2'}{2} = 0{,}53\Omega$$

$$Z_{CC} = \frac{V_{CC\,1\phi}}{I_{N\,1\phi}} = \frac{120/\sqrt{3}}{25} = 2{,}77\Omega \quad \Rightarrow \quad X_1 + X_2' = \sqrt{Z_{CC}^{\;2} - (r_1 + r_2')^2} = 2{,}556\Omega$$

$$\therefore \quad X_1 = X_2' = \frac{X_1 + X_2'}{2} = 1{,}278\Omega$$

*DE LA PRUEBA DE ROTOR LIBRE (Parámetros por fase):*

$$P_1 = P_{Cu\,1} + P_{FE} + p_{mec} \quad \Rightarrow \quad 1500 = 3 \times 0{,}53 \times 8^2 + P_{FE} + 600$$

$$\therefore \quad P_{FE} = 798{,}24 Watts$$

$$g_P = \frac{P_{FE\,1\phi}}{V_{1\phi}^{\;2}} = \frac{798{,}24/3}{\left(440/\sqrt{3}\right)^2} = 4{,}123 \times 10^{-3}\,mhos \quad \Rightarrow \quad r_P = 242{,}53\Omega$$

$$Y_\phi = \frac{I_\phi}{V_{1\phi}} = \frac{8}{440/\sqrt{3}} = 0{,}031492 mhos \quad \Rightarrow \quad b_m = \sqrt{Y_\phi^{\;2} - g_P^{\;2}} = 0{,}03122 mhos$$

$$\therefore X_m = 32{,}03\Omega$$

*Para un S=4%*

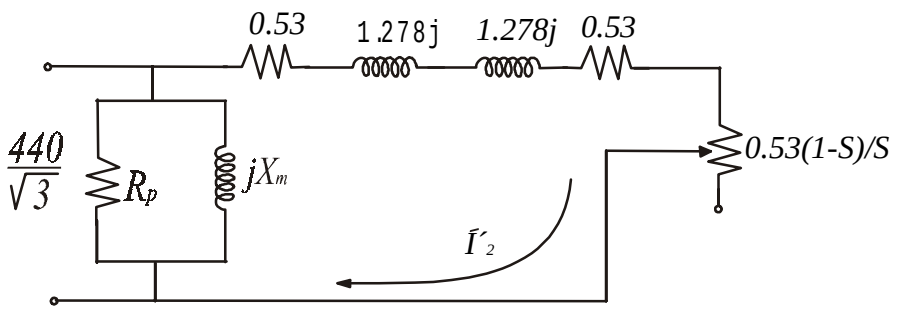



**Figura** *P7.7.1*

$$\bar{I}_2' = \frac{\frac{440}{\sqrt{3}}\angle 0°}{(0{,}53 + \frac{0{,}53}{S}) + 2\times 1{,}278\,j} = \frac{\frac{440}{\sqrt{3}}\angle 0°}{(0{,}53 + \frac{0{,}53}{0{,}04}) + 2{,}556\,j} = 17{,}82 - 3{,}31\,j$$

$$\therefore \quad \bar{I}_2' = 18{,}125\angle -10{,}5°$$

$$W_S = \frac{120\times f}{P}\times\frac{\pi}{30} = \frac{4\times 50\times\pi}{P} = 157{,}08 rad/seg$$

$$T_{e3\phi} = \frac{3\times r_2'\times I_2'^{\,2}}{S\times W_S} = \frac{3\times 0{,}53\times 18{,}125^2}{0{,}04\times 157{,}08} = 83{,}133 N-m$$

*b)*

$$\text{Como el } T_{e1\phi} = \frac{V^2\times\frac{r_2'}{S}}{W_S\times\left[\left(r_1+\frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1+X_2')^2\right]}$$

*Para esta condición haremos:* $V \to K\times V \quad X \to K\times X \quad W \to K\times W$

$$T_{e1\phi} = \frac{K^2\times V^2\times\frac{r_2'}{S}}{K\times W_S\times\left[\left(r_1+\frac{r_2'}{S}\right)^2 + K^2\times(X_1+X_2')^2\right]}$$

*Sabemos que en el arranque :* $S = 1$

*El torque máximo para las condiciones de frecuencia y tensión variable será calculado de la siguiente manera:*

$$\frac{dT_{e1\phi}}{dK}(Para\ S=1)=0 \quad \Rightarrow \quad (r_1+r_2')^2-K^2\times(X_1+X_2')^2=0$$

$$\Rightarrow \quad K=\frac{r_1+r_2'}{X_1+X_2'}$$

$$\therefore K=\frac{0{,}53+0{,}53}{1{,}278+1{,}278}=0{,}4147$$

$$\Rightarrow \quad f'=K\times f=0{,}4147\times 50=20{,}735Hz$$

$$V'=K\times V=0{,}4147\times 440=182{,}468V$$

*Sabemos que:*

$$S_C=\frac{r_2'}{\sqrt{r_1^2+(X_1+X_2')^2}} \quad y\ además \quad T_{e3\phi}=\frac{3\times r_2'\times V_1^2}{S\times W_S\times\left[\left(r_1+\frac{r_2'}{S}\right)^2+(X_1+X_2')^2\right]}$$

*Entonces reemplazando* $S_C$ *en* $T_{e3\phi}$ *para obtener* $T_{e3\phi\,\max}$
*ya que:*

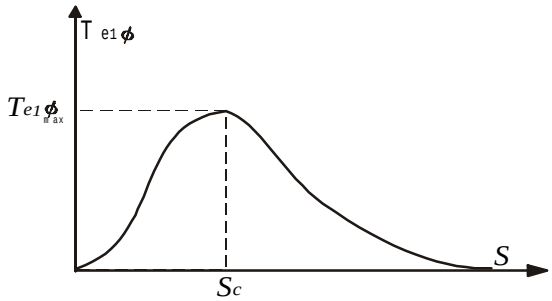



***Figura*** *P7.7.2*

$$T_{e3\phi\,max}=\frac{3\times V_1^2}{W_S\times\left[2\times\left(r_1+\sqrt{r_1^2+(X_1+X_2')^2}\right)\right]}$$

$$T_{e3\phi\,max}=\frac{3\times\left(\frac{440}{\sqrt{3}}\right)^2}{157{,}08\times\left[2\times\left(0{,}53+\sqrt{0{,}53^2+(1{,}278+1{,}278)^2}\right)\right]}=196{,}2337\,N-m$$

*c)*

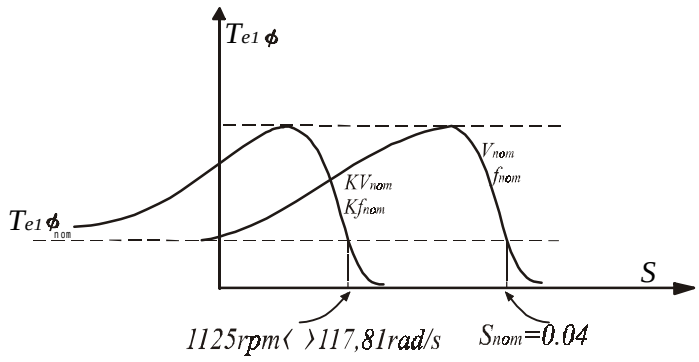



***Figura*** *P7.7.3*

*Asumiendo que el deslizamiento es constante para variaciones de tensión y frecuencia*

$$K \times W_S \times (1 - S) = W_m \quad \Rightarrow \quad K \times 157{,}08 \times (1 - 0{,}04) = 117{,}81$$
$$\Rightarrow \quad K = 0{,}78125$$
$$\therefore \; f' = K \times f = 0{,}78125 \times 50 = 39{,}0625 Hz$$
$$V' = K \times V = 0{,}78125 \times 440 = 373{,}75 V$$

***PROBLEMA N° 7.8 :*** *Se tiene un motor de inducción de 15HP, 230V, trifásico conectado en estrella, 60 Hz, 4 polos y jaula de ardilla, desarrolla un par interno a plena carga a deslizamiento igual a 0,03 cuando se trabaja a frecuencia y voltaje nominales. Los datos de impedancia de este motor, en ohmios por fase son:*

$$R_1 = 0{,}24 \qquad X_1 = X_2 = 0{,}31 \qquad X_\phi = 10{,}4$$

*Si se energiza este motor con una fuente de voltaje constante de 230V y 60 Hz a través de un alimentador cuya impedancia es 0,3 + j 0,22 Ohmios /fase. Calcule el par interno máximo que puede suministrar el motor y los valores correspondientes de la corriente y voltaje de terminales del estator.*

*SOLUCIÓN:*

*Ahora se adhiere un alimentador con impedancia:* $Z_0 = R_0 + jX_0 = 0{,}3 + j0{,}22$

$$\hat{V}_{1a} = \hat{V}_1 \times \frac{jX_\phi}{(R_1 + R_0) + j(X_1 + X_\phi + X_0)} \quad ; \quad Tomando \quad \hat{V}_1 = \frac{230}{\sqrt{3}} \angle 0°$$
$$\hat{V}_{1a} = \frac{230}{\sqrt{3}} \times \frac{j10{,}4}{0{,}54 + j10{,}93} = \hat{V}_{TH} = 126{,}1976 \angle 2{,}8285°$$

$$\overline{Z}_{TH} = R_{e1} + jX_{e1} = \left((R_1 + R_0) + j(X_1 + X_0)\right) // \; jX_\phi = 0{,}4877 + 0{,}5284\, j$$
$$W_S = \frac{2\pi \times f}{P/2} = \frac{2\pi \times 60}{2} = 188{,}5 rad/seg$$
$$W_m = (1 - S) \times W_S = (1 - 0{,}03) \times 188{,}5 = 182{,}84 rad/seg$$
$$T_{max} = \frac{3 \times 126{,}1976^2}{2 \times 188{,}5 \times \left[0{,}4877 + \sqrt{0{,}4877^2 + (0{,}5284 + 0{,}31)^2}\right]}$$
$$\therefore \quad T_{max} = 86{,}943 N - m$$

*donde :*

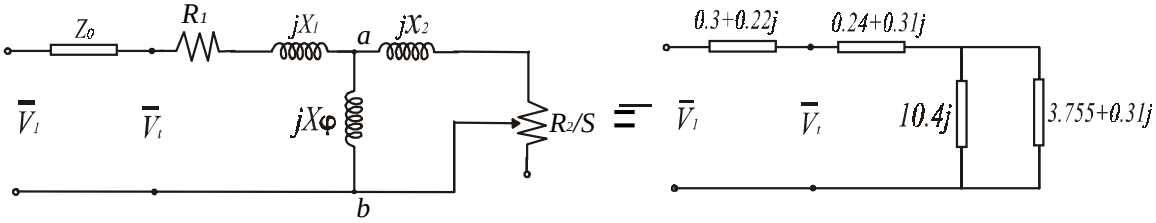



***Figura*** *P7.8.1*

*Luego:*

$$S_{\max T} = \frac{R_2}{\sqrt{R_{e1}^{\ 2} + (X_{e1} + X_{e2})^2}}$$

*Para condiciones de tensión y frecuencia nominales:*

$$T = \frac{P_{sal}}{W_m} = \frac{15 \times 746}{182{,}84} = 61{,}2 N - m$$

*Tomando en cuenta que las pruebas para obtener los parámetros del motor* $(R_1, R_2, X_1, X_2 \ y \ X_\phi)$ *, son tomados antes de conectarlo al alimentador:*

$$T = \frac{3 \times V_{1a}^{'\ 2} \times \left(\frac{R_2}{S}\right)}{W_S \times \left[\left(R_{e1}' + \frac{R_2}{S}\right)^2 + \left(X_{e1}' + X_2\right)^2\right]} = 61{,}2 \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \ (\alpha)$$

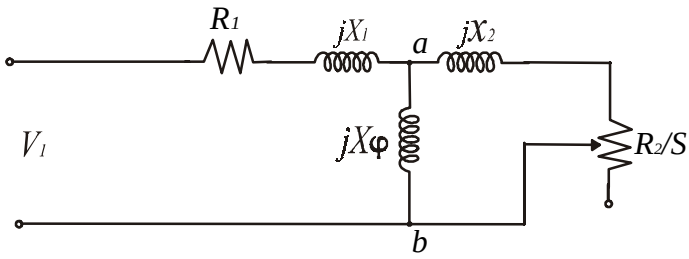



***Figura*** *P7.8.2*

$$\hat{V}_{TH} = \hat{V}_{1a}' = \hat{V}_1 \times \frac{jX_\phi}{R_1 + j(X_1 + X_\phi)}$$

$$\hat{V}_{1a}' = 126{,}1976 \angle 2{,}8285° \qquad ; \qquad \overline{Z}_{TH} = (R_1 + jX_1) // jX_\phi = R_{e1}' + jX_{e1}'$$

*De la igualdad* $(\alpha)$*:*

$$R_2 = 0{,}11265 \Omega \ / \ fase$$

*Volviendo al problema:*

$$S_{maxT} = \frac{R_2}{\sqrt{R_{e1}^{\ 2} + (X_{e1} + X_{e2})^2}} = \frac{0{,}11265}{\sqrt{0{,}4877^2 + (0{,}5284 + 0{,}31)^2}} = 0{,}11614$$

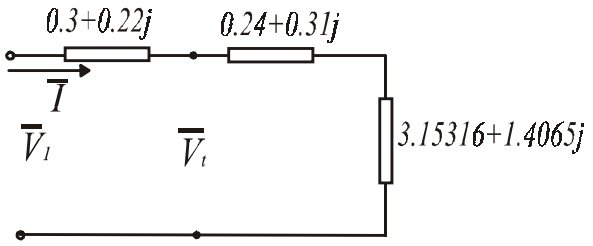



***Figura** P7.8.3*

$$\bar{I} = \frac{\frac{230}{\sqrt{3}}\angle 0°}{3{,}6932 + 1{,}9365\,j} = 30{,}46\angle -27{,}67°$$

$$\hat{V}_t = \hat{V}_1 - \bar{I} \times (0{,}3 + 0{,}22\,j) = 121{,}1\angle -0{,}84°$$

$$V_{estator} = V_t \times \sqrt{3} = 209{,}75V$$

***PROBLEMA N° 7.9 :*** *Los datos que siguen corresponden a los ensayos realizados en una máquina asíncrona de tipo jaula de ardilla*

| ***Datos de placa*** | ***Ensayo*** | ***Voltios*** | ***Amperios*** | ***Vatios*** |
|---|---|---|---|---|
| *HP: 30* | *Vacío* | 220 | 33,4 | 1050 |
| *Tensión: 220V* | *Rotor bloqueado* | 36,3 | 76,0 | 1283 |
| *Polos: 4* | *Resistencia entre bornes (A.C.)* $R_{xy}$*=0,0497 Ohmios a Temperatura: 17°C* | | | |
| *Conexión: Delta/Delta* | | | | |
| *Hz: 60* | | | | |

*Determinar :*

*a) Los parámetros del circuito equivalente aproximado para 75° C.*

*b) Para operación nominal: deslizamiento* $S_N$*, torque (*$T_N$*), coriente* $I_{1N}$ *, f.d.p. y la eficiencia.*

*c)* $T_{arranque}/T_N$ , $I_{1arranque}/I_{1N}$ *, deslizamiento crítico y el torque máximo.*

*SOLUCIÓN:*

$$R_{xy} = 0{,}0497\Omega \qquad T = 17°C \quad (A.C.)$$

$$R_{xy} = \frac{2}{3}\times r_1 \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{3}{2}\times R_{xy} = \frac{3}{2}\times 0{,}0497 = 0{,}0746\Omega$$

$$\therefore r_1 = 0{,}0746\Omega$$

*Ensayo de vacío a tensión nominal: S=0*

$$W_{3\phi} = P_1 = P_{Cu\,1} + P_{FE} + p_{rot} \quad ; \quad \text{Done } p_{rot} \text{ se asume de valor } 0 \text{ porque no es dato}$$

$$P_{FE\,3\phi} = P_1 - P_{Cu\,1} = 1050 - 3\times\left(\frac{33{,}4}{\sqrt{3}}\right)^2 \times 0{,}0746$$

$$P_{FE\,3\phi} = 966{,}78W$$

$$g_P = \frac{P_{FE\,1\phi}}{V_{1\phi\,N}{}^2} = \frac{966{,}78/3}{220^2} = 6{,}658\times 10^{-3}\,mhos \quad Y_\phi = \frac{I_{\phi\,1\phi}}{V_{1\phi\,N}} = 87{,}65\times 10^{-3}\,mhos$$

$$b_m = \sqrt{Y_\phi{}^2 - g_P{}^2} = 87{,}4\times 10^{-3}\,mhos$$

*En la prueba de rotor bloqueado: S=1*

$$r_1 + r_2' = \frac{P_{CC\,1\phi}}{I_{N\,1\phi}{}^2} = \frac{1283/3}{\left(76/\sqrt{3}\right)^2} = 0{,}222\Omega$$

$$\therefore r_2' = 0{,}1474\Omega$$

$$Z = \frac{V_{CC\,1\phi}}{I_{N\,1\phi}} = \frac{36{,}3}{76/\sqrt{3}} = 0{,}827\Omega$$

$$\Rightarrow \quad X_1 + X_2' = 0{,}797\Omega \quad \Rightarrow \quad X_1 = X_2' = 0{,}3985\Omega$$

*Parámetros a 75°C:*

$$r_{175°C} = \left(\frac{75+235}{17+235}\right)\times 0{,}0746 = 0{,}0918\Omega$$

$$r_2'{}_{75°C} = \left(\frac{75+235}{17+235}\right)\times 0{,}1474 = 0{,}1813\Omega$$

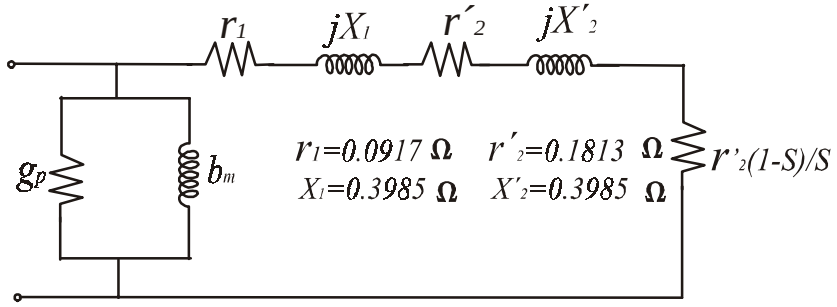



**Figura** *P7.9.1*

*b) Para operación nominal: Trabajando a 75°C*

$$W_S = \frac{2\pi \times f}{P/2} = \frac{2\pi \times 60}{4/2} = 188{,}5 rad/seg$$

$$\left|\bar{I}_2'\right| = \frac{220\angle 0°}{\sqrt{\left(0{,}0918 + \frac{0{,}1813}{S}\right)^2 + 0{,}797^2}} \quad ; \quad p_{mec} = 0 \ (Se\ desprecia)$$

$$Potencia\ en\ el\ eje = 30HP = 30 \times 746 = 22380 Watts \approx P_{MEC} = 3 \times r_2' \times \left(\frac{1-S}{S}\right) \times I_2'^2$$

$$3 \times 0{,}1813 \times \left(\frac{1-S}{S}\right) \times \frac{220^2}{\left(0{,}0918 + \frac{0{,}1813}{S}\right)^2 + 0{,}797^2} = 22380$$

$$S_1 = 0{,}03 \quad S_2 = 0{,}5979 \quad \Rightarrow \quad Tomamos: \quad S = 0{,}03$$

$$W_{mN} = (1-S) \times W_S = (1-0{,}03) \times 188{,}5 = 182{,}845 rad/seg$$

$$T_N = \frac{P_{MEC}}{W_{mN}} = \frac{22380}{182{,}845} = 122{,}4 N-m$$

$$\bar{I}_2' = \frac{220\angle 0°}{\left(0{,}0918 + \frac{0{,}1813}{0{,}03}\right) + 0{,}797j} = 35{,}56\angle -7{,}4°$$

$$\bar{I}_\phi = 220\angle 0° \times (6{,}658 \times 10^{-3} - j0{,}0874) = 19{,}284\angle -85{,}644°$$

$$\therefore \quad \bar{I}_{1N} = 43{,}77\angle -32{,}95°$$

$$f.d.p. = \cos\varphi = 0{,}839$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{22380}{3 \times 43{,}77 \times 220 \times 0{,}839} = 0{,}9234 \equiv 92{,}34\%$$

*c)*

$$\bar{I}_2'_{arranque} = \frac{220}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2}} \quad ; \quad S = 1$$

$$\Rightarrow \quad \bar{I}_2'_{arranque} = 261{,}14\angle -71{,}1°$$

$$\bar{I}_{1arranque} = \bar{I}_2'_{arranque} + \bar{I}_\phi = 261{,}14\angle -71{,}1° + 19{,}284\angle -85{,}644°$$

$$\therefore \quad \bar{I}_{1arranque} = 279{,}847\angle -72°$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_{1arranque}}{I_{1N}} = \frac{279{,}847}{43{,}77} = 6{,}39$$

$$T_{arranque} = \frac{3 \times r_2' \times I_{2\ arranque}'^{\,2}}{S \times W_S} = \frac{3 \times 0{,}1813 \times 261{,}14^2}{1 \times 188{,}5} = 196{,}77\,N-m$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_{arranque}}{T_N} = \frac{196{,}77}{122{,}4} = 1{,}61$$

$$S_C = \frac{r_2'}{\sqrt{r_1^2 + (X_1 + X_2')^2}} = 0{,}226$$

$$T_{3\phi\,max} = \frac{3}{2\pi \times 60} \times \frac{4}{2} \times \frac{220^2}{2 \times \left[0{,}0918 + \sqrt{0{,}0918^2 + 0{,}797^2}\right]}$$

$$\therefore \quad T_{3\phi\,max} = 430{,}8\,N-m$$

***PROBLEMA N° 7.10 :*** *Un motor de inducción trifásico de 400V (**Y**), 50Hz, y 6 polos tiene una impedancia de dispersión $Z_1 = Z_2' = 0{,}15 + j0{,}75$ Ohmios por fase a frecuencia nominal:*

*a) Calcular la tensión y frecuencia nominal para un deslizamiento de 3%; y el torque eléctrico.*
*b) Si el motor es alimentado de una fuente de tensión y frecuencias variables, calcular la frecuencia y tensión para obtener torque máximo en el arranque y compare este torque con el torque de arranque obtenido a tensión y frecuencia nominal.*
*c) Si el mismo torque obtenido en a) es requerido a 750r.p.m. a que valor de frecuencia y voltaje deberá ser ajustable la fuente.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$T_{e1\phi} = \frac{r_2' \times V^2}{S \times W_S \times \left[\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2\right]}$$

$$S = 0{,}03 \quad ; \quad W_S = \frac{120 \times 50}{6} = 1000\,r.p.m. = 104{,}7\,rad/seg$$

$$r_1 = r_2' = 0{,}15\Omega \quad ; \quad X_1 = X_2' = 0{,}75\Omega \quad ; \quad V = 400/\sqrt{3} \quad ; \quad f = 50Hz$$

$$\Rightarrow \quad T_{e1\phi} = 88{,}52\,N-m \qquad \therefore T_{e3\phi} = 265{,}56\,N-m$$

*b)*

$$T_{e1\phi\,N}(S=1) = 32{,}65\,N-m$$

$$V \rightarrow K \times V$$

$$W_S \rightarrow K \times W_S$$

$$X \rightarrow K \times X$$

$$T_e = \frac{r_2' \times K^2 \times V^2}{S \times K \times W_S \times \left[ \left( r_1 + \frac{r_2'}{S} \right)^2 + K^2 \times (X_1 + X_2')^2 \right]}$$

$$\frac{dT_e}{dK}(S=1) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{r_1 + r_2'}{X_1 + X_2'} = \frac{2 \times 0{,}15}{2 \times 0{,}75} = 0{,}2$$

$$\therefore \quad f' = 0{,}2 \times 50 = 10 Hz.$$

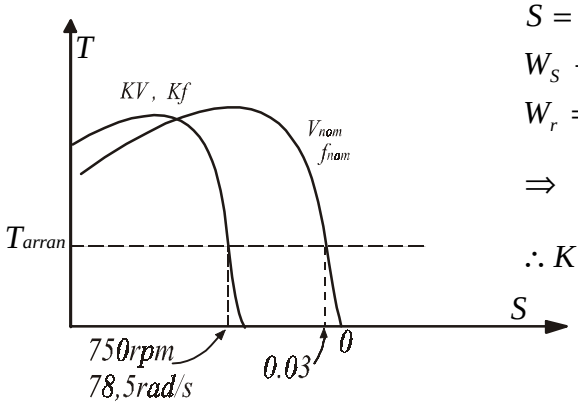
$$V' = 0{,}2 \times 400 = 80 V_{línea}$$

$$T_{e1\phi}(S=1) = \frac{0{,}15 \times \left( \frac{80}{\sqrt{3}} \right)^2}{20{,}9 \times \left[ (0{,}15 \times 2)^2 + (2 \times 0{,}75)^2 \times 0{,}2^2 \right]} = 85 N - m$$

$$\therefore \quad T_{e3\phi}(S=1) = 255 N - m$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_{e1\phi}(f = 10, V = 80, S = 1)}{T_{e1\phi}(f = 50, V = 400, S = 1)} = \frac{85}{32{,}65} = 2{,}6$$

*c)*




$$S = 0{,}03$$

$$W_S \rightarrow K \times W_S$$

$$W_r = (1 - S) \times K \times W_S$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{W_r}{(1 - S) \times W_S} = \frac{750}{(1 - 0{,}03) \times 1000}$$

$$\therefore K = 0{,}773$$

***Figura*** *P7.10.1*

$$f' = 0{,}773 \times 50 = 38{,}65 Hz$$

$$V' = 0{,}773 \times 400 = 309{,}2 V$$

$$W_S = 773 r.p.m. = 80{,}95 rad / seg$$

$$T_{e1\phi} = \frac{0{,}15 \times \left( \frac{309{,}2}{\sqrt{3}} \right)^2}{0{,}03 \times 80{,}95 \times \left[ \left( 0{,}15 + \frac{0{,}15}{0{,}03} \right)^2 + 0{,}773^2 \times 1{,}5^2 \right]}$$

$$\Rightarrow \quad T_{e1\phi} = 70{,}64 N - m$$

*Entonces hay que ajustar la tensión:*

$$V''^2 = \frac{0{,}03 \times 80{,}95 \times 88{,}52 \times \left[\left(0{,}15 + \frac{0{,}15}{0{,}03}\right)^2 + (1{,}5 \times 0{,}773)^2\right]}{0{,}15}$$

$$V'' = 199{,}84V$$

$$\therefore \quad V''_{línea} = 346{,}14V \qquad f'' = 38{,}65Hz$$

***PROBLEMA N° 7.11 :*** *Un motor de inducción trifásico, 440V (Delta), 50 Hz y 6 polos, impulsa un ventilador a 920r.p.m., cuando es alimentado a tensión nominal, si los parámetros del circuito equivalente del motor por fase son:*

$$r_1 = 8\Omega \qquad r_2' = 16\Omega \qquad X_1 = X_2' = 12\Omega$$

*Asumiendo que el torque mecánico total varía en proporción al cuadrado de la velocidad:*

*a) Qué voltaje deberá aplicarse para que el motor impulse al ventilador a 460 r.p.m.; calcule además la corriente rotórica y las pérdidas en el cobre.*

*b) Si se quisiera obtener la variación de la velocidad a 460 r.p.m. pero cambiando el valor de la resistencia rotórica; calcular el valor de la resistencia rotórica adicional, calcule además la corriente rotórica y las pérdidas en el cobre.*

*SOLUCIÓN:*

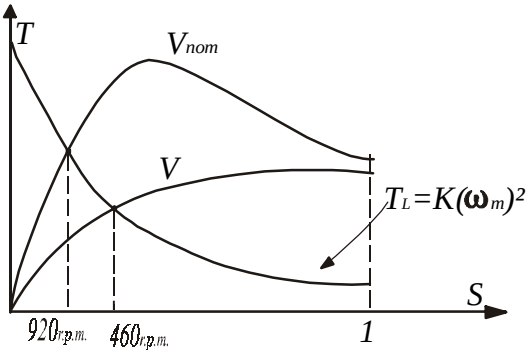



***Figura*** *P7.11.1*

*a)*

$$W_S = \frac{120 \times 50}{6} = 1000 r.p.m. = 104{,}7 rad/seg$$

$$S = \frac{1000 - 920}{1000} = 0{,}08$$

$$T_{3\phi} = \frac{3 \times r_2' \times V^2}{S \times W_S \times \left[\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2\right]} = \frac{3 \times 16 \times 440^2}{0{,}08 \times 104{,}7 \times \left[\left(8 + \frac{16}{0{,}08}\right)^2 + 24^2\right]}$$

$$\therefore \quad T_{3\phi} = 25{,}3N - m$$

$$K = \frac{T_{3\phi}}{W_m{}^2} = \frac{25{,}3}{\left(920 \times \frac{\pi}{30}\right)^2} = 0{,}002726$$

*Cuando la tensión se reduce a V', la velocidad es 460r.p.m.*

$$S = \frac{1000 - 460}{1000} = 0{,}54$$

$$T_L = 0{,}002726 \times \left(460 \times \frac{\pi}{30}\right)^2 = 6{,}32 N - m$$

*Pero :*

$$T_L = \frac{3 \times r_2' \times V'^2}{S \times W_S \times \left[\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2\right]} \Rightarrow$$

$$V'^2 = \frac{S \times W_S \times \left[\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2\right] \times T_L}{3 \times r_2'}$$

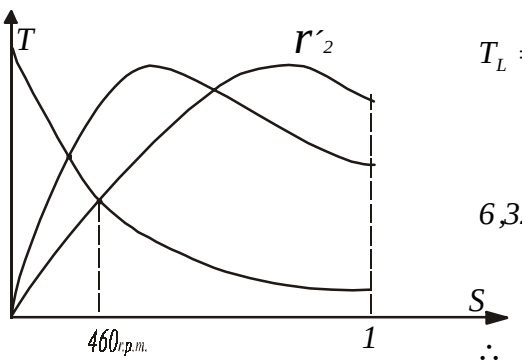
$$\therefore \quad V' = 121{,}8V$$

$$I_2' = \frac{V'}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2}} = \frac{121{,}8}{\sqrt{\left(8 + \frac{16}{0{,}54}\right)^2 + 24^2}}$$

$$\therefore \quad I_2' = 2{,}73A$$

$$P_{Cu} = 3 \times I_2'^{\,2} \times (r_1 + r_2') = 3 \times 2{,}73^2 \times 24 = 536{,}6 Watts$$

*b) Con resistencia rotórica:*




$$T_L = \frac{3 \times r_2' \times V^2}{S \times W_S \times \left[\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2\right]}$$

$$6{,}32 = \frac{3 \times r_2' \times 440^2}{0{,}54 \times 104{,}7 \times \left[\left(8 + \frac{r_2'}{0{,}54}\right)^2 + 24^2\right]}$$

$$\therefore \quad r_2' = 464{,}7\,\Omega$$

***Figura** P7.11.2*

$$I_2' = \frac{V}{\sqrt{\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2}} \quad \Rightarrow \quad I_2' = 0{,}51A$$

$$P_{Cu} = 3 \times I_2'^2 \times (r_1 + r_2') = 18{,}727\, watts$$

$$\therefore \quad r_{2\,adicional}' = 448{,}7\,\Omega$$

***PROBLEMA N° 7.12 :*** *Los parámetros del circuito equivalente por fase de un motor de inducción trifásico son:*

$$r_1 = 0{,}22\Omega \qquad r_2' = 1\Omega \qquad X_1 = X_2' = 0{,}6645\Omega$$
$$r_P = 809{,}7\Omega \qquad X_m = 70{,}8\Omega$$

*Si el motor es de 3,5HP, 220V, conexión estrella, 50Hz, 8 polos y presenta unas pérdidas totales mecánicas iguales a 180 Watts.*

*a) Calcular la velocidad, eficiencia y f.d.p. cuando entrega su potencia nominal.*

*b) Calcular el mínimo valor al que puede caer la tensión de alimentación sin que el motor se detenga, si impulsa una carga a torque nominal y de característica constante.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$P_{MEC} = P_{sal} + p_{rotacionales}$$
$$P_{sal} = 3{,}5 \times 746 = 2611\, Watts$$
$$p_{rotacionales} = 180\, Watts$$

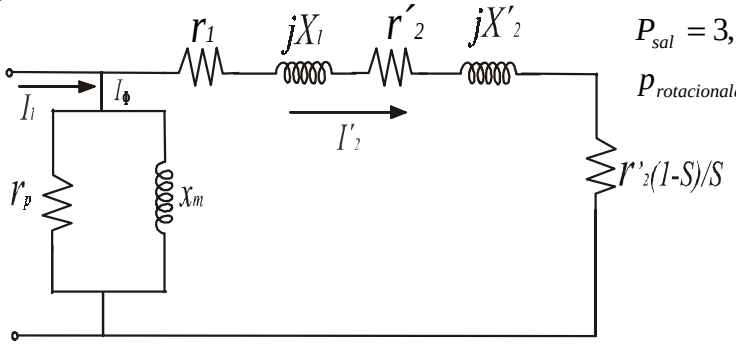



***Figura*** *P7.12.1*

$$P_{MEC} = 2791\, Watts = 3 \times I_2'^2 \times r_2' \times \left(\frac{1-S}{S}\right)$$

$$\frac{3 \times V^2 \times r_2' \times \left(\frac{1-S}{S}\right)}{\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2} = 2791$$

$$\frac{\left(\frac{1-S}{S}\right)}{\left(r_1+\frac{r_2'}{S}\right)^2+(X_1+X_2')^2}=\frac{2791}{3\times V^2\times r_2'}\quad\Rightarrow\quad\frac{\left(\frac{1-S}{S}\right)}{\left(0{,}22+\frac{1}{S}\right)^2+1{,}329^2}=0{,}057681$$

*Desarrollando la expresión anterior :*

$S_1=0{,}0638$

$S_2=0{,}8185$

$\therefore\quad S=0{,}0638$

$$W_S=\frac{120\times 50}{8}=750r.p.m.$$

$$\therefore\quad W_m=(1-S)\times W_S=702{,}15r.p.m.$$

$$\bar{I}_2'=\frac{127\angle 0°}{\left(0{,}22+\frac{1}{0{,}0638}\right)+1{,}329\,j}=7{,}963\angle -4{,}78°$$

$$\bar{I}_\phi=127\angle 0°\times\left[\frac{1}{r_P}-\frac{1}{X_m}\,j\right]=1{,}801\angle -85°$$

$$\bar{I}_1=\bar{I}_2'+\bar{I}_\phi=8{,}457\angle -16{,}894°$$

$$\therefore\quad f.d.p.=\cos(-16{,}894°)=0{,}957$$

$$P_{ent}=3\times 127\times 8{,}457\times 0{,}957=3083{,}57Watts$$

$$\therefore\quad \eta=\frac{P_{sal}}{P_{ent}}=\frac{2611}{3083{,}57}=0{,}8468\equiv 84{,}68\%$$

*b)*

$$T_{\max}=\frac{3\times V^2}{2\times W_S\times\left[r_1+\sqrt{r_1^2+(X_1+X_2')^2}\right]}=\frac{P_{MEC}}{W_m}$$

$$\therefore\quad V^2=\frac{P_{MEC}\times 2\times\left[r_1+\sqrt{r_1^2+(X_1+X_2')^2}\right]}{3}\times\frac{W_S}{W_m}$$

$$\Rightarrow\quad V=55{,}81V/\,fase$$

$$\therefore\quad V_{\min}=55{,}81\times\sqrt{3}=96{,}67V(línea)$$

***PROBLEMA N° 7.13 :*** *Se tiene un motor de inducción de rotor devanado de 10HP, 4polos, 1725r.p.m., 60Hz, 220V, 25 A, trifásico, conexión* ***Y****, que tiene los siguientes parámetros por fase:*

$$r_1=0{,}25\Omega\qquad r_2'=0{,}23\Omega\qquad X_1=X_2'=0{,}4\Omega$$

*Además una corriente de vacío de 7,10 A cuando se aplica 220V. Las pérdidas en el núcleo es de 250Watts; pérdidas por fricción y viento de 155Watts. La relación de espiras efectivas entre estator y rotor es 1,67/1, y el par de carga es de 50Lb-pie independiente de la velocidad.*
*Se conecta un capacitor en serie con cada fase del rotor de modo que la corriente del rotor esté en fase con el voltaje inducido cuando el deslizamiento es igual a 1.*

*a) Determinar el valor del condensador que se conecta a cada fase del rotor.*
*b) Determinar el par de arranque desarrollado en N-m.*

*SOLUCIÓN:*

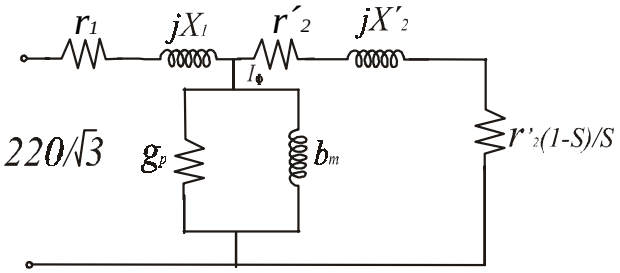



**Figura** *P7.13.1*

*DATOS :*

$10\,HP$

$4\,polos$

$220V\ (Y)$

$r_1 = 0{,}25\Omega$

$r_2' = 0{,}23\Omega$

$X_1 = X_2' = 0{,}4\Omega$

$n\,(\text{relación de espiras}) = 1{,}67$

$P_{FE\,3\phi} = 250Watts$

$p_{f+v} = (\text{pérdidas por fricción y por viento}) = 155\,watts$

$I_0 = 7{,}1A$

$$g_P = \frac{250/3}{127^2} = 5{,}165\times10^{-3}\,mhos \quad \Rightarrow \quad r_P = 193{,}6\,\Omega\ /\ fase$$

$$Y_\phi = \frac{7{,}1}{127} = 0{,}056\,mhos$$

$$\Rightarrow \quad b_m = 55{,}6588\times10^{-3}\,mhos \quad \therefore X_m = 17{,}9666\,\Omega\ /\ fase$$

*Para S=1:*

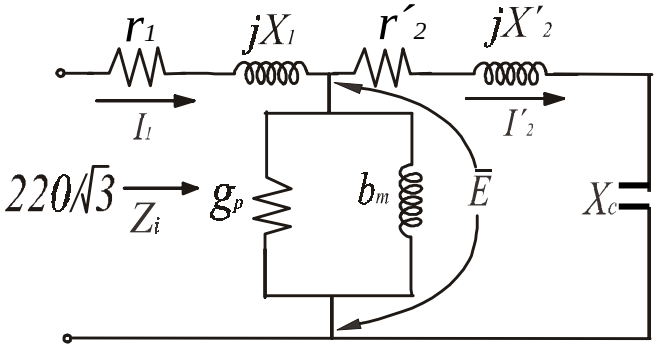



**Figura** *P7.13.2*

$\bar{I}_2^{'}$ *en fase con* $\bar{E}$ *:*

$$X_C = \frac{0,4}{1,67^2}\Omega / \ fase$$

$$Pero \quad X_C = \frac{1}{W \times C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{W \times X_C} = \frac{1,67^2}{0,4 \times W} = \frac{1,67^2}{0,4 \times 2\pi \times 60}$$

$$\therefore C = 18494,5\mu F / \ fase$$

*b) Torque desarrollado en el arranque:*

$$\bar{Z}_i = 0,6265\angle 40°$$

$$\bar{I}_1 = 202,7\angle -40°$$

$$\bar{E} = \frac{220}{\sqrt{3}} - \bar{I}_1 \times (r_1 + jX_1)$$

$$\therefore \bar{E} = 46,616\angle -39,331°$$

$$I_2^{'} = \frac{E}{r_2'} = 202,678A$$

$$T_{arranque} = \frac{3 \times r_2' \times I_2^{'2}}{W_S} = \frac{3 \times 0,23 \times 202,678^2}{2\pi \times \frac{60}{4/2}}$$

$$\therefore T_{arranque} = 150,37N - m$$

***PROBLEMA N° 7.14 :*** *Un motor de rotor bobinado tiene los siguientes datos : 1176r.p.m., 15HP, 600V, 6 polos, conexión* ***Y*** *y 60Hz. Además:*

$$r_1 = 0,76\Omega \quad r_2' = 0,90\Omega \quad X_1 = X_2' = 2\Omega$$

$$X_m = 71,43\Omega \quad r_p = 476\Omega \quad (datos \ por \ fase)$$

*a) Que resistencia debe insertarse en el circuito rotórico para reducir la velocidad a 1000r.p.m., con le par de plena carga.*
*b) Determinar la tensión que se debe aplicar al estator si se desea reducir la velocidad a 1000r.p.m. (sin modificar al rotor).*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$W_m = 1176 r.p.m.$$

$$W_S = \frac{120 \times 60}{6} = 1200 r.p.m. = 125,664 rad / seg.$$

$$T_{3\phi} \times W_m = P_{MEC} = 3 \times r_2' \times \left(\frac{1-S}{S}\right) \times I_2^{'2}$$

$$S_N = \frac{W_S - W_m}{W_S} = \frac{1200 - 1176}{1200} = 0,02$$

$$I_{2N}^{'\,2} = \frac{\left(600/\sqrt{3}\right)^2}{\left(0{,}76 + \frac{0{,}9}{0{,}02}\right)^2 + (2+2)^2} = 56{,}873$$

$$\Rightarrow \quad T_{3\phi\,N} = \frac{3 \times r_2' \times I_{2N}^{'\,2}}{S_N \times W_S} = \frac{3 \times 0{,}9 \times 56{,}873}{0{,}02 \times 125{,}664}$$

$$\therefore \quad T_{3\phi\,N} = 61{,}098\,N - m$$

$$T_{\substack{nominal \\ salida}} = \frac{P_{MEC\,salida\,nominal}}{W_m} = \frac{15 \times 746}{1176 \times \frac{\pi}{30}} = 90{,}86\,N - m$$

$$T_{\substack{nominal \\ salida/\,fase}} = 30{,}287\,N - m$$

$$T_{3\phi} = \frac{3 \times R_2' \times I_2^{'\,2}}{S \times W_S} = \frac{3 \times R_2' \times V_1^{\,2}}{S \times W_S \times \left[\left(r_1 + \frac{R_2'}{S}\right)^2 + \left(X_1 + X_2'\right)^2\right]}$$

$$\Rightarrow \quad \left(r_1 + \frac{R_2'}{S}\right)^2 + \left(X_1 + X_2'\right)^2 = \frac{3 \times R_2' \times V_1^{\,2}}{S \times W_S \times T_{3\phi}}$$

$$S = \frac{1200 - 1000}{1200} = 0{,}1667 \quad \Rightarrow \left(0{,}76 + \frac{R_2'}{0{,}1667}\right)^2 + 4^2 = \frac{3 \times R_2' \times \left(\frac{600}{\sqrt{3}}\right)^2}{0{,}1667 \times 125{,}664 \times 61{,}098}$$

$$\left(0{,}76 + \frac{R_2'}{0{,}1667}\right)^2 + 16 = 282{,}46 \times R_2'$$

*Desarrollando la expresión anterior :*

$R_{21}' = 7{,}454\Omega \qquad R_{22}' = 0{,}061\Omega$

$\therefore \quad R_2' = 7{,}454\Omega \quad \Rightarrow \quad r_2'_{adicional} = 7{,}454 - 0{,}9 = 6{,}554\Omega\,/\,fase$

*b)*

$$T_{3\phi} = \frac{3 \times V_1^{\,2}}{\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + \left(X_1 + X_2'\right)^2} \times \frac{r_2'}{S \times W_S}$$

$$V_1^{\,2} = \frac{\left[\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right)^2 + \left(X_1 + X_2'\right)^2\right] \times T_{3\phi} \times S \times W_S}{3 \times r_2'}$$

$$V_1^2 = \frac{\left[\left(0{,}76 + \frac{0{,}9}{0{,}1667}\right)^2 + 4^2\right] \times 61{,}098 \times 0{,}1667 \times 125{,}664}{3 \times 0{,}9}$$

$$V_1 = 160V \ / \ fase$$

$$\therefore V_1(\text{línea}) = 277{,}13V$$

***PROBLEMA N° 7.15 :*** *Se tiene un motor Jaula de ardilla con los siguientes datos de placa: 6polos, 60Hz, 220V (conexión **Y**), 5HP. La resistencia del estator por fase es 0,616Ohmios. Las lecturas de los ensayos fueron:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Ensayo de vacío:* | *220V* | *5,25 A* | *460Watts* |
| *Ensayo rotor bloqueado:* | *99,2V* | *16 A* | *1100Watts* |

*Pérdidas por fricción y ventilación: 324Watts*

*a) Determinar los parámetros del motor.*
*b) Determinar la corriente y el factor de potencia cuando la máquina funciona a S=0,03.*
*c) Determinar el deslizamiento crítico y el torque máximo.*

*SOLUCIÓN:*

*a) DE LA PRUEBA DE CORTOCIRCUITO:*

$$Z_{eq} = \frac{99{,}2/\sqrt{3}}{16} = 3{,}58\Omega \ / \ fase$$

$$r_1 + r_2' = \frac{P_{CC\,1\phi}}{I_n^{\,2}} = \frac{1100/\sqrt{3}}{16^2} = 1{,}43\Omega \ / \ fase$$

$$X_1 + X_2' = \sqrt{3{,}58^2 - 1{,}43^2} = 3{,}28\Omega \ / \ fase$$

$$r_1 = 0{,}616\Omega$$

$$r_2' = 0{,}814\Omega$$

$$X_1 = X_2' = 1{,}64\Omega$$

*DEL ENSAYO DE VACÍO:*

$$P_{FE\,3\phi} = P_{1\,3\phi} - 3 \times I_\phi^{\,2} \times r_1 - p_{f+v} = 460 - 3 \times 5{,}25^2 \times 0{,}616 - 324$$

$$\therefore P_{FE\,3\phi} = 85{,}0645Watts$$

$$g_P = \frac{P_{FE\,1\phi}}{V_{1\phi}^{\,2}} = \frac{85{,}0645/3}{\left(220/\sqrt{3}\right)^2} = 1{,}7575 \times 10^{-3}\,mhos$$

$$Y_\phi = \frac{I_\phi}{V_{1\phi}} = \frac{5{,}25}{\left(220/\sqrt{3}\right)} = 0{,}0413 mhos$$

$$b_m = \sqrt{Y_\phi^{\,2} - g_P^{\,2}} = 0{,}0413 mhos$$

*b)* $S=0{,}03$

$$\bar{I}_2' = \frac{\bar{V}_1}{\left(r_1 + \frac{r_2'}{S}\right) + (X_1 + X_2')j} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}}\angle 0°}{\left(0{,}616 + \frac{0{,}814}{0{,}03}\right) + (1{,}64 + 1{,}64)j}$$

$$\therefore \bar{I}_2' = 4{,}552\angle -6{,}7° = 4{,}52 - 0{,}53j$$

$$\bar{I}_\phi = \frac{220}{\sqrt{3}} \times (1{,}7575 \times 10^{-3} - 0{,}0413j) = 0{,}223 - 5{,}246j$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2' + \bar{I}_\phi = 4{,}743 - 5{,}776j$$

$$\therefore \bar{I}_1 = 7{,}47\angle -50{,}608° \qquad \cos\varphi = 0{,}635$$

*c)*

$$S_C = \frac{r_2'}{\sqrt{r_1^{\,2} + (X_1 + X_2')^2}} = \frac{0{,}814}{\sqrt{0{,}616^2 + 3{,}28^2}} = 0{,}244$$

$$T_{máx} = \frac{3}{2\pi \times f} \times \frac{P}{2} \times V_1^{\,2} \times \frac{1}{2 \times \left[r_1 + \sqrt{r_1^{\,2} + (X_1 + X_2')^2}\right]}$$

$$T_{máx} = \frac{3}{2\pi \times 60} \times \frac{6}{2} \times 127^2 \times \frac{1}{2 \times \left[0{,}616 + \sqrt{0{,}616^2 + 3{,}28^2}\right]}$$

$$\therefore T_{máx} = 48{,}7 N - m$$

***PROBLEMA N° 7.16 :*** *Un motor de inducción trifásico, 660V, conexión delta, 50Hz, 4polos con impedancias cuando está detenido:*

$$Z_1 = Z_2' = 0{,}15 + 0{,}75j\Omega \,/\, fase$$

*Si el deslizamiento a plena carga es 3%. Campare el torque eléctrico en estas condiciones con el torque eléctrico desarrollado inmediatamente después de hacer los siguientes cambios:*

*a) Inversión de 2 líneas de alimentación (cambio de frecuencia)*

*SOLUCIÓN:*

*Como la conexión está en delta :*

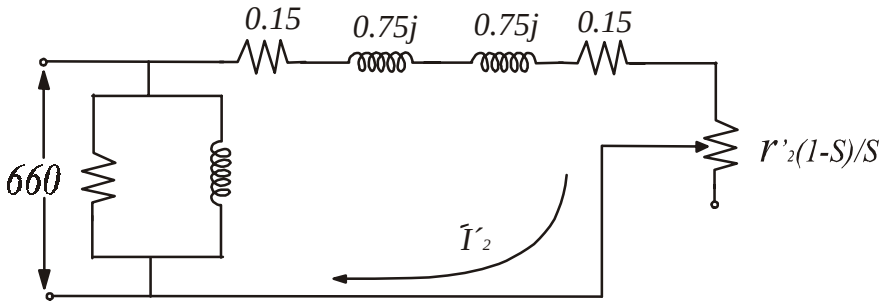



***Figura** P7.16.1*

$$I_2' = \frac{660}{\sqrt{\left(0{,}15 + \frac{0{,}15}{0{,}03}\right)^2 + 1{,}5^2}} = 123A$$

$$P_e = W \times T_e \qquad T_{e1\phi} = \frac{I_2'^{\,2} \times r_2' \times \left(\frac{1-S}{S}\right)}{(1-S) \times W_S} \qquad W_S = \frac{2\pi \times f}{P/2} = \frac{2\pi \times 50}{2} = 157 rad/seg$$

$$T_{e1\phi} = \frac{123^2 \times 0{,}15 \times \left(\frac{1-0{,}03}{0{,}03}\right)}{(1-0{,}03) \times 157} = 481{,}815 N-m \qquad W_m = 152{,}3 rad/seg$$

$$\therefore T_{e3\phi} = 1445{,}445 N-m$$

*a)*

$$S = \frac{W_S - W_m}{W_S} \qquad \text{Con inversión de líneas :} \quad S = \frac{-W_S - W_m}{-W_S} = 1{,}97$$

*Análogamente:*

$$I_2' = \frac{660}{\sqrt{\left(0{,}15 + \frac{0{,}15}{1{,}97}\right)^2 + 1{,}5^2}} = 435{,}1A$$

$$T_{e1\phi} = \frac{435{,}1^2 \times 0{,}15 \times \left(\frac{1-1{,}97}{1{,}97}\right)}{(1-1{,}97) \times 157} = 91{,}81 N-m$$

$$\therefore T_{e3\phi} = 275{,}43 N-m$$

***PROBLEMA N° 7.17 :*** *Un motor síncrono trifásico de 440V (**Y**), 6polos, 50Hz tiene una reactancia síncrona por fase:*

$$X_S = 10\Omega / fase$$

*A condiciones de plena carga, la corriente de armadura es 20 A y el f.d.p. es 0,9 en adelanto. Si el torque de carga se incrementa gradualmente de esta condición hasta 300N-m., en que porcentaje deberá ser incrementada la excitación para evitar la pérdida de sincronismo con este torque de carga.*

*SOLUCIÓN:*

$$\text{Motor Síncrono:}$$
$$3\phi, 440V, 6\,polos, 50Hz, X_S = 10\Omega\,/\,fase$$
$$I = 20A\ a\ plena\ carga \quad f.d.p. = 0{,}9 \qquad \varphi = 25{,}842°$$

$$W = \frac{120\times f}{P} = \frac{120\times 50}{6} = 1000r.p.m. \equiv 104{,}7\,rad/seg$$

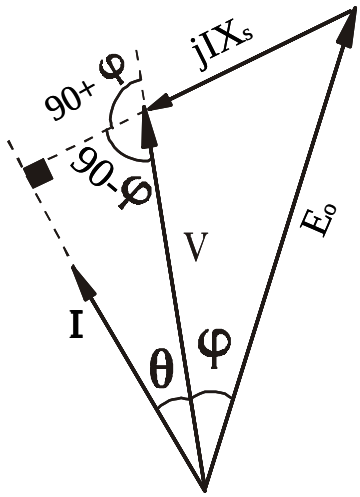



***Figura*** *P7.17.1*

$$\overline{E_0} = \frac{440}{\sqrt{3}}\angle 0° - jI\times X_S\angle\varphi = \frac{440}{\sqrt{3}}\angle 0° - 200\angle 90+\varphi$$
$$\overline{E_0} = 385{,}7\angle -27{,}83°\,V$$
$$P_{3\phi} = T_L\times W = 300\times 1000\times\frac{\pi}{30} = 10000\pi$$
$$P_{1\phi} = {P_{3\phi}}/{3} = 10471{,}98Watts$$
$$P_{1\phi} = \frac{E_0'\times V}{X_S}\times sen90° \quad\Rightarrow\quad E_0' = \frac{P_{1\phi}\times X_S}{V} = \frac{10471{,}98\times 10}{254}$$
$$\therefore\quad E_0' = 412{,}3V$$
$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E_0'-E_0}{E_0} = \frac{412{,}3-385{,}7}{385{,}7} = 0{,}069 = 6{,}9\%$$

*Por lo tanto debe incrementarse en 6,9%.*

***PROBLEMA N °7.18 :*** *Un motor síncrono trifásico de 1000KVA, 60Hz y 2300V (**Y**) tiene una reactancia $X_S$ =1,65Ω /fase.*

*a) Cual es el valor de la tensión de excitación si el ángulo de potencia es 10° eléctricos y el motor toma su corriente nominal con f.d.p. en atraso.*
*b) Cual será el ángulo de potencia del motor si este desarrolla una potencia de salida de 500KW con tensión de excitación de 2000V. Determine si el motor toma corriente en adelanto o atraso y calcule dicha corriente.*

*SOLUCIÓN:*
*a)*

$$S = \sqrt{3} \times I_L \times V_L$$

$$\Rightarrow I_L = \frac{S}{\sqrt{3} \times V_L} = \frac{1000 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 2300} = 251{,}022A$$

*Sabemos que :*

$$\bar{V} = \bar{E}' + j\bar{I} \times X_S \qquad \delta = 10°$$

$$\frac{2300}{\sqrt{3}} = \frac{E'}{\sqrt{3}} \angle -10° + 251{,}022 \angle -\phi \times 1{,}65 \angle 90°$$

$$\Rightarrow 2300 = E' \times (\cos 10° - j sen 10°) + 717{,}4 \times (sen\phi + j \cos\phi)$$

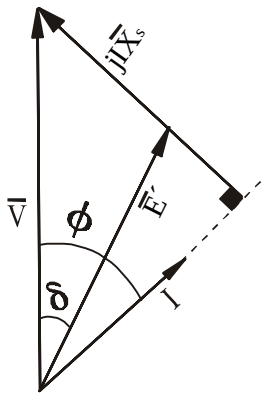



***Figura*** *P7.18.1*

*Igualando parte real y parte imaginaria:*

$$717{,}4 \times \cos\phi = E' \times sen 10°$$

$$2300 = E' \times \cos 10° + 717{,}4 \times sen\phi$$

$$\Rightarrow \quad \phi = 66{,}17° \qquad y \qquad E' = 1669{,}1626V$$

$$\therefore \quad E'_{fase} = \frac{E'}{\sqrt{3}} = 963{,}7V$$

*b)*

$$P = 500KW \qquad E'_{línea} = 2000V \quad \Rightarrow \quad E'_{fase} = \frac{2000}{\sqrt{3}} = 1154{,}7V$$

$$V_{fase} = \frac{2300}{\sqrt{3}} = 1327{,}9V$$

$$Por\ \ fase: \quad P_{1\phi} = P/3 = \frac{E' \times V}{X_S} \times sen\delta \quad \Rightarrow \quad sen\delta = \frac{500 \times 10^3}{3} \times \frac{1{,}65}{\frac{2000}{\sqrt{3}} \times \frac{2300}{\sqrt{3}}}$$

$$sen\delta = 0{,}17935$$

$$\therefore \quad \delta = 10{,}33°$$

$$\overline{V} = \overline{E}' + j\overline{I} \times X_S \qquad \Rightarrow \frac{2300}{\sqrt{3}} = \frac{2000}{\sqrt{3}} \angle -10{,}33° + 1{,}65 \angle 90° \times I \angle -\phi$$

*Desarrollando e igualando partes reales e imaginarias:*

$$2300 = 2000 \times cos\,10{,}33° + 2{,}8578 \times I \times sen\phi$$

$$2000 \times sen10{,}33° = 2{,}8578 \times I \times cos\phi$$

$$\Rightarrow \phi = 42{,}827° \qquad \therefore I = 171{,}11A$$

***PROBLEMA N° 7.19 :*** *Un generador síncrono trifásico de 25KVA; 440V (**Y**); 4 polos que tiene una reactancia síncrona por fase de 11,38Ohmios con una característica de vacío como se muestra:*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_0$ (V/fase) | 70 | 140 | 210 | 280 | 350 | 420 |
| $I_f$ (A) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

*El generador se conectará a un sistema de potencia infinito de 440V y 50Hz.*

*a) Para la puesta en paralelo calcular la velocidad a la que se debe impulsar el generador y la corriente de excitación.*

*b) Después de comprobar la secuencia de fases y el sincronismo, el generador es puesto en paralelo y a continuación el torque aplicado es aumentado de tal forma que se obtiene un ángulo interno de 25° eléctricos. Determinar la corriente, f.d.p., $P_{1\phi}$, $Q_{1\phi}$, y el torque aplicado.*

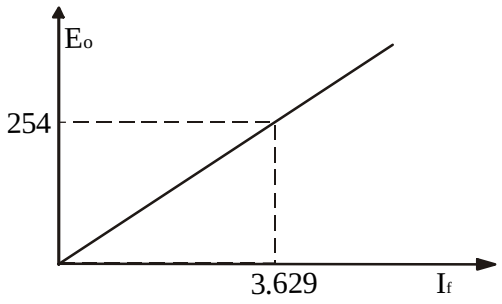
*c) Si a continuación la corriente $I_f$ se regula de manera que el generador no entregue ni absorba potencia reactiva del sistema. Calcular $I_f$ , I y el nuevo factor de potencia.*

*d) Determinar cual es el mínimo valor de $I_f$ que se debe aplicar sin que la máquina salga de sincronismo y para este mismo régimen obtener la I, f.d.p., $P_{1\phi}$ y $Q_{1\phi}$ .*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$W_S = \frac{120 \times f}{P} = \frac{120 \times 50}{4} = 1500 r.p.m.$$

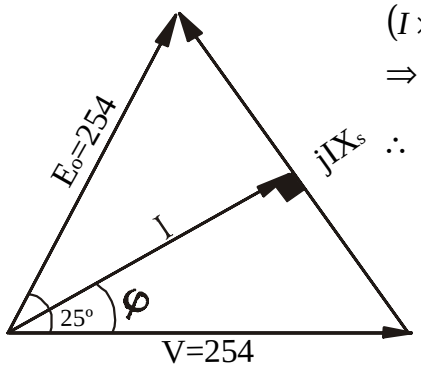



$$V_{fase} = \frac{440}{\sqrt{3}} = 254V$$

$$E_0 = 70 \times I_f \quad \Rightarrow \quad I_f = \frac{254}{70} = 3{,}629A$$

***Figura*** *P7.19.1*

*b)*




$$(I \times X_S)^2 = 254^2 + 254^2 - 2 \times 254 \times 254 \times \cos 25°$$

$$\Rightarrow \quad I \times X_S = 109{,}95$$

$$\therefore \quad I = \frac{109{,}95}{11{,}38} = 9{,}6618\,A$$

***Figura*** *P7.19.2*

$$P_{1\phi} = \frac{E_0 \times V}{X_S} \times sen\delta = \frac{254 \times 254}{11{,}38} \times sen25° = 2395{,}926 Watts$$

$$Q_{1\phi} = \frac{E_0 \times V}{X_S} \times \cos\delta - \frac{V^2}{X_S} = \frac{254 \times 254}{11{,}38} \times \cos 25° - \frac{254^2}{11{,}38} = -531{,}164 VAR$$

$$\tan\varphi = \frac{|Q_{1\phi}|}{P_{1\phi}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{531{,}164}{2395{,}926}\right) = 12{,}5°$$

$$\therefore \; f.d.p. = \cos\varphi = 0{,}9763$$

$$T_{1\phi} = \frac{P_{1\phi}}{W_m} = \frac{2395{,}926}{1500 \times \frac{\pi}{30}} = 15{,}253 N - m$$

$$\therefore T_{3\phi} = 3 \times T_{1\phi} = 45{,}76 N - m$$

*c)*

$$Q_{1\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{1\phi} = cte. = 2395{,}926W$$

$$Q_{1\phi} = \frac{E_0 \times V}{X_S} \times \cos\delta - \frac{V^2}{X_S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\delta = \frac{V}{E_0}$$

$$P_{1\phi} = \frac{E_0 \times V}{X_S} \times sen\delta \quad \Rightarrow \quad \tan\delta = \frac{P_{1\phi} \times X_S}{V^2}$$

$$\delta = arctan\left(\frac{2395{,}926 \times 11{,}38}{254^2}\right) = 22{,}9°$$

*Luego :*

$$E_0 = \frac{P_{1\phi} \times X_S}{V \times sen\delta} = 275{,}863V$$

$$\Rightarrow \quad I_f = \frac{E_0}{70} = 3{,}94A$$

$$Como : Q_{1\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad f.d.p. = 1$$

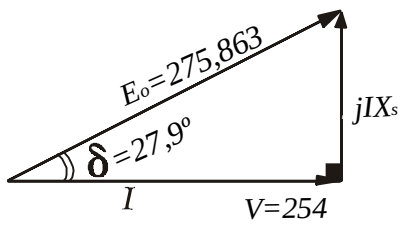



***Figura*** *P7.19.3*

$$I \times X_S = \sqrt{E_0^{\,2} - V^2} = \sqrt{275{,}863^2 - 254^2} = 107{,}63$$

$$\therefore I = \frac{107{,}63}{11{,}38} = 9{,}4578\,A/\ fase$$

*d)*

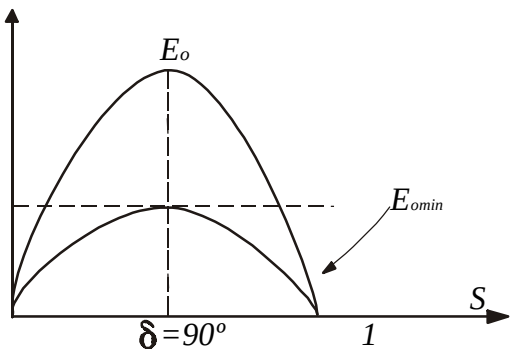



***Figura*** *P7.19.4*

$$P_{1\phi} = \frac{E_{0\,min} \times V}{X_S} \times sen90°$$

$$\Rightarrow E_{0\,min} = \frac{2395{,}926 \times 11{,}38}{254} = 107{,}345V$$

$$I_{f\,min} = \frac{E_{0\,min}}{70} = 1{,}5335A$$

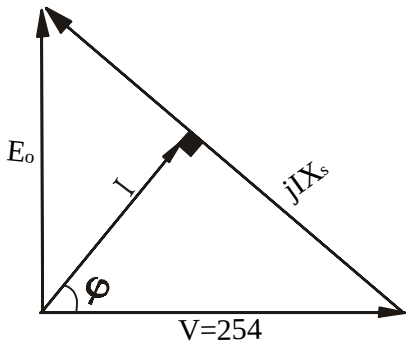



***Figura*** *P7.19.5*

$$I \times X_S = \sqrt{107{,}345^2 + 254^2} = 275{,}7516 \quad \Rightarrow \quad I = 24{,}23125A$$

$$Q_{1\phi} = \frac{E_0 \times V}{X_S} \times cos\,\delta - \frac{V^2}{X_S} = -\frac{V^2}{X_S} = -\frac{254^2}{11{,}38} = -5669{,}244VAR$$

$$P_{1\phi} = \frac{E_0 \times V}{X_S} \times sen\delta = \frac{107{,}345 \times 254}{11{,}38} = 2395{,}926Watts$$

$$tan\,\varphi = \frac{|Q_{1\phi}|}{P_{1\phi}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = arctan\frac{5669{,}244}{2395{,}926} = 67{,}1°$$

$$\therefore \quad f.d.p. = cos\,\varphi = 0{,}389$$

***PROBLEMA N° 7.20 :*** *Un generador síncrono trifásico de 150 KVA; 2200V; 60Hz, de 6 polos en conexión estrella;* $X_S$ *= 43,83Ohmios/fase y resistencia despreciable; fue ensayado en vacío y a la velocidad síncrona generando 3770V en bornes de línea cuando la corriente de excitación fue de* $I_f$ *=40A.*
*Si el generador va a ser conectado a un sistema de potencia infinito de 2200V y 60Hz y asumiendo una característica lineal para el circuito magnético, se pide:*

*a) Para la puesta en paralelo, calcular la velocidad a la que debe impulsarse el generador y la corriente de excitación necesaria. Además mencione que otras condiciones debe cumplirse para la puesta en paralelo.*
*b) Luego la excitación del generador es regulado de tal manera que* $I_f$ *= 49,4A y la corriente de armadura sea la nominal, calcular: Angulo de potencia "δ", factor de potencia, la potencia activa y la reactiva.*
*c) Hallar el mínimo valor posible de* $I_f$ *para que la máquina no pierda sincronismo.*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

$$W_S = \frac{120 \times f}{P} = \frac{120 \times 60}{6} = 1200 r.p.m.$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{I_f}{I_{f0}}$$

$$En\ vacío: \quad E' = 2200V \quad I_f = \frac{2200}{3770} \times 40 = 23{,}342A$$

- *Secuencia de Fases.*
- *Sincronismo.*

*b)*

$$V_{fase} = \frac{2200}{\sqrt{3}} = 1270{,}17V$$

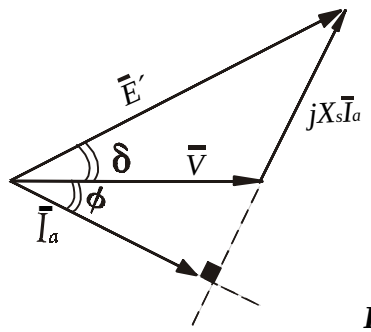
$$Si\ I_f = 49{,}4A \quad \Rightarrow \quad E' = 3770 \times \frac{49{,}4}{40} = 4655{,}95V$$

$$E'_{fase} = E' / \sqrt{3} = 2688{,}114V$$

$$I_{a\,nom} = \frac{150 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 2200} = 39{,}365A \qquad (S_n = \sqrt{3} \times V_L \times I_{a\,nom})$$

$$\Rightarrow \quad X_S \times I_{a\,nom} = 43{,}83 \times 39{,}365 = 1725{,}37V\ /\ fase$$

*En una fase:*




$$V_{fase} = 2200 / \sqrt{3}\ V$$

$$E'_{fase} = 2688{,}114V$$

***Figura*** *P7.20.1*

$$(X_S \times I_a)^2 = V_{fase}^{\ 2} + E'^{\ 2}_{fase} - 2 \times V_{fase} \times E'_{fase} \times \cos\delta$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \arccos\left( \frac{V_{fase}^{\ 2} + E'^{\ 2}_{fase} - (X_S \times I_a)^2}{2 \times V_{fase} \times E'_{fase}} \right)$$

$$\therefore \delta = 30{,}85°$$

$$E'_{fase}\angle\delta = V_{fase}\angle 0° + I_a\angle -\varphi \times X_S\angle 90°$$

$$I_a\angle -\varphi = \frac{E'_{fase}\angle\delta - V_{fase}\angle 0°}{X_S\angle 90°}$$

$$I_a\angle -\varphi = \frac{2688{,}114\angle 30{,}85° - \frac{2200}{\sqrt{3}}\angle 0°}{43{,}83\angle 90°} = 39{,}365\angle -36{,}97°$$

$$\therefore f.d.p. = cos(-36{,}97°) = 0{,}799$$

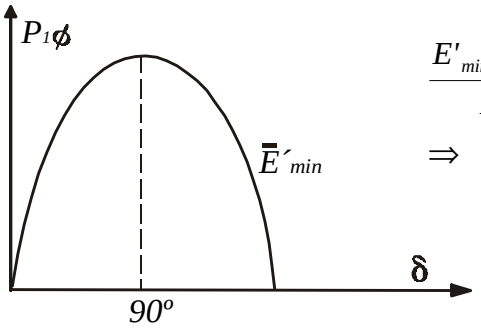
$$P_{1\phi} = \frac{E'_{fase}\times V_{fase}}{X_S}\times sen\delta = \frac{2688{,}114\times\frac{2200}{\sqrt{3}}}{43{,}83}\times sen30{,}85°$$

$$\therefore P_{1\phi} = 39{,}95KWatts$$

$$Q_{1\phi} = \frac{1}{X_S}\times\left[E'_{fase}\times V_{fase}\times cos\delta - V_{fase}^{\ 2}\right] = \frac{1}{43{,}83}\times\left[2688{,}114\times\frac{2200}{\sqrt{3}}\times cos30{,}85° - \left(\frac{2200}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

$$\therefore Q_{1\phi} = 30{,}069KVAR$$

*c)*




$$\frac{E'_{min}\times V_{fase}}{X_S}\times sen90° = P_{1\phi} = 39{,}95\times 10^3$$

$$\Rightarrow \quad E'_{min} = 1378{,}56V\ /\ fase$$

**Figura** *P7.20.2*

$$I_{f\,min} = 1378{,}56\times\frac{40}{3770/\sqrt{3}} = 25{,}334A$$

***PROBLEMA N° 7.21 :*** *Un motor síncrono de 11KV, conexión estrella, 50Hz, 6polos, opera a 1MVA y f.d.p. 0,9 capacitivo. Si el motor tiene una impedancia puramente inductiva $X_S$ = 120 Ohmios/fase.*

*a) Calcular la corriente de armadura, la tensión interna, torque eléctrico y la potencia de salida.*

*b) Calcular la nueva corriente de armadura, la tensión interna requerida para operar al motor a f.d.p. 0,8 inductivo e impulsando la misma carga mecánica, expresar el nuevo valor de $E_f$ como una fracción del valor obtenido en a).*

*SOLUCIÓN:*

*a)*

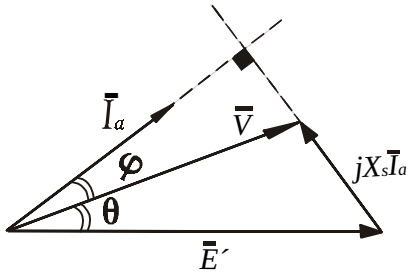



***Figura*** *P7.21.1*

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}\times V} = \frac{10^6}{\sqrt{3}\times 11\times 10^3} = 52{,}5A$$

$$\cos\varphi = 0{,}9 \qquad \Rightarrow \quad \varphi = 25{,}8°$$

$$\bar{E}_f = \bar{V} - jX_S \times \bar{I} = \frac{11000}{\sqrt{3}}\angle 0° - 120\angle 90° \times 52{,}5\angle 25{,}8°$$

$$\bar{E}_f = 10716{,}85\angle -31{,}96°$$

$$\therefore E_f = 10{,}71685KV$$

$$\theta = 31{,}96°$$

$$P_{1\phi} = \frac{E_f \times V}{X_S}\times sen\theta = \frac{10716{,}85\times\frac{11000}{\sqrt{3}}}{120}\times sen31{,}96°$$

$$\therefore P_{1\phi} = 300{,}223KW \qquad \Rightarrow \quad P_{3\phi} = 900{,}669KW$$

$$T_e = \frac{P_{3\phi}}{W} = \frac{900669}{4\pi\times\frac{50}{6}} = 8{,}6KN - m$$

*b)*

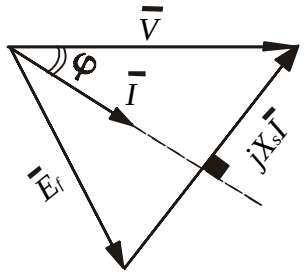



***Figura*** *P7.21.2*

$$f.d.p. = 0{,}8 \text{ inductivo}$$

$$P_{1\phi} = cte.$$

$$\sqrt{3} \times V_L \times I \times \cos\varphi = P_{3\phi}$$

$$\Rightarrow I = \frac{P_{3\phi}}{\sqrt{3} \times V_L \times \cos\varphi} = \frac{900669}{\sqrt{3} \times 11000 \times 0{,}8} = 59{,}09A$$

$$\overline{E}_f = \overline{V} - jX_S \times \overline{I} = \frac{11000}{\sqrt{3}} \angle 0° - 120 \angle 90° \times 59{,}09 \angle -37°$$

$$\overline{E}_f = 6034 \angle 69{,}8°$$

$$\therefore E_f = 6034V$$

$$\theta = 69{,}8°$$

$$K = \frac{6034}{10716{,}85} = 0{,}563$$

***PROBLEMA N° 7.22 :*** *En la figura se muestra un generador síncrono trifásico de rotor cilíndrico de 12MVA, 11KV en conexión **Y**, 60Hz, $Z_d$ = j6,96 Ohmios/fase, el cual está conectado a una red de potencia infinita de 11KV, f=60Hz, mediante 2 líneas de impedancia $Z_L$ = j1,6 Ohmios/fase.*
*En horas de máxima demanda, la válvula de admisión de agua de la turbina y la corriente de excitación del generador son ajustados de tal manera que la tensión en bornes del generador sea 11,3KV y un cosφ=0,766.*
*Para este régimen calcular:*

*a) La potencia activa y reactiva que el generador entrega por sus bornes.*
*b) El ángulo medido entre la tensión del sistema y la fuerza electromotríz.*
*c) La potencia activa máxima que puede entregar si una terna sale de servicio.*

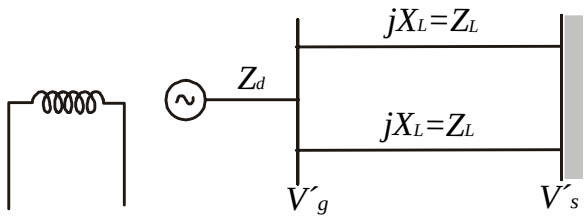



***Figura*** *P7.22.1*

*SOLUCIÓN:*

*Como cosφ=0,766 entonces φ=40° y $X_L' = Z_L // Z_L$ = 0,8 Ohmios/fase.*

*Como el generador está en **Y**, entonces por fase tenemos:*

$$V_g = \frac{11300}{\sqrt{3}} = 6524{,}058V \qquad V_S = \frac{11000}{\sqrt{3}} = 6350{,}85V$$

*De lo cual obtenemos el siguiente diagrama fasorial:*

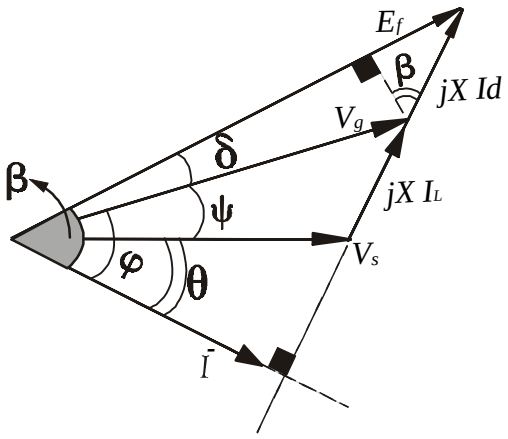



***Figura*** *P7.22.2*

*De lo cual:*

$$V_S \times \cos\theta = V_g \times \cos\varphi \qquad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{V_g \times \cos\varphi}{V_S}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{11{,}3 \times 0{,}766}{11}\right) = 38{,}1°$$

$$\psi = \varphi - \theta = 1{,}9°$$

*Por ley de cosenos:*

$$(I \times X_L')^2 = V_S^{\ 2} + V_g^{\ 2} - 2 \times V_S \times V_g \times \cos\psi$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{274{,}88}{X_L'} = \frac{274{,}88}{0{,}8} = 343{,}6\,A$$

$$Luego: \quad \tan\beta = \frac{V_g \times sen\varphi + I \times X_d}{V_g \times \cos\varphi} = \frac{6524{,}058 \times sen40° + 343{,}6 \times 6{,}96}{6524{,}058 \times \cos 40°} = 1{,}3176$$

$$\Rightarrow \quad \beta = 52{,}8°$$

$$\delta = \beta - \varphi = 52{,}8° - 40° = 12{,}8°$$

*a)*

$$E_f = V_g \times \cos\delta + I \times X_d \times sen\beta = 6524{,}058 \times \cos 12{,}8° + 343{,}6 \times 6{,}96 \times sen52{,}8°$$

$$E_f = 8266{,}8V$$

$$\therefore \quad P = \frac{3 \times E_f \times V_g}{X_d} \times sen\delta = \frac{3 \times 8266{,}8 \times 6524{,}058}{6{,}96} \times sen12{,}8° = 5{,}15MW$$

$$Q = P \times \tan\varphi = 4{,}32MVAR$$

*b)*

*Nos piden* $\delta + \psi = 12{,}8° + 1{,}9° = 14{,}7° = \delta'$

*c)*

$$P' = \frac{3 \times E_f \times V_S}{X_{dZ}'} \times sen\delta'$$

$$donde: \quad X_{dZ} = 6{,}96 + 0{,}8 = 7{,}76 \quad (2\ ternas)$$

$$X_{dZ}' = 6{,}96 + 1{,}6 = 8{,}56 \quad (1\ terna)$$

$$\therefore P' = \frac{3 \times 8266{,}8 \times 6350{,}85}{8{,}56} \times sen14{,}7° = 4{,}67MW$$

***PROBLEMA N° 7.23 :*** *Un motor síncrono trifásico de 500HP, 2300V y 60Hz, tiene una resistencia despreciable en el inducido, y una reactancia síncrona $X_S$ = 13 Ohmios/fase. Cuando la corriente en el inductor es de 94 A DC, la máquina genera en circuito abierto la tensión nominal y girando a la velocidad síncrona. Suponer lineal la característica de circuito abierto. La máxima corriente del inductor utilizable es de 175 A. Si el motor entrega su potencia nominal, calcular:*

*a) El máximo ángulo del factor de potencia en adelanto de fase y la corriente del inducido.*
*b) La corriente del inductor más pequeño posible, para que no se pierda sincronismo, la corriente de línea y el f.d.p..*
*c) La corriente del inductor y la corriente del inducido, cuando el motor trabaja con f.d.p. unitario.*

*SOLUCIÓN:*

*a) Tomando el siguiente diagrama fasorial:*

$I_f$ : *Corriente en el inductor.*

$I$ : *Corriente en el inducido* : $I_a$.

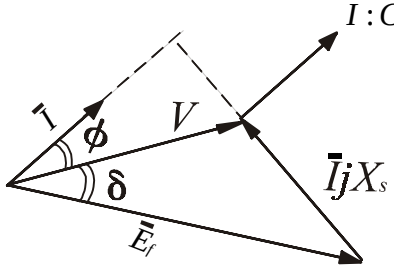
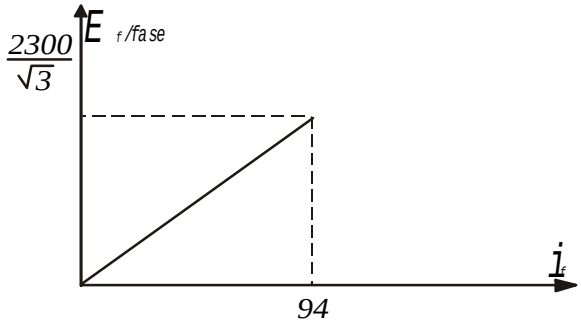



***Figura*** *P7.23.1*




$$E_f = \frac{2300}{\sqrt{3} \times 94} \times I_f$$

***Figura*** *P7.23.2*

*Para la máxima corriente:*

$$E_f = \frac{2300}{\sqrt{3}\times 94}\times 175 = 2472{,}165V$$

$$P_{1\phi} = \frac{V\times E_f}{X_S}\times sen\delta \quad \Rightarrow \quad sen\delta = \frac{P_{1\phi}\times X_S}{V\times E_f}$$

*Si entrega su potencia nominal:*

$$P_{1\phi} = \frac{500\times 746}{3} = 124333{,}33W$$

$$\therefore \quad sen\delta = \frac{124333{,}33\times 13}{\frac{2300}{\sqrt{3}}\times 2472{,}165} = 0{,}492 \qquad \Rightarrow \quad \delta = 29{,}47°$$

$$Q_{1\phi} = \frac{E_f\times V\times cos\,\delta - V^2}{X_S} = \frac{2472{,}165\times\frac{2300}{\sqrt{3}}\times cos\,29{,}47° - \frac{2300^2}{3}}{13} = 84209VAR$$

$$\Rightarrow tan\,\phi = \frac{Q_{1\phi}}{P_{1\phi}} = \frac{84209}{124333{,}33} = 0{,}677 \qquad \Rightarrow \quad \phi = 34{,}1°$$

$$cos\,\phi = 0{,}8281$$

$$\bar{E}_f + jX_S\times\bar{I} = \bar{V} \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = \frac{\bar{V}-\bar{E}_f}{jX_S} = \frac{\frac{2300}{\sqrt{3}} - 2472{,}165\angle -29{,}47°}{13\angle 90°} = 113{,}06\angle 34{,}1°$$

*b)*

$$P_{1\phi} = \frac{E_f\times V}{X_S}\times sen\delta_{max} \qquad \Rightarrow \quad \frac{500\times 746}{3} = \frac{E_f\times\frac{2300}{\sqrt{3}}}{13}\times sen90°$$

$$\therefore E_f = 1217{,}2V\ /\ fase$$

$$\therefore I_f' = \frac{94\times\sqrt{3}}{2300}\times E_f = \frac{94\times\sqrt{3}}{2300}\times 1217{,}2 = 86{,}16335A/\ fase$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}-\bar{E}_f}{jX_S} = \frac{\frac{2300}{\sqrt{3}} - 1217{,}2\angle -90°}{13\angle 90°} = 138{,}5664\angle -47{,}5°$$

$$\therefore cos\,\phi = 0{,}6756$$

*c)*

$$\cos\phi = 1 \qquad \Rightarrow \phi = 0°$$

$$\Rightarrow \tan\phi = 0 \qquad \therefore Q_{1\phi} = 0$$

$$\frac{E_f \times V \times \cos\delta - V^2}{X_S} = 0$$

$$\cos\delta = \frac{V}{E_f}$$

$$P_{1\phi} = \frac{E_f \times V}{X_S} \times sen\delta \quad \Rightarrow sen\delta = \frac{P_{1\phi} \times X_S}{E_f \times V}$$

$$\tan\delta = \frac{P_{1\phi} \times X_S}{V^2} = \frac{\frac{500 \times 746}{3} \times 13}{\frac{2300^2}{3}} = 0{,}9166$$

$$\Theta\ \delta = 42{,}5°$$

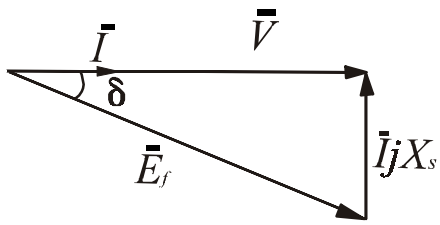



***Figura*** *P7.23.3*

$$E_{f0} \times \cos\delta = V$$

$$\Rightarrow \quad E_{f0} = \frac{\frac{2300}{\sqrt{3}}}{\cos 42{,}5°} = 1801{,}094V\ /\ fase$$

$$\therefore I_{f0} = \frac{94 \times \sqrt{3}}{2300} \times E_{f0} = \frac{94 \times \sqrt{3}}{2300} \times 1801{,}094 = 127{,}5A$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V} - \bar{E}_f}{jX_S} = \frac{\frac{2300}{\sqrt{3}} - 1801{,}094\angle -42{,}5°}{13\angle 90°} = 93{,}6\angle 0°$$

# *ANEXO*

# *REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS*


1. *A. FITZGERALD – KINGSLEY – KUSKO, " TEORIA Y ANALISIS DE LAS MAQUINAS ELECTRICAS" , ED. HISPANO EUROPEA, 1984.*
2. *VEMBU GOURISHANKAR, " CONVERSIÓN DE ENERGIA ELECTROMECANICA" , EDICIONES ALFAOMEGA, 1990.*
3. *INSTITUTO TECNOLOGICO DE MASSACHUSETTS, " CIRCUITOS MAGNETICOS Y TRANSFORMADORES".*
4. *MEISEL, "PRINCIPIOS DE CONVERSIÓN DE ENERGIA".*
5. *LIWCHITZ – GARIK, "MAQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA, MAQUINAS DE CORRIENTE ALTERNA", ED. O. VAN NOSTRAND, COMPANY, 1987.*
6. *M.P. KOSTENKO – L.M. PIOTROVSKI, "MAQUINAS ELECTRICAS TOMOS I Y II, MIR 1975.*
7. *K.HEUMAN, "FUNDAMENTOS DE ELECTRONICA DE POTENCIA".*
8. *SARDE YAMAMURA, "AC. MOTOR FOR HIGH – PERFORMANCE APPLICATIONS".*
9. *ENRICO LEVI, "POLYFHASE MOTORS – A. DIRECT APPROACH TO THEIR DESIGN".*
10. *ROBERTO MIALICH – GIANCARLO ROSSI, "ELECTRONICA INDUSTRIALE – SISTEM E AUTOMATIONE".*
11. *IVANOV – SMOLENSKY, "MAQUINAS ELECTRICAS TOMOS I, II Y III".*


**********